제 2 교시

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의 평가 랑데뷰 변형

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

1. 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
2. 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

   햇볕이 유달리 맑은 랑데뷰의 푸른 길을 밟고

3. 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
4. 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
5. 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
6. 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~8쪽, 선택과목 확률과 통계 9~12쪽, 미적분 13~16쪽, 기하 17~20쪽

시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.-6평- 싱크로율99%

송원학원 황보백T

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의 평가-랑데뷰 변형

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $3^{\sqrt{2}} \times 3^{2-\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $5\sqrt{2}$ ② 8 ③ $6\sqrt{2}$ ④ 9 ⑤ $7\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = x^3 + x,\ f(0) = 1$$

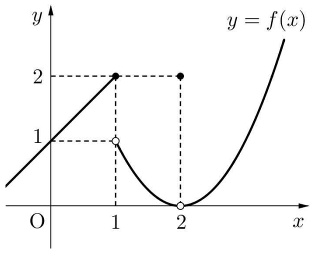
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = -\frac{4}{3}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1-} f(x) + f(2)$ 의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

5. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = -3$ 을 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x^2-3x)f(x)$ 에 대하여 $g'(1)$ 의 값은? [3점]

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

6. 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{2}{3}x^2$과 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_8 = 2(S_4 - S_3)$$

일 때, S_8의 값은? [3점]

① 100 ② 104 ③ 108 ④ 112 ⑤ 116

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<a) \\ x^2+2x-3 & (x \ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\lim_{x \to a-} f'(x)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n-2}{2} & (a_n\text{이 짝수}) \\ 2a_n+2 & (a_n\text{이 홀수}) \end{cases}$$

[랑데뷰N제 쉬사준킬 시리즈]

이고, $a_5=4$일 때, a_1의 값으로 가능한 모든 값의 합은? [4점]

① 118 ② 120 ③ 122 ④ 124 ⑤ 126

10. $n>1$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=n^x,\ y=n^{1-x}-2$$

[랑데뷰N제 킬러극킬 시리즈]

이 만나는 점의 y좌표가 2보다 크고 3보다 작도록 하는 n의 개수는? [4점]

① 15 ② 12 ③ 9 ④ 6 ⑤ 3

11. 단힌 구간 $[0,\,2]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3},\ f(1+x)=f(1-x)$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{8}\int_{n-4}^{n-3} g(x)dx$의 값은? [4점]

[랑데뷰상수 시리즈]

(가) $g(x)=\begin{cases}-f(x+2)+1 & (-2<x<0)\\ f(x) & (0\le x\le 2)\end{cases}$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x+4)$이다.

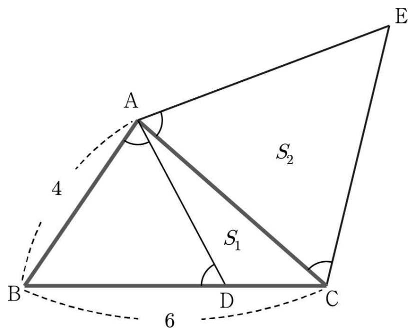
① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

12. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$이고 $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{9}{16}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC위의 점 D와 삼각형 ABC 외부의 점 E에 대하여

$$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{BDA}=\angle \mathrm{EAC}=\angle \mathrm{ACE}$$

[랑데뷰☆수학 모의고사 시즌1]-중간맛(6평 난이도)

일 때, 삼각형 ADC의 넓이를 S_1, 삼각형 EAC의 넓이를 S_2라 하자. S_1+S_2의 값은? [4점]



① $\frac{40}{\sqrt{7}}$　② $\frac{41}{\sqrt{7}}$　③ $\frac{42}{\sqrt{7}}$　④ $\frac{43}{\sqrt{7}}$　⑤ $\frac{44}{\sqrt{7}}$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

[랑데뷰☆수학 모의고사 시즌2]-매운맛(수학황들의 놀이터)

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+1)$를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=2}^{32} 2kf(\log_2 k)$의 값은? [4점]

① 586 ② 587 ③ 588 ④ 589 ⑤ 590

14. 사차함수 $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2-2$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 두 실수 p, q에 대하여

$$xg(x)=|xf(|x|-p)+qx|$$

[랑데뷰☆수학 모의고사 시즌3]-순한맛(1컷 88)

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 역함수가 존재하지 않을 때, 함수 $|g(x)-t|$의 미분가능하지 않은 점의 개수를 $h(t)$라 하자. $\displaystyle\lim_{t\to p+} h(t)+h(q)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{4}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{4}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 8\}$에 속하는 값을 작은거부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\cdots$, $\alpha_n(t)$이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[랑데뷰세미나]-심화개념서

<보 기>

ㄱ. $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\alpha_n(t)-\alpha_1(t)=6$이다.

ㄴ. $\alpha_n(t_1)=\alpha_n(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{5}{4}$이면 $t_1 \times t_2=-\frac{9}{16}$이다.

ㄷ. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\{\alpha_n(t)-\alpha_1(t)\}dt+\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\{\alpha_2(t)-\alpha_{n-1}(t)\}dt=2\sqrt{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. $\log_2 3+\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+a$의 극댓값이 9일 때, 극솟값을 구하시오. [3점]

18. 첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_{10}}{a_7}=8$$

일 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=\frac{1}{4}t^4+at^3 \quad (a\text{는 상수})$$

이다. $t=3$에서 점 P의 속도가 0일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 k이다. $4k$의 값을 구하시오. [3점]

20. 실수 $a\,(a>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(x-t)tf(t)\,dt$$

[어썸&랑데뷰 모의고사]-강남구청 인강교재

가 극값이 존재하지 않을 때, $f(2)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점] 〔랑데뷰 기출과변형 2023 출간예정〕

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n - 81)f(x) = 0$은 절댓값이 같은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근 또는 삼중근이다.
> (나) $f(0)$은 음의 정수이다.

22. 두 사차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 최댓값이 존재하며 x축에 접하고 두 방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2, 1이다.
> (나) 두 방정식 $f(x - f(x)) = 0$, $g(x - g(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 5, 3이고 $x = 1$은 공통근이다.
> (다) $f(1) = g(1) = 4$, $f'(1) = g'(1) = 1$

〔랑데뷰 킬러지침서 2023 출간예정〕

$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x) - f(x)}{x^4} = \frac{3}{32}$일 때, $f(0) + g(0) = \frac{q}{p}$이다. $p + q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ **확인 사항**
○ **답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.**

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x+1)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는? [2점]
[랑데뷰N제 쉬사준킬 시리즈]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

24. 다음 표는 대학생 500 명을 대상으로 '자신의 전공이 적성에 맞는가?' 에 대하여 설문 조사한 것이다.

	적성에 맞는다.	적성에 맞지 않는다.	합계
남학생	200	60	260
여학생	160	80	240
합계	360	140	500

이 설문 조사에 응한 대학생 중에서 임의로 택한 1 명이 '적성에 맞는다.' 라고 대답했을 때, 그 대학생이 남학생일 확률은? [3점] [랑데뷰상수 시리즈]

① $\frac{13}{24}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 작을 확률은? [3점] [랑데뷰세미나]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{11}{25}$ ③ $\frac{12}{25}$ ④ $\frac{13}{25}$ ⑤ $\frac{14}{25}$

26. 모양과 크기가 같은 파란 공 3개, 빨간 공 3개가 있다. 이 중에서 4개의 공을 택하여 모양이 다른 세 개의 통 A, B, C에 넣는 방법의 수는? (단, 같은 색깔의 공은 서로 구별되지 않고, 세 개의 통 A, B, C는 비어 있을 수도 있다.) [3점] [랑데뷰☆수학 모의고사 시즌1]-중간맛 (6평 난이도)

① 96 ② 98 ③ 100 ④ 102 ⑤ 104

27. 주사위 3개와 동전 3개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점] [랑데뷰☆수학 모의고사 시즌2]-매운맛 (수학황들의 놀이터)

① $\frac{1}{144}$ ② $\frac{3}{246}$ ③ $\frac{4}{735}$ ④ $\frac{1}{120}$ ⑤ $\frac{5}{576}$

28. 좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 6의 약수가 나오면 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼, 6의 약수가 아닌 수가 나오면 점 A를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

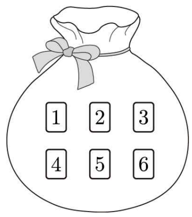
위의 시행을 반복하여 점 A의 x좌표가 처음으로 3이 되면 이 시행을 멈춘다. 이 주사위를 4회 던질 때, 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 주사위를 4회 던진 후 이 시행을 멈추게 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]
[랑데뷰☆수학 모의고사 시즌3]-순한맛 (1컷 88점)

① 380 ② 384 ③ 388 ④ 392 ⑤ 396

단답형

29. A, B, C를 포함한 6명이 같은 간격으로 7개의 좌석이 놓인 원형의 탁자에 둘러앉는다. 이때 A는 B 또는 C와 모두 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보고 두 명 사이에 빈자리가 있을 경우 이웃하지 않는 경우로 본다.) [4점] **[어썸&랑데뷰 모의고사]-강남구청 인강교재**

30. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6개의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 카드를 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 곱이 10으로 나누어 떨어질 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] **[랑데뷰N제 킬러극킬 시리즈]**



※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$ 의 값은? [2점]

[랑데뷰N제 쉬사준킬 시리즈]

① $\sqrt{2}-1$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}+1$　⑤ $\frac{5}{2}$

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x = \ln t, \quad y = \ln\left(t^4+t^2\right)$$

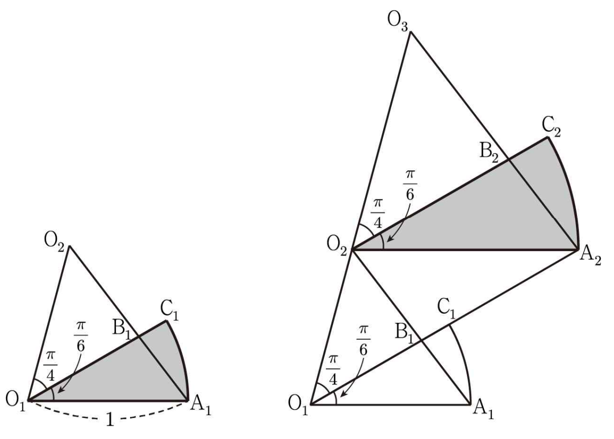
에 대하여 $\lim_{t \to \infty} \frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점] [랑데뷰상수 시리즈]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

25. 좌표평면에서 원점 O를 지나고 곡선 $y=e^{|x|}$에 접하는 두 직선을 l_1, l_2라 하자. 곡선 $y=e^{|x|}$와 두 직선 l_1, l_2로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점] 〔랑데뷰세미나〕

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e ④ $e+1$ ⑤ $2e$

26. 그림과 같이 $\angle \mathrm{O_2O_1A_1} = \frac{5}{12}\pi$, $\overline{\mathrm{O_1O_2}} = \overline{\mathrm{O_1A_1}}$인 이등변삼각형 $\mathrm{O_2O_1A_1}$가 있다. 변 $\mathrm{A_1O_2}$위에 점 $\mathrm{B_1}$을 $\angle \mathrm{A_1O_1B_1} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고 직선 $\mathrm{O_1B_1}$과 중심이 $\mathrm{O_1}$이고 반지름의 길이가 $\mathrm{O_1A_1}$인 원이 만나는 점 중 $\mathrm{A_1}$에 가까운 점을 $\mathrm{C_1}$이라 하자. 이때, 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1C_1}$의 넓이를 S_1이라 하자. 이등변삼각형 $\mathrm{O_2O_1A_1}$에서 점 $\mathrm{O_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{O_1A_1}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{O_1B_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자. 꼭짓점이 $\mathrm{O_2}$이고 중심각의 크기가 $\frac{5}{12}\pi$인 이등변삼각형 $\mathrm{O_2A_2O_3}$을 이등변삼각형 $\mathrm{O_1A_1B_1}$과 겹치지 않도록 그린다. 변 $\mathrm{A_2O_3}$ 위에 점 $\mathrm{B_2}$를 $\angle \mathrm{A_2O_2B_2} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고 직선 $\mathrm{O_2B_2}$과 중심이 $\mathrm{O_2}$이고 반지름의 길이가 $\mathrm{O_2A_2}$인 원이 만나는 점 중 $\mathrm{A_2}$에 가까운 점을 $\mathrm{C_2}$이라 하자. 이때, 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2C_2}$의 넓이를 S_2이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림에서 나타나는 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$의 값은? [3점] 〔랑데뷰☆수학 모의고사 시즌1〕-중간맛 (6평 난이도)



① $\frac{48}{\pi}$ ② $\frac{24}{\pi}$ ③ $\frac{12}{\pi}$ ④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

27. 두 함수

$$f(x)=\frac{e^x}{k},\ g(x)=\cos x$$

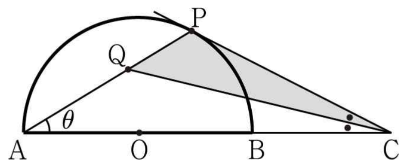
에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 4일 때, 양수 k의 값은? [3점]

[랑데뷰☆수학 모의고사 시즌2]-매운맛 (수학황들의 놀이터)

① $\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{15\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{17\pi}{4}}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 P를 지나고 반원에 접하는 직선이 직선 AB와 만나는 점을 C라 하고, $\angle$PCA의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{OAP}=\theta$일 때, 삼각형 CPQ의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]

[랑데뷰☆수학 모의고사 시즌3]-순한맛 (1컷 88점)



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

단답형

29. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=te^{2x}-\ln(t^2x)$이 $x=k$에서 극값을 가질 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=\ln2$인 실수 α에 대하여 $\ln(4e)\times\alpha^2\times g'(\alpha)=-\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 〔어썸&랑데뷰 모의고사〕-강남구청 인강교재

30. 실수 t에 대하여 $x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$에서 정의된 곡선 $y=e^{\ln(x+\ln x)}+\dfrac{t(e^t+e^{-t})}{\ln x}-(e^t+e^{-t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $\dfrac{f'(\ln2)+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=ae^b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점] 〔랑데뷰N제 킬러극킬 시리즈〕

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 수직일 때, 실수 k의 값은? [2점] **[랑데뷰N제 쉬사준킬 시리즈]**

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ -1

24. 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ -2)$에서의 접선의 y절편은? [3점] **[랑데뷰상수 시리즈]**

① -1 ② $-\frac{13}{4}$ ③ $-\frac{7}{2}$ ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ -4

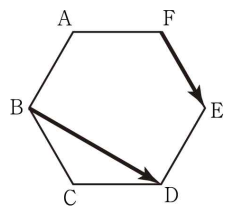
25. 좌표평면 위의 두 점 A$(1,\ -7)$, B$(-4,\ 5)$에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점] [랑데뷰세미나]

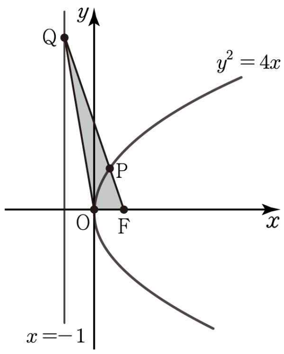
① 81π ② 100π ③ 121π ④ 144π ⑤ 169π

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}+2\overrightarrow{\mathrm{FE}}|$의 값은? [3점] [랑데뷰☆수학 모의고사 시즌1]-중간맛 (6평 난이도)



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ 3 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{13}$

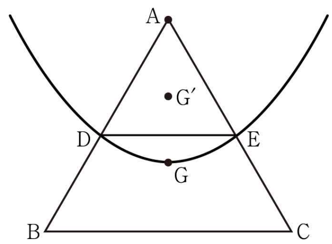
27. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4x$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 포물선의 초점을 F라 할 때, 직선 FP가 포물선의 준선과 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{\text{FP}}:\overline{\text{PQ}}=1:4$일 때, 삼각형 OFQ의 넓이는? (단, 직선 FP의 기울기는 음수이다.) [3점] 〔랑데뷰☆수학 모의고사 시즌2〕-매운맛 (수학황들의 놀이터)

① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{17}$

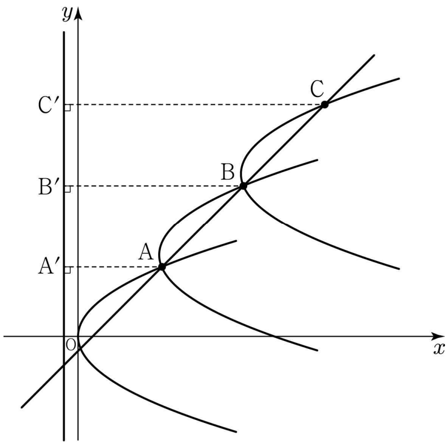
28. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자. 점 G를 꼭짓점으로 하고 점 A를 초점으로 하는 포물선과 변 AB가 만나는 점을 D, 포물선과 변 AC가 만나는 점을 E라 할 때, 삼각형 ADE의 무게중심을 G′라 하자. 선분 G′G의 길이는? [4점] 〔랑데뷰☆수학 모의고사 시즌3〕-순한맛 (1컷 88점)



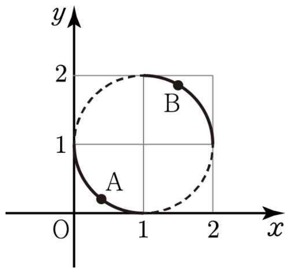
① $10-\frac{14}{3}\sqrt{3}$ ② $10-5\sqrt{3}$ ③ $10-\frac{16}{3}\sqrt{3}$
④ $10-\frac{17}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $10-6\sqrt{3}$

단답형

29. 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=x-1$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=x-1$와 포물선 $(y-a)^2=4(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 또 포물선 $(y-2a)^2=4(x-2a)$가 점 B를 지날 때, 직선 $y=x-1$와 포물선 $(y-2a)^2=4(x-2a)$가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′라 할 때, $\overline{AA'}+\overline{CC'}-\overline{BC}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점] 〔어썸&랑데뷰 모의고사〕-강남구청 인강교재



30. 좌표평면에서 곡선 $C_1:\ y=1+\sqrt{1-(1-x)^2}\,(1\le x\le 2)$과 곡선 $C_2:\ y=1-\sqrt{1-(1-x)^2}\,(0\le x\le 1)$가 있다. 점 A가 곡선 C_1위를 점 B가 곡선 C_2위를 각각 움직일 때 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 를 만족하는 점 X가 나타내는 영역을 D_1, $\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 를 만족하는 점 Y가 나타내는 영역을 D_2라 하자. 영역 D_1에 속하는 점 P, 영역 D_2에 속하는 점 Q 그리고 점 R$(-4,\,4)$에 대하여 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OR}=0$일 때, $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] 〔랑데뷰N제 킬러극킬 시리즈〕



※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 2022학년도 랑데뷰 컨텐츠(파일 판매)
(1) 매주 모의고사 (월4회 연32회)
(2) 일일학습지 (월20회, 연160회)
(3) 수특, 수완 변형
(4) 주요모고 변형
[문의] 카톡 : hbb100

2. 2021년 랑데뷰 출간물 (ALL 오르비 출판)
(1) N제 (1월~5월)
수학I, 수학II, 확률과통계, 미적분, 기하

(2) 상수 (4월, 8월)
고등수학(상), 수학I, 수학II, 고등수학(하)

(3) 봉투모의고사 (7월~9월)
랑데뷰☆수학 모의고사
시즌1
시즌2
시즌3

네이버 검색 : 황보백

랑데뷰 출간 교재 소개
(yes24, 알라딘, 오르비 등에 주문가능)

-랑데뷰세미나- (전국 서점 판매중)
황보백 선생이 그동안 배우고 연구한 고교 입시 수학에 필요한 심화 개념 및 스킬들을 모아 놓은 교재
[고등수학] [수학I] [수학II] [미적분] [확률과통계] [기하]

순으로 현 교육과정에 맞게 정리되어 있다.
장점:고교수학의 대부분의 스킬이 담겨 있다.오르비 편집실에서 깔끔하게 편집해 주셔서 오르비에서 판매되었던 전자책보다 가독성이 좋아졌고 검토진 선생님들의 꼼꼼한 검토로 오타,오류 수정되었으며 보기 불편한 그림은 대부분 수정되어 완성도가 높아졌다.
많은 가르침을 주신 선-후배 강사분들과 특히 수강모 선생님들께 감사함을 전합니다. 입시수학을 연구하는 모든 선생님들께 이 책을 바칩니다.

-랑데뷰N제- 수학I,수학II,확통,미적분,기하

수능 대비 수학 문제집**랑데뷰N제 시리즈**는 다음과 같은 난이도 구분으로 구성됩니다. (괄호안 단어가 교재명)
1단계-쉬운3점 어려운3점(쉬삼어삼) (오르비-전자책)
⇨평가원 기출(6,9,11월)+변형 자작 문항(5:5정도)
2단계-쉬운4점 어려운4점(쉬사준킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
3단계-킬러(킬러극킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
이 판매페이지는 랑데뷰N제중[수학I]과[수학II]의2단계[쉬사준킬], 3단계[킬러극킬]에 관한 내용입니다.
(1)랑데뷰N제 수학I- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 240문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(2)랑데뷰N제 수학I- 킬러극킬
킬러급 난이도100제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.
(3)랑데뷰 N제 수학II- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 200문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(4)랑데뷰 N제 수학II- 킬러극킬
킬러급 난이도110제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.

<그외 출간물>
랑데뷰 상수 시리즈
어썸&랑데뷰 모의고사(강남구청 인강교재)
랑데뷰 모의고사 시즌1,2,3

수학 영역(해설)

랑데뷰－집필진

[강동희 강동희수학교습소 010-7292-1692]
[김권택 더블엠수학학원 010-9895-5754
[김 수 오라클수학교습소 010-5273-7632]
[김은수 샤인수학학원 010-5687-5722]
[김종렬 광릉한샘기숙학원 010-3619-7963]
[김효경 수학의 정원 010-6369-6416]
[박광식 프라하 수학학원 010-3257-5452]
[박용진 샤인수학학원 010-6512-7443]
[배용제 L&K한울학원 010-2626-2280]
[서영만 만 수학교습소 010-9244-0910]
[서태욱 태강학원 010-3022-6918
답길학원 010-3022-6918]
[오세준 오엠수학교습소 010-8858-9561]
[오은경 오은경수학 010-4534-5129]
[우성근 우성근수학 010-3040-0005]
[유승희 오름학원 010-5298-1393]
[이재호 이재호수학학원 010-4527-1703]
[이정배 김이김학원 010-9866-2508
멘토수학 010-9866-2508]
[이지웅 감수학 010-9834-0904]
[이지훈 SY영수학원 010-8598-5284]
[이태형 가토수학과학학원 gatoms@kakao.com]
[이현일 샤인수학학원 010-2681-9501]
[임성일 다사아인수학 010-2048-2402]
[장선정 오름수학 010-4894-1764]
[장세완 장선생수학학원 010-2568-0049]
[장정보 장정보수학교습소 010-9504-5938]
[전희종 범어수학 010-9721-9797]
[정일권 이미지매쓰학원 010-2739-6021]
[조필재 샤인수학학원 053-754-3121]
[조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
[최병길 광주과학고등학교 010-4591-0583]
[최성훈 최성훈수학교습소 010-2680-5281]
[최수영 수학만영어도학원 053-856-1158,
필즈수학학원 054-771-4301]
[최재영 셰르파수학교습소 010-2577-4221]
[최현정 MQ멘토수학 010-2655-9279]
[최혜권 수학의 궤도진입 010-3869-9602]
[한정아 한정아수학교습소 010-7220-6368]
[홍지석 홍수학 학원 010-7136-5713]
[황수영 JS수학연구소 010-6780-8242]

2022학년도 수학영역 랑데뷰 6평변형 빠른답

공통과목

1	④	2	①	3	⑤	4	⑤	5	⑤
6	③	7	③	8	④	9	②	10	④
11	④	12	①	13	④	14	②	15	③
16	2	17	8	18	48	19	27	20	3
21	6	22	221						

확률과 통계

23	④	24	④	25	③	26	①	27	⑤
28	②	29	336	30	317				

미적분

23	①	24	③	25	①	26	②	27	④
28	⑤	29	9	30	4				

기하

23	①	24	⑤	25	①	26	⑤	27	③
28	③	29	288	30	64				

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

2022학년도 수학영역 랑데뷰 6평변형-풀이

해설지 받는 방법

① 급하지 않을 때는 문제지 있는 게시판에 해설지 받을 메일주소를 남긴다. (3~4일 간격으로 확인 후 메일로 전송)
② 급할 때는 카톡 : hbb100 으로 연락한다. 확인 후 바로 카톡으로 전송)
③ 송원학원 학생들은 황보샘께 받으러 간다.

공통과목

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

1) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원]

$3^{\sqrt{2}} \times 3^{2-\sqrt{2}} = 3^2 = 9$

2) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]

$f(x) = \int (x^3 + x)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

$f(0) = 1$에서 $C = 1$이므로

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$이다.

$f(2) = 4 + 2 + 1 = 7$

3) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{4}{3}$에서

$\sin\theta = -\frac{4}{3}\cos\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2\theta + \frac{16}{9}\cos^2\theta = \frac{25}{9}\cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로 $\cos\theta < 0$

따라서 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta = -\frac{3}{5}$

4) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]

$\lim_{x \to 1-} f(x) + f(2) = 2 + 2 = 4$

5) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]

$x \to 1$ 일 때, (분모) $\to 0$ 이므로 (분자) $\to 0$ 이어야 한다. 즉, $\lim_{x \to 1}\{f(x) - 2\} = f(1) - 2 = 0$ 이므로

$f(1) = 2$이다.

$\therefore \lim_{x \to 1}\frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 3$

$g(x) = (x^2 - 3x)f(x)$ 에서 양변을 미분하면

$g'(x) = (2x - 3)f(x) + (x^2 - 3x)f'(x)$

$\therefore g'(1) = (-1) \times f(1) + (-2) \times f'(1) = -2 + 6 = 4$

6) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원]

구하는 도형의 넓이는

$\int_0^3 \left(x^2 - \frac{2}{3}x^2\right)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{9}x^3\right]_0^3 = 3$

7) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원]

$a_8 = 2(S_4 - S_3) = 2a_4$

$3 + 7d = 2(3 + 3d)$

$3 + 7d = 6 + 6d$

$\therefore d = 3$

$S_8 = \frac{8(2 \times 3 + 7 \times 3)}{2} = 108$

8) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x = a$에서도 연속이다.

$\lim_{x \to a-} f(x) = a^2 + a$

$\lim_{x \to a+} f(x) = a^2 + 2a - 3$

$f(a) = a^2 + 2a - 3$에서

$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$이어야 하므로

$a^2 + a = a^2 + 2a - 3 \qquad \therefore a = 3$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 3) \\ x^2 + 2x - 3 & (x \geq 3) \end{cases}$ 이므로

$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (x < 3) \\ 2x + 2 & (x > 3) \end{cases}$

$\lim_{x \to a-} f'(x) = \lim_{x \to 3-}(2x + 1) = 7$

9) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원]

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr>
<tr><td>94</td><td rowspan="2">46</td><td rowspan="3">22</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">4</td></tr>
<tr><td>22(X)</td></tr>
<tr><td></td><td>10(X)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>4 (X)</td><td></td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="6">1</td></tr>
<tr><td>4 (X)</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{2}$(X)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2">2 (X)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

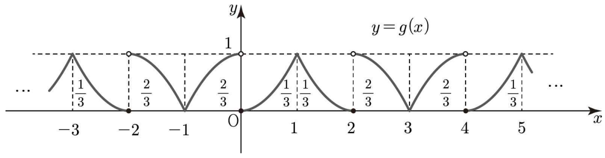
따라서 a_1으로 가능한 모든 값의 합은 $4+22+94=120$이다.

10) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원]

$y=n^x$은 지수함수이고 $n>1$이므로 증가함수이다.
$y=n^{1-x}-2$은 지수함수로 $n>1$이므로 감소함수이다.
두 함수 모두 역함수가 존재한다.
두 함수 $y=n^x$, $y=n^{1-x}-2$이 만나는 점의 y좌표가 2보다 크고 3보다 작으므로 두 함수의 역함수의 교점의 x좌표가 2보다 크고 3보다 작다.
따라서 $y=\log_n x$, $y=-\log_n(x+2)+1$의 교점의 x좌표가 2보다 크고 3보다 작다.
그러므로 방정식 $\log_n x=-\log_n(x+2)+1$의 해가 2보다 크고 3보다 작다.
$\log_n x+\log_n(x+2)-1=0$
$\log_n\dfrac{x(x+2)}{n}=0$
$f(x)=\log_n\dfrac{x(x+2)}{n}$라 할 때, 함수 $f(x)$가 증가함수이므로 $f(2)<0$, $f(3)>0$이다.
$\log_n 1=0$이므로 $\dfrac{2(2+2)}{n}<1$이고 $1<\dfrac{3(3+2)}{n}$이다.
$8<n<15$
따라서 가능한 자연수 n의 개수는 6이다.

11) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 최성훈T]

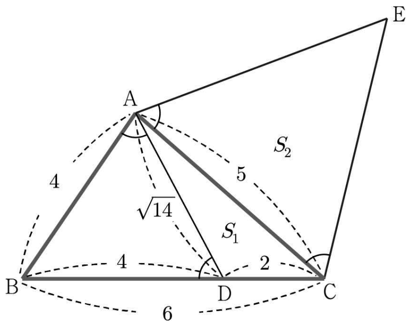
$f(1+x)=f(1-x)$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에 대칭이다.
$f(0)=f(2)=0$이고 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$이다.
$-2<x<0$에서 함수 $g(x)$는 $0<x<2$의 함수 $f(x)$을 x축으로 방향으로 -2만큼 평행이동 한 뒤 x축 대칭이동한 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
또한 (나)조건에서 $g(x)$는 주기가 4인 그래프이므로 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$\displaystyle\sum_{n=1}^{8}\int_{n-4}^{n-3}g(x)dx$
$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$
$=4$

12) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 최성훈T]

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{9}{16}$에서 $\sin(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$이므로
삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{5\sqrt{7}}{16}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}\cdots$㉠
$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BDA}$이므로 삼각형 ABD는 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BD}}=4$인 이등변삼각형이다.
한편 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=4:2=2:1$이므로 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이비는 $2:1$이다.



따라서 ㉠에서 $S_1=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$
삼각형 ABD에서 $\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{9}{16}$이므로 코사인법칙을 적용하면
$\overline{\mathrm{AD}}^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\dfrac{9}{16}$
$\quad=16+16-18=14$
$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{14}$
또한 삼각형 ABC에서 $\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{9}{16}$이므로 코사인법칙을 적용하면
$\overline{\mathrm{AC}}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\dfrac{9}{16}$
$\quad=16+36-27=25$
$\overline{\mathrm{AC}}=5$
삼각형 BDA와 삼각형 EAC는 닮은 도형이고 닮음비는 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{14}:5$이다.

따라서 삼각형 BDA와 삼각형 EAC의 넓이비는 14 : 25이다.

㉠에서 삼각형 BDA의 넓이는 $\frac{15\sqrt{7}}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$

따라서 $S_2=\frac{5\sqrt{7}}{2}\times\frac{25}{14}=\frac{125\sqrt{7}}{28}$

$$\begin{aligned} S_1+S_2&=\frac{5\sqrt{7}}{4}+\frac{125\sqrt{7}}{28}\\ &=\frac{35\sqrt{7}+125\sqrt{7}}{28}\\ &=\frac{40\sqrt{7}}{7}=\frac{40}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

13) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원]

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ (0<x<1)\\ 1\ \ (x=1)\end{cases}$, $f(x)=f(x+1)$

에서 f(정수)$=1$, f(정수가 아닌수)$=\frac{1}{2}$이다.

$k=2$일 때, $f(\log_2 2)=f(1)=1$

$k=2^2=4$, $f(\log_2 4)=f(2)=1$

$k=2^3=8$, $f(\log_2 8)=f(3)=1$

$k=2^4=16$, $f(\log_2 16)=f(4)=1$

$k=2^5=32$, $f(\log_2 32)=f(5)=1$

따라서 $k\in\{2, 4, 8, 16, 32\}$일 때, $2kf(\log_2 k)=2k$이다.

k가 2^n꼴이 아닌 수 일 때는 $f(\log_2 k)=\frac{1}{2}$이므로 $2kf(\log_2 k)=k$이다.

그러므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{32}2kf(\log_2 k)\\ &=\sum_{k=2}^{32}k+(2+4+8+16+32)\\ &=\frac{32\times 33}{2}-1+62\\ &=528+61\\ &=589 \end{aligned}$$

14) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 이정배T]

$xg(x)=|xf(|x|-p)+qx|$에서 $xg(x)=|x||f(|x|-p)+q|$이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x||f(|x|-p)+q|}{x} & (x\neq 0)\\ g(0) & (x=0)\end{cases}$

실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가 미분가능이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$는 연속이다. 따라서

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}|f(x-p)+q|=|f(-p)+q|$,

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}-|f(-x-p)+q|=-|f(-p)+q|$이므로

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)$에서

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

$|f(-p)+q|=0$

$f(-p)+q=0$

$\therefore\ f(-p)=-q$

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)=0$이므로

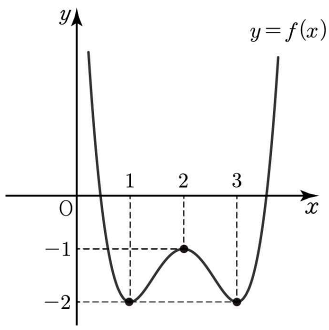
$g(0)=0$이다.

그러므로

$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x\geq 0)\\ -|f(-x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$ 이다.

따라서 $g(-x)=-g(x)$이 성립한다. 즉, 함수 $g(x)$는 원점대칭이므로 그래프는 $x\geq 0$인 부분을 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 원점 대칭이동한 그래프이다.

사차함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

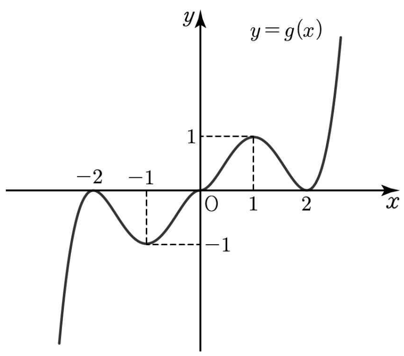


함수 $g(x)$가 원점을 지나고 $x\geq 0$에서 $|f(x-p)+q|$가 미분가능하기 위해서는

$p=-1$, $q=2$ 또는 $p=-3$, $q=2$이어야 한다.

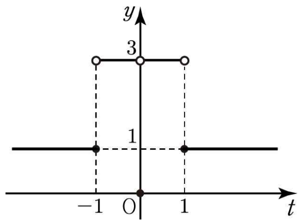
$p=-3$, $q=2$인 경우는 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 역함수가 존재하게 된다, 따라서 $p=-1$, $q=2$뿐이다.

$p=-1$, $q=2$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=g(x)$와 $y=t$의 교점의 x좌표를 a라 할 때, $g'(a)\neq 0$인 $x=a$에서 미분 가능하지 않으므로 t값에 따른 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases}1 & (x \le -1)\\ 3 & (-1<x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 3 & (0<x<1)\\ 1 & (x \ge 1)\end{cases}$$

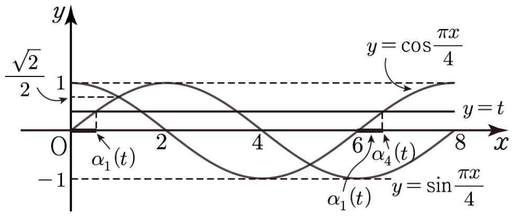


그러므로

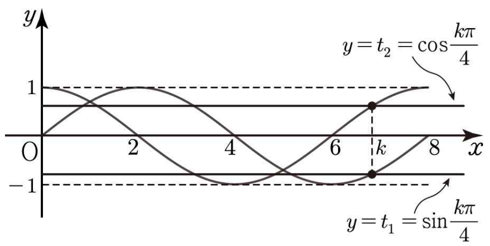
$$\lim_{t\to p+} h(t)+h(q)=\lim_{t\to -1+} h(t)+h(2)=3+1=4$$

15) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 이정배T]

ㄱ. 그림과 같이 $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $y=t$는 $y=\sin\frac{\pi x}{4}$, $y=\cos\frac{\pi x}{4}$와 각각 2개의 교점을 갖는다. 따라서 $n=4$이므로 $\alpha_n(t)=\alpha_4(t)=6+\alpha_1(t)$에서 $\alpha_n(t)-\alpha_1(t)=6$ (ㄱ. 참)



ㄴ. $\alpha_n(t_1)=\alpha_n(t_2)=k$라 하면, $t_2>t_1$이므로 t_1과 t_2는 $t_1=\sin\frac{k\pi}{4}$, $t_2=\cos\frac{k\pi}{4}$이다.



$t_2-t_1=\cos\frac{k\pi}{4}-\sin\frac{k\pi}{4}=\frac{5}{4}$이고, 양변을 제곱하면

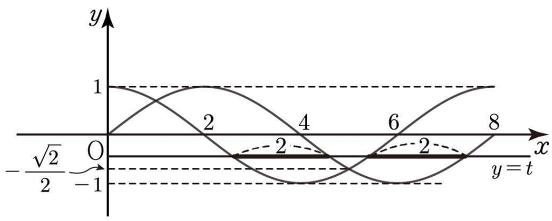
$$\left\{\cos\frac{k\pi}{4}\right\}^2-2\cos\frac{k\pi}{4}\sin\frac{k\pi}{4}+\left\{\sin\frac{k\pi}{4}\right\}^2=\frac{25}{16}$$

$$-2\cos\frac{k\pi}{4}\sin\frac{k\pi}{4}=\frac{9}{16}$$

$$\cos\frac{k\pi}{4}\sin\frac{k\pi}{4}=-\frac{9}{32}=t_2\times t_1$$

$\therefore\ t_1\times t_2=-\frac{9}{32}$이다. (거짓)

ㄷ. 그림과 같이 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 0$일 때, $y=t$는 $y=\sin\frac{\pi x}{4}$, $y=\cos\frac{\pi x}{4}$와 각각 2개의 교점을 갖는다. $n=4$이다.



$\alpha_2(t)-\alpha_1(t)=2$, $\alpha_n(t)-\alpha_{n-1}(t)=\alpha_4(t)-\alpha_3(t)=2$이므로

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\{\alpha_n(t)-\alpha_1(t)\}dt+\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\{\alpha_2(t)-\alpha_{n-1}(t)\}dt$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\{\alpha_n(t)-\alpha_{n-1}(t)\}+\{\alpha_2(t)-\alpha_1(t)\}dt$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}4\,dt$$

$$=\Big[\ 4t\ \Big]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}$$

$=2\sqrt{2}$ (ㄷ. 참)

16) 정답 2
[출제자 : 황보백 송원학원]

$$\log_2 3+\log_2\left(\frac{4}{3}\right)=\log_2 4=2$$

17) 정답 8
[출제자 : 황보백 송원학원]

$f(x)=2x^3-3x^2+a$에서
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$의 해는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=1$에서 극소이다.
이때, 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로
$f(0)=a=9$
따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+9$에서
극솟값 $f(1)=8$이다.

18) 정답 48
[출제자 : 황보백 송원학원]

등비수열 a_n의 공비를 r라 하면

$\frac{a_{10}}{a_7}=r^3$이므로

$r^3=8$, $r=2$

따라서

$a_5 = a_1 r^4 = 3\times16 = 48$

19) 정답 27

[출제자 : 황보백 송원학원]

시각 t에서의 점 P의 속도

$v(t)$는 $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = t^3 + 3at^2$

$v(3) = 27 + 27a = 0$에서

$a = -1$이므로 $v(t) = t^3 - 3t^2$

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s = \displaystyle\int_0^3 \left|t^3 - 3t^2\right| dt$

$= \displaystyle\int_0^3 (3t^2 - t^3) dt = \left[t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^3$

$= 27 - \dfrac{81}{4} = \dfrac{27}{4}$

따라서 $k = \dfrac{27}{4}$이므로 $4k = 27$

20) 정답 3

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 최성훈T]

$g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (x-t)tf(t)\,dt$은

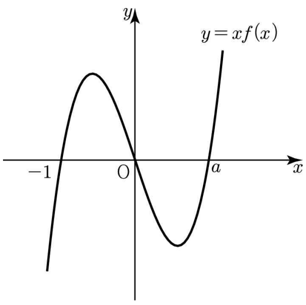
$g(x) = x\displaystyle\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt - \int_{-1}^{x} t^2 f(t)\,dt$이고

양변 미분하면

$g'(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt + x^2 f(x) - x^2 f(x)$

$\quad = \displaystyle\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt$

함수 $y = xf(x) = (x+1)x(x-a)$ $(a>0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

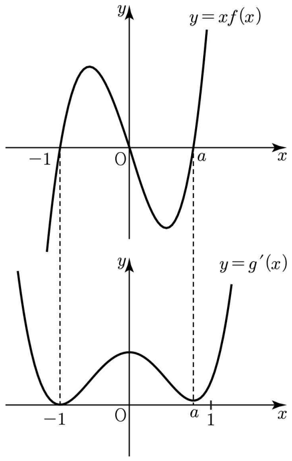


$a=1$일 때, 함수 $y=(x+1)x(x-1)$의 그래프는 $(0,0)$에 대칭이므로

$\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$이다.

따라서 함수 $g(x)$가 극값이 존재하지 않기 위해서는 $g'(x) \geq 0$이어야 하므로

$0 < a \leq 1$이다.



그러므로

$f(2) = 3(2-a) = 6-3a$이므로

$3 \leq f(2) < 6$이다.

따라서 $f(2)$의 최솟값은 3이다.

21) 정답 6

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 이정배T]

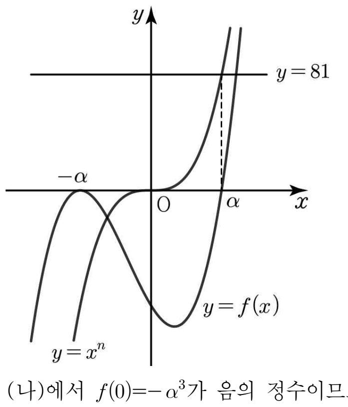
$x^n - 81 = 0$의 실근은 $y=x^n$과 $y=81$의 교점의 x좌표이다.

따라서 조건을 만족하는 경우는 n의 값이 홀수, 짝수에 따라 $y=x^n$과, $y=81$, $y=f(x)$는 다음과 같다.

(i) n이 홀수일 때,

$\alpha^n = 81$을 만족하는 α에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)$의 값이 음수이고 α, $-\alpha$만을 근으로 갖기 위해서는 $f(x) = (x+\alpha)^2(x-\alpha)$이다.

따라서 다음 그림과 같다.



(나)에서 $f(0) = -\alpha^3$가 음의 정수이므로 α^3은 자연수이다.

$\alpha^n = 81 = 3^4$

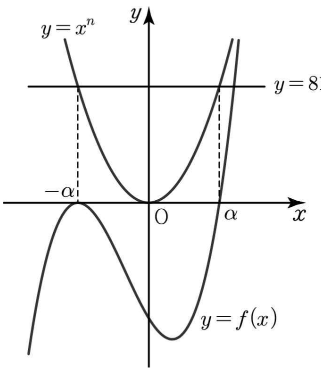
$\alpha = 3^{\frac{4}{n}}$

$\alpha^3 = 3^{\frac{12}{n}}$

$3^{\frac{12}{n}}$이 자연수가 되기 위해서는 n은 12의 약수이고 n이 홀수이므

로 n은 1,3이다.

(ii) n이 짝수일 때,
$\alpha^n=81$을 만족하는 α에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)$의 값이 음수이고 α, $-\alpha$만을 근으로 갖기 위해서는 $f(x)=(x+\alpha)^2(x-\alpha)$이다.
따라서 다음 그림과 같다.



(나)에서 $f(0)=-\alpha^3$가 음의 정수이므로 α^3은 자연수이다.

$\alpha^n=81=3^4$

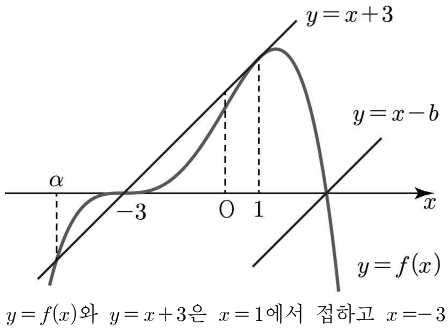
$\alpha=3^{\frac{4}{n}}$

$\alpha^3=3^{\frac{12}{n}}$

$3^{\frac{12}{n}}$이 자연수가 되기 위해서는 n은 12의 약수이고 n이 짝수이므로 n은 2,4 6, 12이다.
(i), (ii)에서 n은 12의 약수이다.
따라서 n의 개수는 6이다.

22) 정답 221
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 최성훈T]

사차함수 $f(x)$가 최댓값이 존재하므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.
(가) 조건에 의해 두 근을 a, b $(a<b)$라 하면 하나의 근에서 삼중근을 갖는다.
(나) 조건에 의해 $x-f(x)=a$, $x-f(x)=b$
즉, $f(x)=x-a$, $f(x)=x-b$의 서로 다른 실근의 개수가 5이고, (다)조건에서 $f(1)=4$, $f'(1)=1$이고 x축에 접하므로 함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음 그림과 같다.



$y=f(x)$와 $y=x+3$은 $x=1$에서 접하고 $x=-3$, $x=1$이 아닌 교점의 x좌표를 α라 하면 $\alpha<-3$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k $(k<0)$라 두면
$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2(x-\alpha)$ $(\alpha<-3)$ 이다.
$f(x)=k(x+3)(x-1)^2(x-\alpha)+x+3$
$\quad=(x+3)\{k(x-1)^2(x-\alpha)+1\}$
에서 $h(x)=k(x-1)^2(x-\alpha)+1$이라 두면 사차방정식 $f(x)=0$이 $x=-3$이 삼중근이므로
$h(-3)=0$, $h'(-3)=0$이어야 한다.
따라서 $h(-3)=16k(-3-\alpha)+1=0$에서 $16k(3+\alpha)=1\cdots㉠$
$h'(x)=2k(x-1)(x-\alpha)+k(x-1)^2$에서
$h'(-3)=8k(3+\alpha)+16k=0\cdots㉡$
㉠, ㉡에서

$k(3+\alpha)=\frac{1}{16}$이므로 $\frac{1}{2}+16k=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{32}$

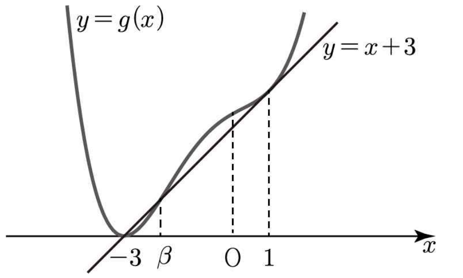
$16\times\left(-\frac{1}{32}\right)(3+\alpha)=1$

$3+\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=-5$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{32}(x+3)(x-1)^2(x+5)+x+3$

한편, (가)조건에서 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이고 (나)조건에서 방정식 $g(x-g(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 극솟값이 0인 그래프이다.
방정식 $g(x)$의 근을 c라 두면 (나) 조건에 의해 $x-g(x)=c$
즉, $g(x)=x-c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이고, (나)조건에서 $g(1)=4$, $g'(1)=1$이고 $x=1$이 근이므로 함수 $g(x)$의 그래프 개형은 다음 그림과 같다.



$y=g(x)$와 $y=x+3$은 $x=1$에서 접하고 $x=-3$, $x=1$이 아닌 교점의 x좌표를 β라 하고 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수를 m $(m>0)$라 두면
$g(x)-(x+3)=m(x+3)(x-1)^2(x-\beta)$ $\cdots㉠$
또한,

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)-f(x)}{x^4}=\frac{3}{32}$에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{32}$이므로

$m-\left(-\frac{1}{32}\right)=\frac{3}{32}$이다.

$\therefore\ m=\frac{1}{16}$

즉, $g(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{16}$이다.

$g(x)=\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2(x-\beta)+x+3$

$=(x+3)\left\{\frac{1}{16}(x-1)^2(x-\beta)+1\right\}$

에서 $k(x)=\frac{1}{16}(x-1)^2(x-\beta)+1$이라 사차방정식 $g(x)=0$이 $x=-3$이 중근이므로 $k(-3)=0$을 만족한다.

$k(-3)=-3-\beta+1=0$

$\therefore\ \beta=-2$

$g(x)=\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2(x+2)+x+3$

그러므로

$f(x)=-\frac{1}{32}(x+3)(x-1)^2(x+5)+x+3$ 에서 $f(0)=-\frac{15}{32}+3=\frac{81}{32}$

$g(x)=\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2(x+2)+x+3$에서 $g(0)=\frac{3}{8}+3=\frac{27}{8}$

$f(0)+g(0)=\frac{81}{32}+\frac{108}{32}=\frac{189}{32}$

$p=32,\ q=189$

$p+q=221$

[랑데뷰팁]-우성근T

㉠에서 m의 값에 따라 β가 1보다 클 수도 있고 작을 수도 있다. 즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)-f(x)}{x^4}=\frac{3}{32}$에서 m이 결정되므로 β의 범위를 따로 생각하지 않아도 된다.

미적분

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

23) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원]

$(x+1)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r x^r$이므로 $r=2$일 때이다.

즉, ${}_5\mathrm{C}_2=10$

24) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원]

임의로 택한 1명이 '적성에 맞는다.'라고 대답할 사건을 A, 남학생일 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{200}{360}=\frac{5}{9}$

25) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원]

전체 경우의 수는 $5^4=625$이고, 첫 자리의 수가 1 또는 2인 경우 각각 5^3가지가 해당하고, 첫 두 자리의 수가 3, 1 또는 3, 2 또는 3, 4인 경우 5^2가지도 해당한다. 따라서 구하는 확률은

$\frac{2\times5^3+3\times5^2}{5^4}=\frac{13}{25}$이다.

26) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원]

세 개의 통 A, B, C에 넣은 파란 공의 개수를 각각 x, y, z, 빨간 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

(i) 파란 공 3개와 빨간 공 1개를 택하는 경우

$x+y+z=3$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=1$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3\times{}_3\mathrm{H}_1={}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1=10\times3=30$

(ii) 파란 공 1개와 빨간 공 3개를 택하는 경우

$x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=3$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로

${}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3=3\times10=30$

(iii) 파란 공 2개와 빨간 공 2개를 택하는 경우

$x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=2$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=6\times6=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$30+30+36=96$

27) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원]

주사위 3개와 동전 3개를 던져서 나오는 경우의 수는 $6^3\times2^3$

나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같은 경우는 동전의 앞면의 개수로 경우를 나누어 생각하면 된다.

(i) 앞면이 나오는 동전이 1개인 경우

앞면이 나오는 동전이 1개인 경우는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$가지

주사위 눈의 수의 곱이 1인 경우는 (1, 1, 1)의 1가지

$\therefore\ 3\times1=3$

(ii) 앞면이 나오는 동전이 2개인 경우

앞면이 나오는 동전이 2개인 경우는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$가지

주사위 눈의 수의 곱이 2인 경우는 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지

$\therefore\ 3\times3=9$

(iii) 앞면이 나오는 동전이 3개인 경우

앞면이 나오는 동전이 2개인 경우는 1가지

주사위 눈의 수의 곱이 2인 경우는 (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)의 3가지

$\therefore\ 1\times3=3$

(i) ~ (iv)로부터 구하는 확률은

$\frac{3+9+3}{6^3\times2^3}=\frac{15}{6^3\times2^3}=\frac{5}{576}$

28) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원]

주사위를 4회 던질 때 까지 6의 약수가 3번, 6의 약수가 아닌 수가 1번 나오는 경우에서 4회째 6의 약수가 아닌 수가 나오는 경우의 수를 제외하면 된다.
6의 약수가 나온 사건을 A, 6의 약수가 아닌 수가 나온 사건을 B라 할 때,
$n(A)=4$, $n(B)=2$이다.
4회까지 A가 3번, B가 1번 나오는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$
4회째 B가 나오는 경우의 수 1가지
따라서
$(4-1)\times 4^3\times 2=3\times 64\times 2=384$

29) 정답 336
[출제자 : 황보백 송원학원]

남는 빈자리에 6명 외에 다른 한 명이 앉는다 생각하고 7명이 7개의 좌석에 앉는다고 생각하자. A를 제외한 6명을 앉히고 조건에 맞게 A를 앉히면 되겠다.
(i) B, C가 이웃한 경우
(B, C)와 나머지 4명을 앉힌다. ⇒ 4!(원순열 적용)
B, C가 자리를 교체한다. ⇒ 2!
A가 앉을 수 있는 공간은 나머지 4명 사이 3곳이다.
따라서 $4!\times 2!\times 3=144$
(ii) B, C사이에 1명이 앉는 경우
(B, X, C)와 나머지 3명을 앉힌다. ⇒ 3! (원순열 적용)
X자리에 들어갈 사람을 결정한다. ⇒ 4
B, C가 자리를 교체한다. ⇒ 2!
A가 앉을 수 있는 공간은 나머지 3명 사이 2곳이다.
따라서 $3!\times 4\times 2!\times 2=96$
(iii) B, C사이에 2명이 앉는 경우
(B, X, Y, C)와 나머지 2명을 앉힌다. ⇒ 2! (원순열 적용)
X, Y자리에 들어갈 사람을 결정한다. ⇒ ${}_4P_2=12$
B, C가 자리를 교체한다. ⇒ 2!
A가 앉을 수 있는 공간은 나머지 2명 사이 1곳과 X, Y사이 공간 1곳이다.⇒2
따라서 $2!\times 12\times 2!\times 2=96$
(iv) B, C사이에 3명이 앉는 경우⇒(i)과 같은 경우이다.
(i), (ii), (iii), (iv) 에서 $144+96+96=336$

30) 정답 317
[출제자 : 황보백 송원학원]

4번 시행을 통해 4개의 카드를 꺼내어 확인하는 경우의 수는 ${}_6\Pi_4=6^4$
4개의 수의 곱이 10의 배수가 되기 위해서는 4개의 수에 적어도 짝수 하나와 5가 각각 하나씩 포함되어야 한다.
여사건의 확률을 이용하자.
(i) 뽑은 수에 짝수가 포함되지 않는 경우 ⇒ ${}_3\Pi_4=81$
(ii) 뽑은 수에 5가 포함되지 않는 경우 ⇒ ${}_5\Pi_4=5^4=625$
(iii) 뽑은 수에 짝수와 5가 포함되지 않는 경우 ⇒ ${}_2\Pi_4=16$
$\frac{q}{p}=1-\frac{81+625-16}{6^4}=1-\frac{690}{6^4}=1-\frac{115}{216}=\frac{101}{216}$
$p=216$, $q=101$
$p+q=317$

미적분
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

23) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

24) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원]

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4t^3+2t}{t^4+t^2}=\frac{4t^2+2}{t^3+t}$ 이므로
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^2+2}{t^2+1}$$
따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+2}{t^2+1}=4$

25) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]

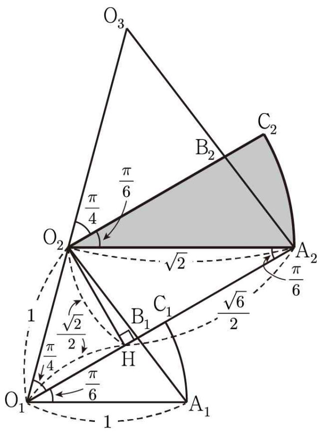
$y=e^x$를 미분하면 $y'=e^x$이므로 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은 $y=e^t(x-t)+e^t$이다. 이 식에 $(0,\ 0)$을 대입하여 정리하면 $t=1$이다. 따라서 $y=ex$이고 주어진 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $2\int_0^1(e^x-ex)dx$의 값을 구하면 된다.
$$2\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=2\left(\frac{e}{2}-1\right)=e-2$$

26) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 이정배T]

부채꼴 $O_1A_1C_1$은 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$이다.

그림과 같이 O_2에서 직선 O_1B_1에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 O_1HO_2은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{O_1O_2}=1$이므로 $\overline{O_1H}=\overline{O_2H}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 또한 삼각형 O_2HA_2는 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로 $\overline{O_2H}:\overline{O_2A_2}=1:2$에서 $\overline{O_2A_2}=\sqrt{2}$이다.



따라서 닮음비가 $\overline{O_1A_1}:\overline{O_2A_2}=1:\sqrt{2}$이므로 넓이비는 $1:2$이다.

수열 S_n은 첫째항이 $S_1=\frac{\pi}{12}$이고 공비가 2인 등비수열이다.

그러므로 구하려는 $\frac{1}{S_n}$은 첫째항이 $\frac{12}{\pi}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\frac{\frac{12}{\pi}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{24}{\pi}$$

27) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 이현일T]

$$\frac{e^x}{k}=\cos x$$

$$\frac{1}{k}=\frac{\cos x}{e^x}$$

따라서 $x>0$에서 $y=\frac{\cos x}{e^x}$와 $y=\frac{1}{k}$의 교점의 개수가 4가 되도록 하면 된다.

교점의 개수가 4가 되려면 $y=\frac{\cos x}{e^x}$의 그래프의 $x>0$에서 4번째 극값, 즉 2번째 극댓값이 $\frac{1}{k}$이면 된다.

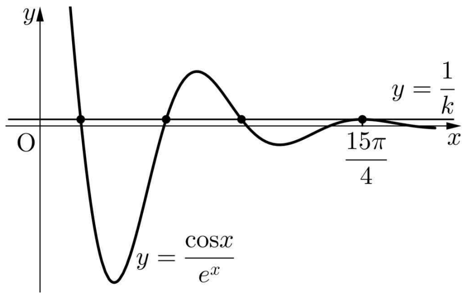
$h(x)=\frac{\cos x}{e^x}$라 할 때,

$h'(x)=\frac{-\sin x-\cos x}{e^x}$

$h'(x)=0$의 해는 $-\sin x-\cos x=0$에서 $\tan x=-1$을 만족하는 x값들이다.

따라서 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{7}{4}\pi$, $x=\frac{11}{4}\pi$, $x=\frac{15}{4}\pi$, $\cdots$

그러므로 $x=\frac{15}{4}\pi$일 때, $x>0$에서 두 번째 극댓값을 갖는다.



따라서 $f\left(\frac{15}{4}\pi\right)=\frac{1}{k}$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{15}{4}\pi}}=\frac{1}{k}$$

$$\therefore\ k=\sqrt{2}e^{\frac{15}{4}\pi}$$

28) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 최성훈T]

점 P가 접점이므로 $\angle OPC=\frac{\pi}{2}$이다.

$\angle OAP=\angle OPA=\theta$이므로 $\angle POC=2\theta$이다.

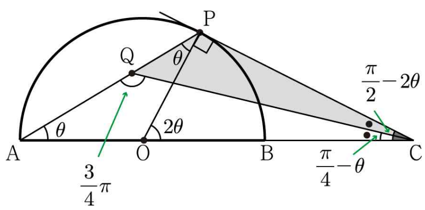
직각삼각형 OPC에서 $\overline{OP}=1$, $\angle POC=2\theta$이므로

$\overline{PC}=\tan 2\theta$, $\overline{OC}=\sec 2\theta\cdots$㉠

$\overline{PAC}=\theta$, $\angle APC=\frac{\pi}{2}+\theta$이므로 $\angle PCA=\frac{\pi}{2}-2\theta$이다.

따라서 $\angle QCA=\frac{\pi}{4}-\theta$

삼각형 QAC에서 $\angle AQC=\frac{3}{4}\pi$이다.



$\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}=1+\sec 2\theta$ ($\because$ ㉠)

그러므로 삼각형 QAC에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\sin\theta}$$

$\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{2}(1+\sec2\theta)\sin\theta\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

삼각형 CPQ의 넓이를 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CP}}\times\overline{\mathrm{CQ}}\times\sin(\angle\mathrm{PCQ})$$

$$=\frac{1}{2}\times\tan2\theta\times\sqrt{2}(1+\sec2\theta)\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}\tan2\theta\sin\theta(1+\sec2\theta)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{2}$$

그러므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\frac{\sqrt{2}\times2\times1\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=2$$

29) 정답 9

[출제자 : 황보백 송원학원]

$f(x)=te^{2x}-\ln(t^2x)$ 양변을 x에 관해 미분하면

$$f'(x)=2te^{2x}-\frac{1}{x}$$

$f'(k)=0$에서 $k=g(t)$이므로

$$f'(k)=f'(g(t))=2te^{2g(t)}-\frac{1}{g(t)}=0$$

$2tg(t)e^{2g(t)}-1=0\cdots$㉠

㉠의 양변에 $t=\alpha$을 대입하면

$2\alpha g(\alpha)e^{2g(\alpha)}-1=0$

$2\alpha\times\ln2\times e^{\ln4}-1=0$

$$8\alpha=\frac{1}{\ln2}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{1}{8\ln2}$$

㉠의 양변을 t에 관해 미분하면

$2g(t)e^{2g(t)}+2tg'(t)e^{2g(t)}+2tg(t)e^{2g(t)}\times2g'(t)=0$

양변에 $t=\alpha$을 대입하면

$2g(\alpha)e^{2g(\alpha)}+2\alpha g'(\alpha)e^{2g(\alpha)}+2\alpha g(\alpha)e^{2g(\alpha)}\times2g'(\alpha)=0$

정리하면

$2e^{2g(\alpha)}\{g(\alpha)+\alpha g'(\alpha)+2\alpha g(\alpha)g'(\alpha)\}=0$

에서 $2e^{2g(\alpha)}>0$이므로

$g(\alpha)+\alpha g'(\alpha)+2\alpha g(\alpha)g'(\alpha)=0$이다.

$g(\alpha)=\ln2,\ \alpha=\frac{1}{8\ln2}$이므로

$$\ln2+\frac{1}{8\ln2}\times g'(\alpha)+\frac{2}{8\ln2}\times\ln2\times g'(\alpha)=0$$

$$\left(\frac{1}{8\ln2}+\frac{1}{4}\right)\times g'(\alpha)=-\ln2$$

$$\frac{1+2\ln2}{8\ln2}\times g'(\alpha)=-\ln2$$

$$\therefore\ g'(\alpha)=-\frac{8(\ln2)^2}{1+2\ln2}$$

따라서

$\ln(4e)\times\alpha^2\times g'(\alpha)$

$$=\ln(4e)\times\frac{1}{8^2(\ln2)^2}\times\left\{-\frac{8(\ln2)^2}{\ln(4e)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{8}$$

따라서 $p=8,\ q=1$이므로

$p+q=9$이다.

30) 정답 4

[출제자 : 황보백 송원학원]

$$y=e^{\ln(x+\ln x)}+\frac{t(e^t+e^{-t})}{\ln x}-(e^t+e^{-t})$$

$$=x+\ln x+\frac{t(e^t+e^{-t})}{\ln x}-(e^t+e^{-t})$$

따라서 곡선 $y=x+\ln x+\frac{t(e^t+e^{-t})}{\ln x}-(e^t+e^{-t})$과 직선 $y=x+t$의 교점의 x좌표는

방정식 $x+\ln x+\frac{t(e^t+e^{-t})}{\ln x}-(e^t+e^{-t})=x+t$의 실근과 같다.

$$\ln x+\frac{t(e^t+e^{-t})}{\ln x}-(e^t+e^{-t})=t$$

$(\ln x)^2-(e^t+e^{-t}+t)\ln x+t(e^t+e^{-t})=0$

$(\ln x-t)\{\ln x-(e^t+e^{-t})\}=0$

$\ln x=t$ 또는 $\ln x=e^t+e^{-t}$

모든 실수 t에 대하여 $e^t+e^{-t}>t$이므로

교점의 x좌표는 $\beta=e^{e^t+e^{-t}}$, $\alpha=e^t$

두 함수의 교점 사이의 거리는 기울기가 1인 직선 위에 있으므로

$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$

$=\sqrt{2}\{e^{e^t+e^{-t}}-e^t\}$

$f'(t)=\sqrt{2}\{e^{e^t+e^{-t}}(e^t-e^{-t})-e^t\}$이고 $e^{\ln2}=2,\ e^{-\ln2}=\frac{1}{2}$이므로

$$f'(\ln2)=\sqrt{2}\left\{e^{2+\frac{1}{2}}\left(2-\frac{1}{2}\right)-2\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-2\right)$$

그러므로 $\frac{f'(\ln2)+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$

$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{5}{2}$이므로 $a+b=4$이다.

미적분

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

23) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원]

$\vec{a}$와 $\vec{b}$가 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다.

따라서 $k+3+3k-1=4k+2=0$에서

$k=-\frac{1}{2}$이다.

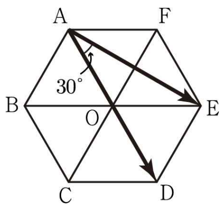
24) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ -2)$에서의 접선의 방정식은
$\frac{\sqrt{2}x}{4}+\frac{-2y}{8}=1$
위 식에 $x=0$을 대입하면
$\frac{-2y}{8}=1,\ y=-4$
따라서 y절편은 -4

25) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AP}|,\ |\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$
이므로 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}|$
따라서 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+(-7-5)^2}=13$
점 P는 점 A로부터 거리가 13로 일정하다.
즉, 점 P는 점 A를 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 13인 원이다.
따라서 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 169π이다.

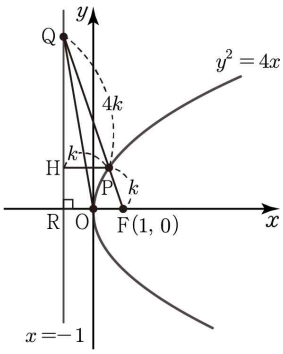
26) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 최성훈T]



그림과 같이 정육각형의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}$이고 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}$이므로 $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$이다.
$|\overrightarrow{AD}|=2,\ |\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$이고 두 벡터가 이루는 각의 크기가 30°이므로
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$ 이다.
$|\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{FE}|^2$
$=|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}|^2$
$=|\overrightarrow{AE}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$
$=(\sqrt{3})^2+2^2+2\times3$
$=3+4+6=13$
$\therefore\ |\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{13}$

27) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 이정배T]

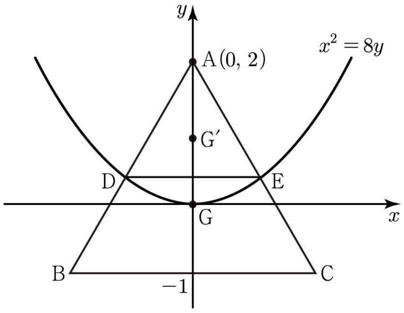
그림과 같이 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H, 준선과 x축이 만나는 점을 R라 하자. 한편, 포물선 $y^2=4x$은 꼭짓점이 원점이고 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



포물선의 정의에 의해 $\overline{PH}=\overline{PF}$이므로 주어진 조건에 의해 $\overline{PH}:\overline{PQ}=1:4$이다.
이때, 삼각형 PQH와 삼각형 FQR는 닮음이고 $\overline{FR}=2$이므로 $\overline{FQ}=4\overline{FR}=8$이다.
직각삼각형 FQR에서 $\overline{QR}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$
$\therefore\ \triangle OFQ=\frac{1}{2}\times\overline{OF}\times\overline{QR}=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{15}=\sqrt{15}$

28) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 이정배T]

그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심 G가 원점에 오고 점 A가 양의 y축에 오도록 놓으면 포물선의 꼭짓점은 $G(0,\ 0)$이고 초점은 $A(0,\ 2)$이므로 포물선의 방정식은
$x^2=4\times2\times y$
$\therefore\ x^2=8y\ \cdots$ ㉠



또, 직선 AB의 기울기는 $\tan60^\circ=\sqrt{3}$이므로
직선 AB의 방정식은
$y=\sqrt{3}x+2\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$x^2=8(\sqrt{3}x+2)$

$\therefore\ x^2-8\sqrt{3}x-16=0$

$\therefore\ x=4\sqrt{3}\pm\sqrt{(4\sqrt{3})^2+16}=4\sqrt{3}\pm 8$

따라서 점 D의 x좌표는

$x=4\sqrt{3}-8$ ($\because\ x<0$)

$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=16-8\sqrt{3}$

정삼각형 ADE의 한 변의 길이가 $16-8\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AG'}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(16-8\sqrt{3})=\dfrac{16\sqrt{3}-24}{3}$

$\overline{\mathrm{AG}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{G'G}}=2-\dfrac{16\sqrt{3}-24}{3}=10-\dfrac{16}{3}\sqrt{3}$

29) 정답 288

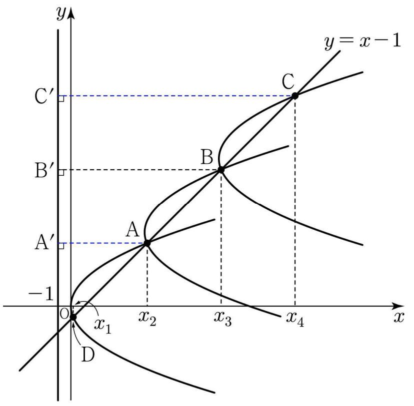
[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 배용제T]

포물선 $(y-a)^2=4(x-a)$은 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동시키면 $y^2=4x$와 일치한다. 직선 $y=x-1$을 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동시키면 $y+a=x+a-1$에서 $y=x-1$이다.

즉, 포물선 $y^2=4x$와 $y=x-1$이 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이다. 점 D의 x좌표를 x_1, 점 A의 x좌표를 x_2, 점 B의 x좌표를 x_3, 점 C의 x좌표를 x_4라 하면 네 점 D, A, B, C는 한직선 위에 있고 $\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3$을 만족한다.

따라서 x_1, x_2, x_3, x_4는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.



한편 $y^2=4x$와 $y=x-1$의 교점의 x좌표가 x_1, x_2이므로

$(x-1)^2=4x$

$x^2-6x+1=0$

의 두 근이 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$이다.

$x_1+x_2=6$, $x_1\times x_2=1$이므로

$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=36-4=32$

$\therefore\ x_2-x_1=4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AA'}}=1+x_2$, $\overline{\mathrm{CC'}}=1+x_4$이고

포물선 $y^2=4x$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=1+x_2+1+x_1=2+x_1+x_2$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{CC'}}-\overline{\mathrm{BC}}$

$=\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{CC'}}-\overline{\mathrm{AD}}$

$=(1+x_2+1+x_4)-(2+x_1+x_2)$

$=x_4-x_1$

$=3(x_2-x_1)$

$=12\sqrt{2}$

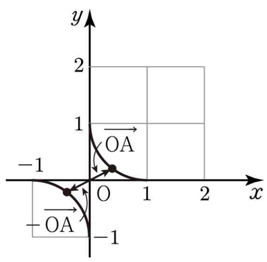
$k=12\sqrt{2}$이므로 $k^2=288$이다.

30) 정답 64

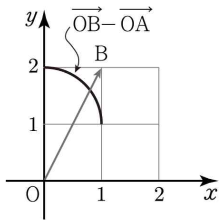
[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 이정배T]

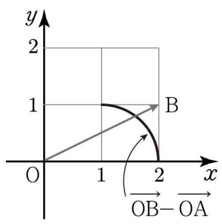
$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 나타내는 점 A가 그리는 자취를 나타내면 다음 그림과 같다.



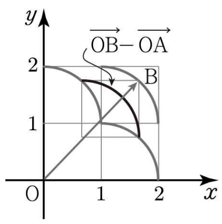
B(1, 2)일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



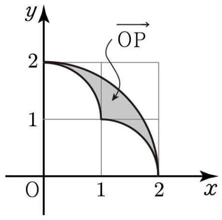
B(2, 1)일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



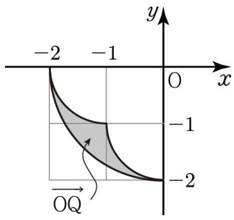
$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ $(1<b_1<2, 1<b_2<2)$ 일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



따라서
점 P가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.

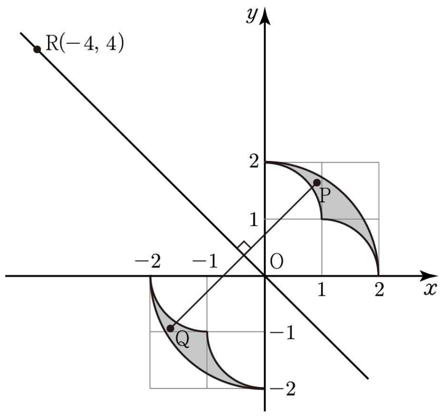


같은 방법으로 점 Q가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



한편, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OR}=0$이므로 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OR}$이다.
좌표평면에서 두 점 O, R을 지나는 직선은 $y=-x$이므로 두 점 P, Q는 기울기가 1인 직선 위에 존재한다.

따라서 다음 그림과 같다.



선분 PQ의 중점을 M이라 할 때
$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$
$=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ})$
$=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{RM}-\overrightarrow{MP})$
$=|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2$

$\overline{RM}$의 최솟값은 P$(0, 2)$, Q$(-2, 0)$으로 M$(-1, 1)$일 때이고 최댓값은 P$(2, 0)$, Q$(0, -2)$으로 M$(1, -1)$일 때이다. 이때, $\overline{MP}=\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(-3)^2+3^2}-(\sqrt{2})^2 \le \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \le \sqrt{(-5)^2+5^2}-(\sqrt{2})^2$
$16 \le \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \le 48$
$m=16,\ M=48$
이므로 $M+m=64$