2022학년도 시립대 논술

수학 오후 [해설]

[빠른 정답]

1. 252

2. 0

3. 72

4. (1) $\{u , v\} = \left\{ \dfrac{(6 - t) \pm \sqrt{-3t^2 + 12t + 36}}{2} \right\}$ (2) $26 - 2\sqrt{7}$

Problem 1.

두 학생 서울이와 시립이가 서로 다른 4종류의 김밥 A, B, C, D를 뽑는다고 한다. 이때, 두 학생이 뽑은 김밥의 종류가 하나도 겹치지 않게 서로 5개씩의 김밥을 뽑는 경우의 수를 구하여라. (단, 각 김밥은 충분히 많이 존재한다.)

Solution.

서울이의 기준에서 세자. 서울이는 한 종류에서 최대 3종류까지의 김밥을 택할 수 있음을 이용한다.

(a) 서울이가 한 종류만 택한 경우

그럼 가능한 경우의 수는 4이다. 이때, 남은 3종류의 김밥은 시립이가 독점하며, 고르는 데에 제약은 없으므로 방정식 $x+y+z=5\ (x,\ y,\ z \geq 0)$의 해의 개수를 고려하면 이 경우의 답은 $4 \cdot {}_3\mathrm{H}_5 = 4 \cdot {}_7\mathrm{C}_5 = 84$이다.

(b) 서울이가 두 종류를 택한 경우

그럼 가능한 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{H}_3 = 24$이다. 이때, 남은 3종류의 김밥은 시립이가 독점하며, 고르는 데에 제약은 없으므로 방정식 $x+y=5\ (x,\ y \geq 0)$의 해의 개수를 고려하면 이 경우의 답은 $24 \cdot {}_2\mathrm{H}_5 = 144$가지이다.

(c) 서울이가 세 종류를 택하는 경우

그럼 가능한 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2 = 24$이다. 그럼 시립이의 김밥은 자동결정되므로, 이 경우의 답은 24가지이다.

이상을 모두 합하면, 구하고자 하는 경우의 수는 252가지이다.

■

Problem 2.

함수 $f(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 11 & (x \le -2) \\ \dfrac{5}{2}x - 2\cos\left(\dfrac{\pi x}{3}\right) + 11 & (x \ge -2) \end{cases}$$

이때, $f(x)$의 역함수와 직선 $y = \dfrac{1}{5}x - 1$의 교점의 y 좌표를 각각

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

이라고 둔다. $\left[\sum_{k=1}^{n} y_k\right]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x의 정수부분을 나타낸다.)

Solution.

문제를 $y = x$에 대해 대칭하면, 문제는 함수 $y = f(x)$와 직선 $y = 5(x+1)$의 모든 교점을 구하는 것으로 충분하다.

(a) $x \le -2$인 경우

그럼 $x^3 - 2x + 11 = 5(x+1)$을 해결하면

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = 0$$

이므로 $x = 1, 2, -3$이다. 이들 중 구간에서 함수와의 교점은 $x = -3$이다.

(b) $x > -2$인 경우

이때, 문제는

$$\frac{5}{2}x - 2\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 11 = 5(x+1) \quad (x > -2)$$

인 것으로 충분하다. 정리하면

$$\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 3 - \frac{5}{4}x$$

이므로 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{5}{4}x - 3$이라 두면

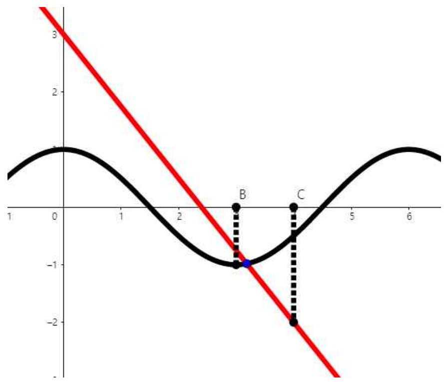
$$f'(x) = -\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{5}{4} > \frac{5}{4} - \frac{\pi}{3} = (1.25) - (1.04\cdots) > 0$$

이므로 주어진 함수는 증가함수이고, 따라서 실근이 존재한다면 유일하다.

한편

$$f(3) = \cos(\pi) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} < 0, \ f(4) = 2 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0$$

이므로 $f(3)f(4) < 0$이고 $f(x)$는 연속함수이므로 사잇값 정리에 따라 $f(c) = 0$인 어떤 실수 $3 < c < 4$가 존재하며, 또한 유일하다.



이상에서 모든 교점의 x 좌표를 나열한 것은 $x_1 = -3, \ x_2 = c$이므로

$$\left[\sum_{k=1}^{n} y_k\right] = [c - 3] = 0$$

이 구하고자 하는 정답이다.

■

Problem 3.

두 자연수 n , k에 대해 조건

(가) $m \leq 2^{3n} \leq m^2$
(나) $2^{9n} = m^3k^2$

을 만족하는 자연수 순서쌍 (k , n)의 순서쌍의 개수를 a_n이라고 둔다.

$$\sum_{n=1}^{p} a_n \leq 2022$$

를 만족하는 자연수 p의 최댓값을 구하여라.

Solution.

조건에 따라, $m = 2^a$, $n = 2^b$ $(a , b \geq 0)$이라 놓을 수 있다. 대입하면,

$$9n = 3a + 2b , \ a \leq 3n \leq 2a$$

를 만족하는 (a , b)의 순서쌍을 구하는 것으로 충분하다. 그럼 b는 항상 3의 배수이므로 $b = 3b_1$이라 놓으면 $3n = a + 2b_1$이다. 이때 b_1이 결정되면 a는 자동결정 됨을 이용하자. $3n - 2b_1 = a$이므로 대입하면

$$3n - 2b_1 \leq 3n \leq 6n - 4b_1$$

이고, 정리하면

$$0 \leq b_1 \leq \frac{3}{4}n \ \cdots \ ①$$

이다. 한편 $0 \leq a = 3n - 2b_1$이므로 $b_1 \leq \dfrac{3}{2}n$이여야 하지만, 이는 ①의 범위에 따라 충족된다. 이상에서 조건을 만족하는 자연수 순서쌍의 개수는

$$a_n = \left[\frac{3}{4}n\right] + 1$$

이다. (단, $[x]$는 x의 정수부분을 나타낸다.) 그럼

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{p}\left(\left[\frac{3}{4}n\right] + 1\right) \leq 2022$$

인 자연수 p의 최댓값을 구하자.

$$\left[\frac{3}{4}(4k-3)\right] + \left[\frac{3}{4}(4k-2)\right] + \left[\frac{3}{4}(4k-1)\right] + \left[\frac{3}{4}(4k)\right] + 4 = 12k - 2$$

임을 이용하여 4개의 항씩 묶어서 더한 값으로 근사하면,

$$\sum_{k=1}^{m}(12k-2) = 6m^2 + 4m$$

이므로 $S_{4m} = 6m^2 + 4m$이다. 그럼 $S_{72} = 2016$이고 $a_{73} = 55$이므로

$$S_{72} < 2022 < S_{73}$$

이다. 이상에서, 구하고자 하는 p의 최댓값은 72이다.

■

Problem 4.

다음 물음에 답하여라.

(1) 방정식 $x^3 - 6x^2 + a = 0$의 한 근이 t일 때, 나머지 두 개의 근을 t를 이용하여 나타내시오. (역자 주 : 임의로 조건을 추가합니다. 1. 주어진 삼차방정식은 세 개의 실근을 갖는다. 2. $0 < a < 32$이다.)

(2) $f(x) = -x^3 + 6x$의 1사분면 부분에서 $f(x)$ 위의 점 A, D와 x축 위의 두 점 B, C는 직사각형을 이룬다고 한다. 직사각형이 최대의 넓이를 취할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하여라.

Solution. (1)

남은 두 근을 u , v라고 놓는다. 그럼 $a = 6t^2 - t^3$이며, 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 따라

$$u + v = 6 - t \ , \ uv = -\frac{a}{t} = t^2 - 6t$$

이므로 근의 공식에 따라

$$\{u \ , \ v\} = \left\{ \frac{(6-t) \pm \sqrt{-3t^2 + 12t + 36}}{2} \right\}$$

이다. (배점이 25점, 100점으로 따지면 약 7점인 문제인데, t가 복소근이거나 0이 될 수 있는 모든 경우를 나누게 시키지 않을 것이라고 판단했습니다.)

■

Solution. (2)

먼저, 두 점 A , D가 공통으로 위치하는 직선을 $y = t$라 놓는다. 그럼 $0 < t < 32$이며 이때 두 점 A , D의 x 좌표를 각각 α , β라고 두자. 일반성을 잃지 않고(WLOG) $\alpha < \beta$라고 놓으면 구하고자 하는 직사각형의 넓이 S는

$$S = (\beta - \alpha)t$$

이다. 한편 남은 한 음근을 $-\gamma \ (0 < \gamma)$라고 놓으면

$$x^3 - 6x^2 + t = (x - \alpha)(x - \beta)(x + \gamma) = 0$$

이 성립하므로 근과 계수와의 관계에 따라

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 6 + \gamma \\ \alpha\beta = \dfrac{t}{\gamma} \end{cases}$$

이며 $t = \gamma^3 + 6\gamma^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned} S &= (\beta - \alpha)t \\ &= \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta}\ t \\ &= (\gamma^3 + 6\gamma^2)\sqrt{(6 + \gamma)^2 - \frac{4t}{\gamma}} \\ &= (\gamma^3 + 6\gamma^2)\sqrt{(6 + \gamma)^2 - 4(\gamma^2 + 6\gamma)} \end{aligned}$$

이다. 한편 γ의 값이 취하는 범위를 구하면, 극대점에 접할 때가 최대이므로

$$x^3 - 6x^2 + 32 = (x-4)^2(x+2) = 0$$

에서 $0 < \gamma < 2$이다. 이상에서, 문제는

$$S(\gamma) = (\gamma^3 + 6\gamma^2)\sqrt{-3\gamma^2 - 12\gamma + 36} \ (0 < \gamma < 2)$$

가 극대의 값을 취하게 되는 γ의 값을 구하는 것으로 충분하다. 미분하여 정리하면

$$S'(\gamma) = -\frac{4\sqrt{3}\,\gamma(\gamma+6)(\gamma^2 + 2\gamma - 6)}{\sqrt{-\gamma^2 - 4\gamma + 12}}$$

이며 구간에서 양수인 부분을 제외하면

$$S'(\gamma) = -(\gamma^2 + 2\gamma - 6) \ (0 < \gamma < 2)$$

과 같다. 따라서, $\gamma = -1 + \sqrt{7}$에서 주어진 식은 극대이며 이때 구하고자 하는 선분 AB의 길이는

$$t = \gamma^3 + 6\gamma^2 = 26 - 2\sqrt{7}$$

이다.

■