제 2 교시

2022학년도 대학수학능력시험 대비 랑데뷰 9월3차

수학 영역

성명		수험 번호					—				

1. 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
2. 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

랑데뷰수학-수능을 보다!-9월 싱크로율99%

3. 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
4. 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
5. 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
6. 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~8쪽, 선택과목 확률과 통계 9~12쪽, 미적분 13~16쪽, 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

송원학원 황보백T

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

2. 함수 $f(x)=3x^3-2x^2$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=30$$

일 때, $\frac{a_{11}}{a_{10}}+\frac{a_{22}}{a_{20}}$의 값은? [3점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & (x \geq 2) \\ x+b & (x<2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속이 되도록 상수 a, b를 정할 때, $b-a$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

5. 삼차함수 $f(x)=2x^3-3(2+a)x^2+12ax+b$는 $x=1$에서 극댓값을 가지며, 극솟값은 10이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

6. 이차방정식 $8x^2-4x-a=0$ 의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, $\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$ 의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 1 ⑤ 3

7. 자연수 n에 대하여 $f(n)=n$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(n,\ 2\log_2\{f(n+1)\})$, $\mathrm{B}(n+2,\ \log_2\{f(n)f(n+2)\})$을 지나는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{48}a_k$의 값은? [3점]

① $\log_2\frac{3}{5}$ ② $2\log_2\frac{3}{5}$ ③ $\log_2\frac{3}{7}$ ④ $\log_2\frac{5}{7}$ ⑤ $2\log_2\frac{5}{7}$

8. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=1$$

을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 10 ⑤ 12

9. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^3(t-4)+k$일 때, 점 P는 출발한 후 움직이는 방향이 바뀌지 않는다. k의 값이 최소일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 속도가 최소가 되는 시각까지 움직인 거리는? [4점]

① $\frac{239}{5}$ ② 48 ③ $\frac{241}{5}$ ④ $\frac{242}{5}$ ⑤ $\frac{243}{5}$

10. 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos bx+a\ \left(0\le x\le \frac{2\pi}{b}\right)$$

의 그래프가 x축과 만나는 점을 A, $y=2a$와 만나는 두 점을 B, C라 할 때, $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$이다. $\int_0^{\frac{2\pi}{b}} f(x)dx=16$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $2+\frac{\pi}{4}$ ② $2+\frac{\pi}{2}$ ③ $3+\frac{\pi}{4}$
④ $3+\frac{\pi}{6}$ ⑤ $3+\frac{\pi}{8}$

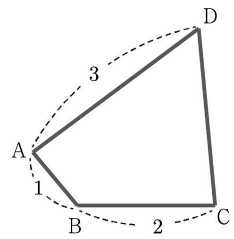
11. 다항함수 $f(x)$가 등식

$$\int_1^x xf(t)dt = px^3 - x^2 + qx + \int_1^x tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, 상수 p, q에 대하여 $f(p+q)$의 값은? [4점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

12. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$이고 $\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=\pi$인 사각형 ABCD에서 삼각형 ABD의 넓이가 $\sqrt{2}$일 때, 선분 CD의 길이는? $\left(\text{단, } 0<\angle\mathrm{BAD}<\dfrac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{3}(\sqrt{10}-1)$ ② $\frac{2}{3}(\sqrt{10}-1)$ ③ $\sqrt{10}-1$
④ $\frac{4}{3}(\sqrt{10}-1)$ ⑤ $\frac{5}{3}(\sqrt{10}-1)$

13. 첫째항 63이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_m| = |a_{m+4}|$인 자연수 m이 존재하도록 하는 모든 정수 d의 값의 합은? [4점]

① -39 ② -41 ③ -43 ④ -45 ⑤ -47

14. 최고차항의 계수가 양수이고 $f'(0)=f'(1)=f'(a)=0$ $(a>1)$인 사차함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+k)-f(k) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 k의 개수는 2이다.

ㄴ. $k=1$일 때, 함수 $\lim_{h\to 0}\dfrac{|g(x+h)|-|g(x-h)|}{h}$의 불연속인 점의 개수는 1이다.

ㄷ. $a>2$, $k=a$일 때, $\int_{-a}^{0} g(x)dx < \int_{0}^{a} g(x)dx$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1-4^{1+a_n} & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 1-4^{-a_n} & \left(-\frac{1}{2} \le a_n < 0\right) \\ 4^{a_n}-1 & \left(0 \le a_n < \frac{1}{2}\right) \\ 4^{1-a_n}-1 & \left(\frac{1}{2} \le a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4+a_5=0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값을 크기가 작은 순으로 차례대로 나타내면 b_1, b_2, $\cdots$, b_k이다. $k+\sum_{p=1}^{k} b_p$의 값은? [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

단답형

16. $\log_3 7+\log_3 63-\log_3 49$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 미분 가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2\ ,\ \ f'(x)=3x^2+2x+a$$

일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{49}(1+2ka_{k+1})=149,\ \sum_{k=1}^{50}(2k+1)a_k=160$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{50}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax$에서 x의 값이 0에서 b까지 변할 때의 평균변화율이 $x=1$에서의 순간변화율과 같게 되도록 하는 b의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

20. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $f(x)=-x^2+2$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

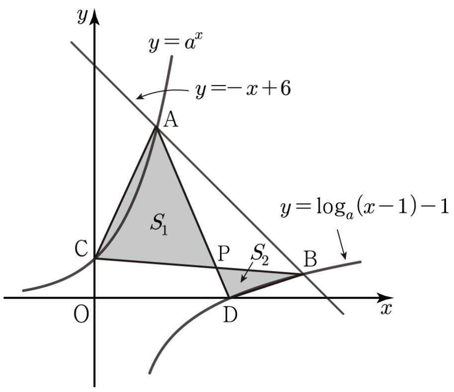
$$|f(x)+x|-|f(x)-x|=2x-f(x)+t$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. $\lim_{t\to\alpha-}g(t)-\lim_{t\to\beta-}g(t)=2$을 만족시키는 α, β의 최댓값을 각각 M_1, M_2라 할 때, $2M_1+M_2$의 값을 구하시오. [4점]

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+6$가 두 곡선

$$y=a^x,\ y=\log_a(x-1)-1$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^x$이 y축과 만나는 점을 C, $y=\log_a(x-1)-1$이 x축과 만나는 점을 D라 하자. 두 선분 AD와 BC의 교점을 P라 할 때, 삼각형 PAC의 넓이를 S_1, 삼각형 PBD의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{2}$일 때, S_1-S_2의 값을 구하시오. [4점]



22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이다.
(나) 함수 $f(x+4)g(x)$은 실수 전체의 집합에서 연속이고 방정식 $f(x+4)g(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖고 네 실근의 합은 1이다.

$\lim_{x\to a+}g(x)=128$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 한 개의 주사위를 45번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은? [2점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

24. 주머니 속에 3부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 구슬 7개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수가 서로소일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

25. $\left(x^2+\frac{5}{x}\right)^n$ 의 전개식에서 0이 아닌 상수항이 존재하도록 하는 10이하의 모든 자연수 n의 합은? [3점]

① 18 ② 17 ③ 16 ④ 15 ⑤ 14

26. 주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 10, 11, 12, 13, 14의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 구슬을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 구슬을 꺼낸다. 주머니 B에서 꺼낸 구슬에 적혀 있는 숫자가 짝수이었을 때, 주머니 A에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자도 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{17}$ ② $\frac{6}{17}$ ③ $\frac{7}{17}$ ④ $\frac{8}{17}$ ⑤ $\frac{9}{17}$

27. 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 19) = \mathrm{P}(\overline{X} \leq 21) = 0.8944$$
$$\mathrm{P}(X \leq 15) + \mathrm{P}(\overline{X} \leq 22) = 1.0994$$

일 때, $\mathrm{P}(10 \leq X \leq 25)$의 값은? [3점]

① 0.7888 ② 0.8882 ③ 0.8944
④ 0.9452 ⑤ 0.9876

28. 합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(3)$의 값은 짝수이다.
(나) $x < 3$이면 $f(x) \geq f(3)$이다.
(다) $x > 3$이면 $f(x) \leq f(3)$이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 992

단답형

29. 두 이산확률변수 X, Y 의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	e	1

Y	7	12	17	22	27	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	e	1

a, b, c, d, e가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
$\mathrm{E}(X)=10\times \mathrm{P}(X=3)$, $\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{25}{2}\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=5)\}$일 때, $\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

30. H씨는 은행에 들러 오만원짜리, 만원짜리, 오천원짜리, 천원짜리의 4종류의 지폐를 각 10장씩 40장을 출금하였다. 24장의 지폐가 들어갈 수 있는 지갑에 4종류의 지폐를 넣으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 지폐를 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 지폐는 서로 구별하지 않고 모든 지폐의 두께는 같다.) [4점]

(가) 오만원짜리 지폐와 만원짜리 지폐는 3장 이상씩 선택한다.
(나) 오천원짜리 지폐는 선택하지 않거나 3장 이상 선택한다.
(다) 천원짜리 지폐는 선택하지 않거나 3장 이상 선택한다.

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9^n+2\cdot 3^{n+2}}-3^n\right)$의 값은? [2점]

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

24. $\tan(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$, $\tan\beta=1$일 때, $\tan\alpha$의 값은? (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$) [3점]

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

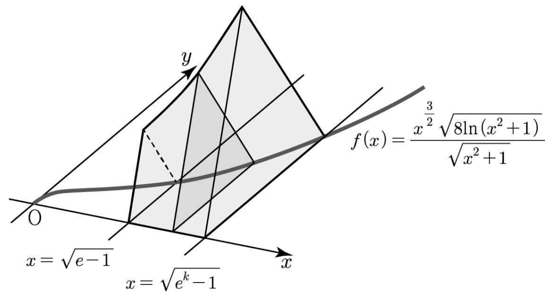
25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선 $x=t+\frac{a}{t}$, $y=t^2$에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 -2이다. 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 그림과 같이 유리수 k $(k>1)$에 대하여 함수

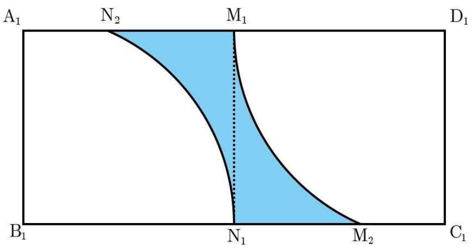
$f(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{8\ln(x^2+1)}}{\sqrt{x^2+1}}$의 그래프와 x축 및 두 직선

$x=\sqrt{e-1}$, $x=\sqrt{e^k-1}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\sqrt{3}\left(e^2-\frac{3}{2}\right)$일 때, k의 값은? [3점]

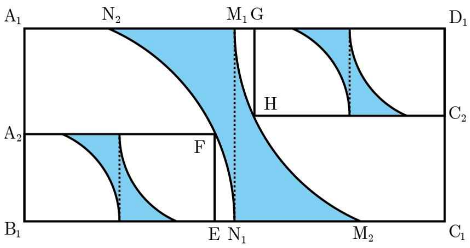


① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

27. [그림1]과 같이 $\overline{A_1B_1}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. $\overline{A_1D_1}$와 $\overline{B_1C_1}$의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$인 원과 선분 A_1M_1의 교점을 N_2, 중심이 D_1이고 반지름의 길이가 $\overline{D_1M_1}$인 원과 선분 C_1N_1의 교점을 M_2이라 하자. 색칠된 도형 $N_1N_2M_1M_2$의 넓이를 S_1이라 하자. [그림2]와 같이 점선 M_1N_1을 기준으로 좌우의 합동인 도형 $A_1B_1N_1N_2$와 도형 $C_1D_1M_1M_2$에 $\overline{A_2B_1}:\overline{B_1E}=\sqrt{3}:4$ 인 직사각형 A_2B_1EF 와 $\overline{C_2D_1}:\overline{D_1G}=\sqrt{3}:4$ 인 직사각형 C_2D_1GH 을 그리고 그림 S_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 얻은 합동인 도형의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림의 색칠되어있는 부분의 넓이의 합을 S_n 이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



[그림1]

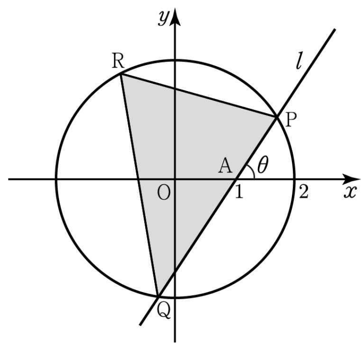


[그림2]

① $\frac{19}{10}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$ ② $\frac{19}{11}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$ ③ $\frac{19}{9}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$

④ $\frac{19}{11}\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$ ⑤ $\frac{19}{11}\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)$

28. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. A(1, 0)을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선을 l이라 한다. 직선 l과 원이 만나는 점을 P, Q라 하고 직선 l로 나누어진 원이 두 부분 중 큰 쪽의 호 위에 점 R이 있다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 삼각형 PQR의 넓이가 최대일 때의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{S(\theta)}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\,d\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{\pi-1+\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\pi-3+3\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\pi-1+\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2\pi-3+3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\pi-1+\sqrt{3}}{2}$

단답형

29. 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β일 때, 열린구간 (α, β)에서 정의된 함수 $g(x)=f(x)\ln\{f(x)\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=a$에서 동일한 최댓값 M을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=b$, $x=b+\sqrt{e-\frac{1}{e}}$에서 최솟값을 갖는다.

$M-f(a+1)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 a $(a \neq 0)$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x}=9$
> (나) $f(x)$의 두 극값의 차는 1이하다.

함수 $g(x)$는 $0 \leq x < 1$일 때, $g(x)=f(x)-f(0)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)+1$이다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\int_0^{\frac{a}{4}} xg(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(1,2,3)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 B, y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 C라 할 때, 선분 BC의 길이는? [2점]

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{5}$

24. 두 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(4,0)$, $\mathrm{F}'(-4,0)$이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선의 점근선 중에서 기울기가 양수인 점근선을 l이라 하자. 점F 와 직선 l 사이의 거리는? [3점]

① $\sqrt{11}$　② $\sqrt{10}$　③ 3　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{7}$

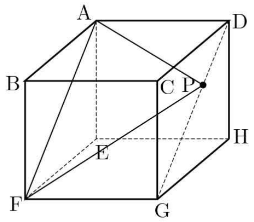
25. 좌표평면에서 세 벡터 $\vec{a}=(2,\ 0)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$, $\vec{c}=(-1,\ 1)$에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가 $\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{q}-\vec{c}|=2$을 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

26. 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F를 중심으로 하고 준선에 접하는 원을 C 라 하자. 원 C 와 이 포물선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 A라 할 때, 점 A를 지나고 이 포물선에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 ABF의 넓이가 8일 때, p의 값은? [3점]

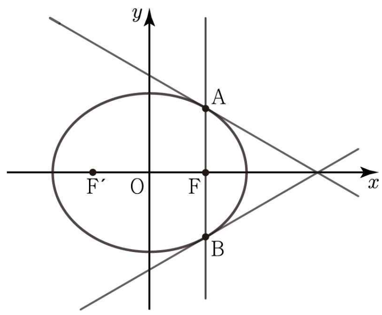
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

27. 그림과 같은 한 변의 길이가 a인 정육면체에서 선분 DG위의 임의의 점을 P라 하자. 평면 AFP와 평면 EFG가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ [3점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{4}$

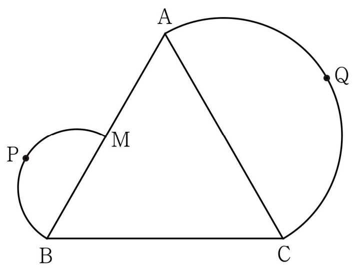
28. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c > 0)$이고 단축의 길이가 2인 타원이 있다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 A, 제4사분면에서 만나는 점을 B 라 하자. 점 A와 점 B에서의 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형일 때 타원의 장축의 길이는? [4점]

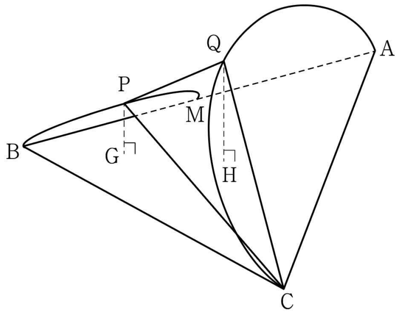


① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

단답형

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC에 선분 AB의 중점 M에 대하여 두 선분 BM, AC를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 BM을 이등분하는 점을 P라 하고, 반원의 호 AC를 이등분하는 점을 Q라 하자. 이 종이에서 두 선분 AB와 AC를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정삼각형 ABC의 내부에 놓여 있고 $\overline{PG}=\sqrt{2}$, $\overline{QH}=2\sqrt{2}$이다. 두 평면 PCQ와 ABC가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $60\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]





30. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, \sqrt{3})$, $B(-2, 0)$에 대하여 두 점 P, Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AP}|=2$
(나) $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ 인 실수 k가 존재한다.
(다) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-4$

점 Q가 나타내는 도형 위의 점 X가 $|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OX}|\le 4$을 만족시킬 때, 점 X가 나타내는 도형의 길이를 l이라 하자. $3l^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 $k\neq 0$, $k\neq 1$인 상수이다.) [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 2022학년도 랑데뷰 컨텐츠(파일 판매)
(1) 매주 모의고사 (월4회 연32회)
(2) 일일학습지 (월20회, 연160회)
(3) 수특, 수완 변형
(4) 주요모고 변형
[문의] 카톡 : hbb100

2. 2021년 랑데뷰 출간물 (ALL 오르비 출판)
(1) N제 (1월~5월)
수학I, 수학II, 확률과통계, 미적분, 기하

(2) 상수 (4월, 8월)
고등수학(상), 수학I, 수학II, 고등수학(하)

(3) 봉투모의고사 (7월~9월)
랑데뷰☆수학 모의고사
시즌1
시즌2
시즌3

네이버 검색 : 황보백

랑데뷰 출간 교재 소개
(yes24, 알라딘, 오르비 등에 주문가능)

-랑데뷰세미나- (전국 서점 판매중)
황보백 선생이 그동안 배우고 연구한 고교 입시 수학에 필요한 심화 개념 및 스킬들을 모아 놓은 교재
[고등수학] [수학I] [수학II] [미적분] [확률과통계] [기하]

순으로 현 교육과정에 맞게 정리되어 있다.
장점:고교수학의 대부분의 스킬이 담겨 있다.오르비 편집실에서 깔끔하게 편집해 주셔서 오르비에서 판매되었던 전자책보다 가독성이 좋아졌고 검토진 선생님들의 꼼꼼한 검토로 오타,오류 수정되었으며 보기 불편한 그림은 대부분 수정되어 완성도가 높아졌다.
많은 가르침을 주신 선-후배 강사분들과 특히 수강모 선생님들께 감사함을 전합니다. 입시수학을 연구하는 모든 선생님들께 이 책을 바칩니다.

-랑데뷰N제- 수학I,수학II,확통,미적분,기하

수능 대비 수학 문제집**랑데뷰N제 시리즈**는 다음과 같은 난이도 구분으로 구성됩니다. (괄호안 단어가 교재명)
1단계-쉬운3점 어려운3점(쉬삼어삼) (오르비-전자책)
⇨평가원 기출(6,9,11월)+변형 자작 문항(5:5정도)
2단계-쉬운4점 어려운4점(쉬사준킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
3단계-킬러(킬러극킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
이 판매페이지는 랑데뷰N제중[수학I]과[수학II]의2단계[쉬사준킬], 3단계[킬러극킬]에 관한 내용입니다.
(1)랑데뷰N제 수학I- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 240문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(2)랑데뷰N제 수학I- 킬러극킬
킬러급 난이도100제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.
(3)랑데뷰 N제 수학II- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 200문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(4)랑데뷰 N제 수학II- 킬러극킬
킬러급 난이도110제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.

<그외 출간물>
랑데뷰 상수 시리즈
어썸&랑데뷰 모의고사(강남구청 인강교재)
랑데뷰 모의고사 시즌1,2,3

수학 영역(해설)

랑데뷰-집필진

[강동희 강동희수학교습소 010-7292-1692]
[김권택 더블엠수학학원 010-9895-5754
[김 수 오라클수학교습소 010-5273-7632]
[김은수 샤인수학학원 010-5687-5722]
[김종렬 광릉한샘기숙학원 010-3619-7963]
[김효경 수학의 정원 010-6369-6416]
[박광식 프라하 수학학원 010-3257-5452]
[박용진 샤인수학학원 010-6512-7443]
[배용제 L&K한울학원 010-2626-2280]
[서영만 만 수학교습소 010-9244-0910]
[서태욱 태강학원 010-3022-6918
답길학원 010-3022-6918]
[오세준 오엠수학교습소 010-8858-9561]
[오은경 오은경수학 010-4534-5129]
[우성근 우성근수학 010-3040-0005]
[유승희 오름학원 010-5298-1393]
[이재호 이재호수학학원 010-4527-1703]
[이정배 김이김학원 010-9866-2508
멘토수학 010-9866-2508]
[이지웅 감수학 010-9834-0904]
[이지훈 SY영수학원 010-8598-5284]
[이태형 가토수학과학학원 gatoms@kakao.com]
[이현일 샤인수학학원 010-2681-9501]
[임성일 다사아인수학 010-2048-2402]
[장선정 오름수학 010-4894-1764]
[장세완 장선생수학학원 010-2568-0049]
[장정보 장정보수학교습소 010-9504-5938]
[전희종 범어수학 010-9721-9797]
[정일권 이미지매쓰학원 010-2739-6021]
[조필재 샤인수학학원 053-754-3121]
[조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
[최병길 광주과학고등학교 010-4591-0583]
[최성훈 최성훈수학교습소 010-2680-5281]
[최수영 수학만영어도학원 053-856-1158,
필즈수학학원 054-771-4301]
[최재영 셰르파수학교습소 010-2577-4221]
[최현정 MQ멘토수학 010-2655-9279]
[최혜권 수학의 궤도진입 010-3869-9602]
[한정아 한정아수학교습소 010-7220-6368]
[홍지석 홍수학 학원 010-7136-5713]
[황수영 JS수학연구소 010-6780-8242]

문항	배점	수학I	수학II
1	2		
2	2		
3	3		
4	3		
5	3		
6	3		
7	3		
8	3		
9	4		
10	4		
11	4		
12	4		
13	4		
14	4		
15	4		
16	3		
17	3		
18	3		
19	3		
20	4		
21	4		
22	4		
문항수		9평 변형	9평 변형

문항	배점	확통	미적분	기하
23	2			
24	3			
25	3			
26	3			
27	3			
28	4			
29	4			
30	4			
문항수		9평 변형	9평 변형	9평 변형

2022학년도 수학영역 랑데뷰 9월-3차 빠른답

공통과목

1	②	2	⑤	3	④	4	④	5	②
6	②	7	④	8	⑤	9	⑤	10	①
11	⑤	12	②	13	②	14	④	15	④
16	2	17	7	18	20	19	3	20	10
21	3	22	5						

확률과 통계

23	③	24	④	25	①	26	④	27	②
28	⑤	29	25	30	371				

미적분

23	①	24	①	25	②	26	③	27	②
28	②	29	4	30	109				

기하

23	③	24	⑤	25	④	26	④	27	④
28	③	29	20	30	64				

2022학년도 수학영역 랑데뷰 9월-3차-풀이

공통과목

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

1) 정답 ②

$2^{\frac{2}{3}}\times5^{-\frac{1}{3}}\times10^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times5^{-\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{3}}\times5^{\frac{4}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}\times5^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=2^2\times5=20$

2) 정답 ⑤

$f'(x)=9x^2-4x$이므로

$f'(1)=9-4=5$

3) 정답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=r^2+r$ 이고

$\frac{a_{11}}{a_{10}}+\frac{a_{22}}{a_{20}}=r+r^2$이므로

$\frac{a_{11}}{a_{10}}+\frac{a_{22}}{a_{20}}=30$이다.

4) 정답 ④

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)$ 에서

$f(2)=2^2+2+a=6+a$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+x+a)=6+a$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x+b)=2+b$

이므로 $6+a=2+b$

$\therefore b-a=4$

5) 정답 ②

$f(x)=2x^3-3(2+a)x^2+12ax+b$

$f'(x)=6x^2-6(2+a)x+12a=6(x-2)(x-a)$

$x=1$에서 극댓값을 가지므로 $f'(1)=0$

$\therefore a=1$

이때, $f(x)=2x^3-9x^2+12x+b$ 이고

극솟값은

$f(2)=2\cdot2^3-9\cdot2^2+12\cdot2+b=4+b=10$

$\therefore b=6$

$\therefore a+b=1+6=7$

6) 정답 ②

근과 계수의 관계에 의해

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{8}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{1}{4}+\frac{a}{4}=1$

$\therefore\ a=3$

$\therefore\ \frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=-4$

7) 정답 ④

$$a_n=\frac{\log_2\frac{f(n)f(n+2)}{\{f(n+1)\}^2}}{(n+2)-n}=\frac{1}{2}\log_2\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{2}\log_2\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{48}{49}\frac{50}{49}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{1}{2}\times\frac{50}{49}\right\}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{5}{7}\right)^2=\log_2\frac{5}{7}$$

8) 정답 ⑤

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=1 \Rightarrow f(x)=(x-2)^2(x-1)$

따라서

$\therefore\ f(4)=2^2\times3=12$

9) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀌지 않기 위해서는 방정식 $v(t)=0$의 해가 없거나 중근만 존재할 때이다. 즉, $t\ge0$인 모든 t에 대하여 $v(t)\ge0$이다.

$v(t)=t^3(t-4)+k=t^4-4t^3$

$v'(t)=4t^2(t-3)$

$t=3$일 때, 극솟값이자 최솟값을 갖는다.

따라서 $v(3)=-27+k\ge0$

$k\ge27$

k의 최솟값이 27이므로 $v(t)=t^3(t-4)+27$, 점 P가 속도가 최소가 되는 시간은 $t=3$이므로

구하려는 값은

$\int_0^3|v(t)|dt$

$=\int_0^3(t^4-4t^3+27)dt$

$=\left[\frac{1}{5}t^5-t^4+27t\right]_0^3$

$=\frac{243}{5}-81+81$

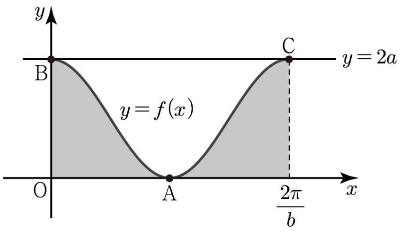
$=\frac{243}{5}$

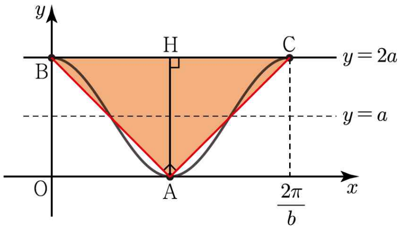
이다.

10) 정답 ①

[그림 : 이정배T]

다음 그림과 같이 $\int_0^{\frac{2\pi}{b}}f(x)dx$가 나타내는 색칠된 부분의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 같다.





함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{b}$에 대칭이고 $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 꼭짓점 A에서 $y=2a$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\pi}{b}$

$\overline{\mathrm{AH}}=2a$이므로 $2a=\frac{\pi}{b}\cdots$㉠

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2\pi}{b}=4a$

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times4a\times2a=16$에서

$a^2=4$

따라서 $a=2$ ($\because a>0$)이다.

㉠에서 $b=\frac{\pi}{4}$

그러므로 $a+b=2+\frac{\pi}{4}$

11) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

주어진 식에서

$x\int_1^x f(t)dt=px^3-x^2+qx+\int_1^x tf(t)dt\ \cdots$㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $p+q=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)=3px^2-2x+q+xf(x)$

$\int_1^x f(t)dt=3px^2-2x+q\ \cdots$㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $3p+q=2$

$p+q=1$, $3p+q=2$을 연립하여 풀면

$p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$이다.

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x-2$

$\therefore\ f(p+q)=f(1)=1$

12) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 최성훈T]

$\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.

삼각형 ABD의 넓이가 $\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times1\times3\times\sin\theta$

$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{BD}}^2=1+9-2\times1\times3\times\dfrac{1}{3}=8$

한편, 삼각형 BCD에서

$\angle\mathrm{BCD}=\pi-\theta$이므로 $\cos(\pi-\theta)=-\dfrac{1}{3}$이다.

선분 CD의 길이를 x라 하면

$8=4+x^2-2\times2\times x\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$x^2+\dfrac{4}{3}x-4=0$

$3x^2+4x-12=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{40}}{3}$

$x=\dfrac{2\sqrt{10}-2}{3}=\dfrac{2}{3}(\sqrt{10}-1)$ $(\because x>0)$

13) 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$은 n에 관한 일차식이므로

조건 $|a_m|=|a_{m+4}|$을 만족하기 위해서는 $a_{m+2}=0$이어야 한다.

$a_n=63+(n-1)d$에서

$a_{m+2}=63+(m+1)d=0$

$(m+1)d=-63$이고 $d<0$, $m\geq1$이므로

$m+1$	d
3	-21
7	-9
9	-7
21	-3
63	-1

가능한 모든 정수 d의 합은

$(-21)+(-9)+(-7)+(-3)+(-1)=-41$

14) 정답 ④

[그림 : 최성훈T]

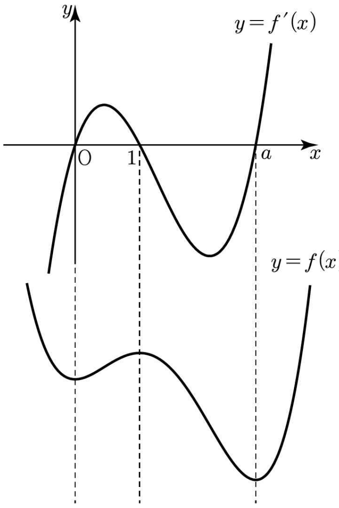
ㄱ. $k=1$일 때, $y=g(x)$는 $x=0$에서 x축에 접하고 $x=\alpha$ $(\alpha>a-1)$에서 x축과 만나므로

함수 $|g(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

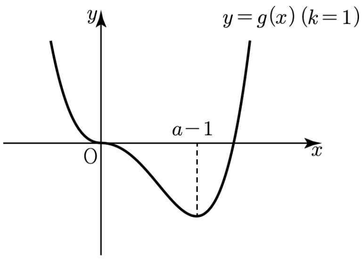
$k=a$이면 함수 $|g(x)|$의 그래프는 $x=0$에서만 x축과 만나고 $x=0$에서 x축에 접하므로 $x=0$에서 미분가능하다. 따라서 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

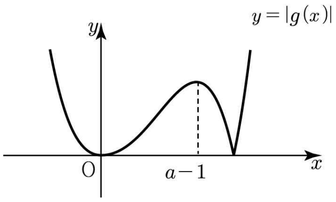
따라서 함수 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능이 되도록 하는 k의 값은 a뿐이다. (거짓)

ㄴ. $y=f'(x)$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

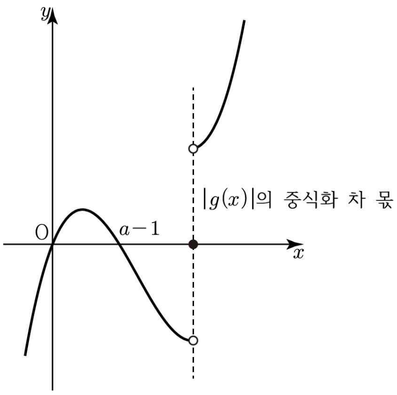


$k=1$인 경우의 $y=g(x)$의 그래프와 $y=|g(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.





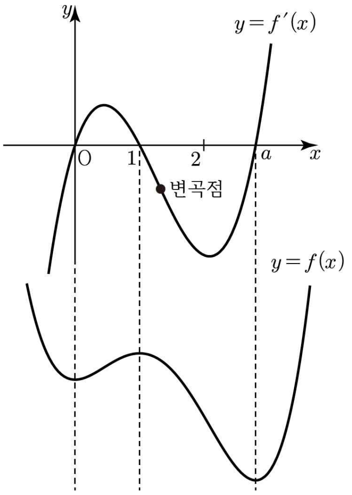
함수 $|g(x)|$의 중심화 차 몫 그래프는 다음 그림과 같다.



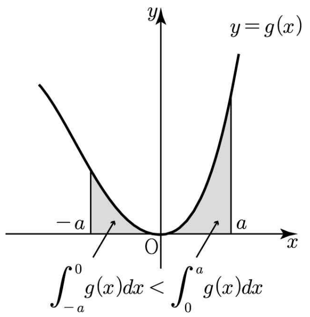
따라서 불연속인 점의 개수는 1이다.

(참)

ㄷ.
$y=f'(x)$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다. 삼차함수 $f'(x)$에서 $a>2$이므로 삼차함수의 대칭점 (변곡점)의 위치는 x축 아래쪽에 있고 대칭점을 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=f'(x)$의 그래프와 만나는 점을 기준으로 살펴보면 $h(x)=f'(x)$라 할 때, $h'(0)<h'(a)$임을 알 수 있다.



따라서 $k=a$인 경우 다음 그림과 같은 그래프 개형을 갖고 $g'(0-)<g'(0+)$이다. 그러므로 $\int_{-a}^{0} g(x)dx<\int_{0}^{a} g(x)dx$



(참)

15) 정답 ④
[그림 : 최성훈T]

$-1 \le a_n < -\frac{1}{2}$일 때, $-1<a_{n+1} \le 0$으로 $a_n+a_{n+1}<0$이다.

즉, $-1 \le a_4 < -\frac{1}{2}$이면 $a_4+a_5<0$로 모순이다.

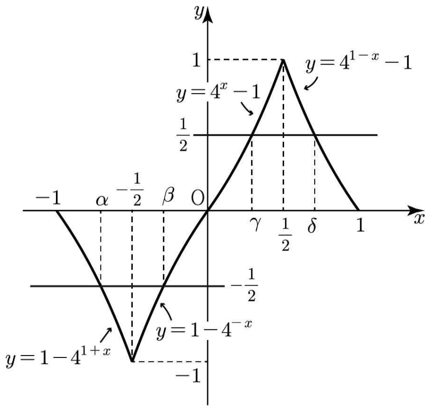
$\frac{1}{2}<a_n \le 1$일 때, $0 \le a_{n+1} \le 1$으로

$a_n+a_{n+1}>0$이다. 즉, $\frac{1}{2}<a_4 \le 1$이면 $a_4+a_5>0$로 모순이다.

$-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}$일 때, $-1 \le a_{n+1} \le 1$으로

$-\frac{3}{2} \le a_n+a_{n+1} \le \frac{3}{2}$이다. 즉, $-\frac{1}{2} \le a_4 \le \frac{1}{2}$이면 a_4+a_5의 값이 0이 될 수 있다.

$4^{a_n}=1$ 또는 $4^{-a_n}=1$에서 $a_n=0$이다.
따라서 $a_n=a_{n+1}=0$이다.



$a_4=0$이기 위해서는 $a_3=-1$ 또는 $a_3=1$ 또는 $a_3=0$이어야 한다.

(i) $a_3=-1$일 때,

$a_2=-\frac{1}{2}$이고 그림에서 $a_2=-\frac{1}{2}$을 만족하는 $a_1=\alpha$, $a_1=\beta$ $\left(\alpha<-\frac{1}{2}<\beta<0\right)$로 2개 존재하고 $\alpha+\beta=-1$이다.

(ii) $a_3=1$일 때,

$a_2=\frac{1}{2}$이고 그림에서 $a_2=\frac{1}{2}$을 만족하는 $a_1=\gamma$, $a_1=\delta$ $\left(0<\gamma<\frac{1}{2}<\delta\right)$로 2개 존재하고 $\gamma+\delta=1$이다.

(iii) $a_3=0$일 때,
$a_2=-1$ 또는 $a_2=1$ 또는 $a_2=0$이 가능하다.
㉠ $a_2=-1$이면 $a_1=-\frac{1}{2}$
㉡ $a_2=1$이면 $a_1=\frac{1}{2}$
㉢ $a_2=0$이면 $a_1=-1$ 또는 $a_1=1$ 또는 $a_1=0$이다.

(i), (ii), (iii)에서 a_1의 값으로 가능한 것의 개수는 9이므로 $k=9$이고
$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9=0$이다,
따라서
$k+\sum_{p=1}^{k} b_p=9+0=9$

16) 정답 2

$\log_3 7+\log_3 63-\log_3 49$

$=\log_3\left(7\times7\times3^2\times\frac{1}{7^2}\right)=\log_3 3^2=2$

17) 정답 7

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ 에서 $f(1)=0$이고 $f'(1)=2$ 이다.

$f'(x)=3x^2+2x+a$ 이므로 $f'(1)=3+2+a=2$에서

$a=-3$

$\therefore\ f'(x)=3x^2+2x-3$

이때,

$f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x^2-3x+C$

(C는 적분상수)이므로

$f(1)=0$에서 $1+1-3+C=0$

$\therefore\ C=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-3x+1$ 이므로

$f(2)=2^3+2^2-3\times2+1=7$

18) 정답 20

$\sum_{k=1}^{49}(1+2ka_{k+1})$

$=49+\sum_{k=1}^{49}2ka_{k+1}=149$

따라서 $\sum_{k=1}^{49}2ka_{k+1}=100$이다.

$\sum_{k=1}^{50}(2k+1)a_k=160$

⇨$3a_1+5a_2+7a_3+\cdots+101a_{50}=160$ …㉠

$\sum_{k=1}^{49}2ka_{k+1}=100$

⇨$2a_2+4a_3+6a_4+\cdots+98a_{50}=100$ …㉡

㉠-㉡을 하면

$3a_1+3a_2+3a_3+\cdots+3a_{50}=60$

따라서 $\sum_{k=1}^{50}a_k=20$

19) 정답 3

x의 값이 0에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{b^3-6b^2+ab}{b}=b^2-6b+a$

$x=1$에서의 순간변화율은 $f'(1)$이므로

$f'(x)=3x^2-12x+a$에서 $f'(1)=3-12+a=a-9$이다.

따라서

$b^2-6b+a=a-9$

$(b-3)^2=0$

$b=3$

20) 정답 10

[그림 : 배용제T]

$y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2=x$

$x^2+x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

$y=f(x)$와 $y=-x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2=-x$

$x^2-x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 열린구간 $(-2, 2)$에서 방정식

$|f(x)+x|-|f(x)-x|=2x-f(x)+t$는 다음과 같다.

(i) $-2<x<-1$일 때, $f(x)+x<0$, $f(x)-x>0$이므로

$-f(x)-x-f(x)+x=2x-f(x)+t$

$-f(x)-2x=t$

$x^2-2x-2=t$

(ii) $-1\le x<1$일 때, $f(x)+x>0$, $f(x)-x>0$이므로

$f(x)+x-f(x)+x=2x-f(x)+t$

$f(x)=t$

$-x^2+2=t$

(iii) $1\le x<2$일 때, $f(x)+x>0$, $f(x)-x<0$

$f(x)+x+f(x)-x=2x-f(x)+t$

$3f(x)-2x=t$

$-3x^2-2x+6=t$

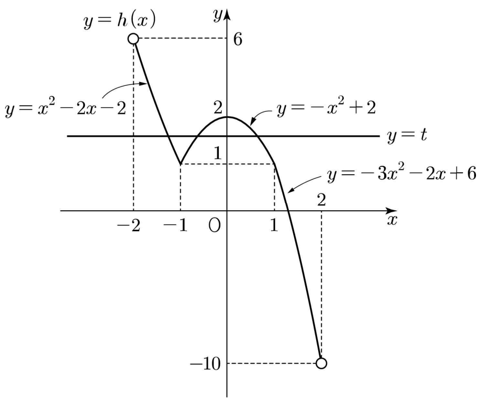
(i), (ii), (iii)에서

방정식

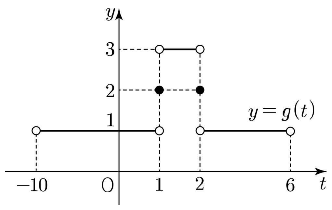
$|f(x)-x|+|f(x)-x|=2x-f(x)+t$의 해의 개수는

$$h(x)=\begin{cases}x^2-2x-2 & (-2<x<-1)\\ -x^2+2 & (-1\le x<1)\\ -3x^2-2x+6 & (1\le x<2)\end{cases}$$

일 때, $y=h(x)$와 $y=t$의 교점의 개수와 같다.

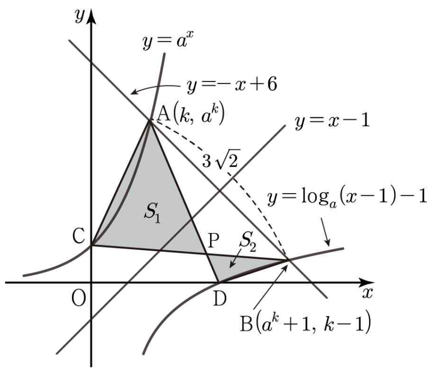


따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\lim\limits_{t\to\alpha-}g(t)-\lim\limits_{t\to\beta-}g(t)=2$가 되기 위해서는 $\lim\limits_{t\to\alpha-}g(t)=3$, $\lim\limits_{t\to\beta-}g(t)=1$ 이어야 한다.
그러므로 α의 최댓값은 2, β의 최댓값은 6이다.
$\therefore\ M_1=2,\ M_2=6$
$2M_1+M_2=4+6=10$

21) 정답 3
[그림 : 이정배T]
곡선 $y=a^x$을 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 곡선 $y=\log_a(x-1)-1$가 된다. 따라서 두 곡선 $y=a^x$와 $y=\log_a(x-1)-1$는 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.



따라서 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(k,\ a^k)$라 두면 점 $\mathrm{B}(a^k+1,\ k-1)$이 된다.
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2(a^k+1-k)^2}=3\sqrt{2}$
$\therefore\ a^k-k=2$
점 $\mathrm{B}(a^k+1,\ k-1)$가 $y=-x+6$위에 있으므로
$k-1=-a^k-1+6$
$\therefore\ a^k+k=6$
두 식을 연립하면 $2k=4$에서 $k=2$이다.
$a^2-2=2$에서 $a=2$이다.
삼각형 ABC의 넓이에서 삼각형 ABD의 넓이를 뺀 값이 S_1-S_2와 같다.
삼각형 ABC에서 $\mathrm{C}(0,1)$이므로 점 C에서 $x+y-6=0$까지 거리는 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$이다.
그러므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{15}{2}$
삼각형 ABD에서 $\mathrm{D}(3,0)$이므로 점 D에서 $x+y-6=0$까지 거리는 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$이다.
그러므로 삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{9}{2}$
따라서 $\dfrac{15}{2}-\dfrac{9}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

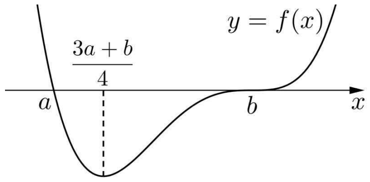
22) 정답 5
[그림 : 이현일T]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로
$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$의 의미를 생각해보자.
$k(x)=|f(x)|$라 두면,
$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{k(x+h)-k(x-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}-\dfrac{k(x-h)-k(x)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}+\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{k(x-h)-k(x)}{-h}$
$=k'(x+)+k'(x-)$

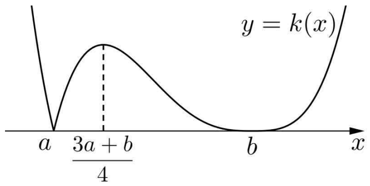
$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{k(x+h)-k(x-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}-\dfrac{k(x-h)-k(x)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}+\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{k(x-h)-k(x)}{-h}$
$=k'(x-)+k'(x+)$

이므로 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$은 함수 $k(x)$에 대한 x에서의 우미분계수와 좌미분계수의 합임을 알 수 있다.
따라서 $g(x)=k'(x+)+k'(x-)\cdots$㉠
[랑데뷰세미나(87), (124) 참고]

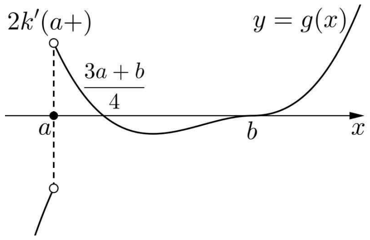
(가)에서 함수 $f(x)=k(x-a)(x-b)^3\ (k>0)$꼴이다.
함수 $g(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.
함수 $f(x+4)$는 함수 $f(x)$을 x축으로 -4만큼 평행이동한 함수이므로 방정식 $f(x)=0$의 근인 $x=a$, $x=b$은 $a<b$이어야 한다.
따라서 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $k(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)=k'(x+)+k'(x-)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x+4)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(a+4)=0$ 이다.

방정식 $f(x+4)g(x)=0$의 해는 우선 $x=a-4$을 대입하면 $f(a)g(a-4)=0$이므로

$x=a-4$가 해이다. 따라서 $b-4$도 해가 된다.

또한 $g(x)=0$의 해는 $x=\frac{3a+b}{4}$ (사차함수 비율 이용), $x=b$이다.

그러므로 해는 $a-4$, $b-4$, $\frac{3a+b}{4}$, b이고 $b-4=a$이므로

$a-4$, a, $a+1$, $a+4$에서

$(a-4)+a+(a+1)+(a+4)=1$

$4a+1=1$

$\therefore\ a=0,\ b=4$

따라서 $f(x)=kx(x-4)^3$이다.

$f'(x)=k(x-4)^3+3kx(x-4)$

$f'(0)=-64k$

$k'(0+)=\{|f'(0)|\}'=64k$

$g(x)=2k'(0+)=128k$에서

$\lim_{x\to a+} g(x)=128k=128$

$\therefore\ k=1$

$f(x)=x(x-4)^3$이다.

$f(5)=5$

확률과통계

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

23) 정답 ③

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45,\ \frac{2}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V(X)}=45\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=10$

24) 정답 ④

7개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2}=21$

이때 꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수가 서로소인 경우는

$(3,4)$, $(3,5)$, $(3,7)$, $(3,8)$, $(4,5)$, $(4,7)$, $(4,9)$,

$(5,6)$, $(5,7)$, $(5,8)$, $(5,9)$, $(6,7)$, $(7,8)$, $(7,9)$, $(8,9)$

의 15가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$

25) 정답 ①

$\left(x^2+\frac{5}{x}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{5}{x}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r5^rx^{2n-3r}$

상수항은 $2n-3r=0$, 즉 $2n=3r$일 때이므로

0이 아닌 상수항이 존재하려면 $n=3k$, $r=2k$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.

따라서 구하는 10이하의 자연수 n은 10이하의 3의 배수이므로 값의 합은 $3+6+9=18$이다.

26) 정답 ④

주머니 A, B에서 꺼낸 구슬에 적혀 있는 숫자가 짝수인 사건을 각각 A, B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\cdot\mathrm{P}(B|A^C)}\\&=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}\\&=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{3}{10}}=\frac{16}{16+18}=\frac{8}{17}\end{aligned}$$

27) 정답 ②

$E(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge 19)=P(\overline{X}\le 21)$에서 $m=20$임을 알 수 있다.

따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(20,4^2)$, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포는 $N\left(20,\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge 19)=0.8944$에서

$Z=\frac{19-20}{\frac{4}{5}}=-\frac{5}{4}=-1.25$이므로

$P(Z\ge -1.25)=0.8944$⇨$P(0\le Z\le 1.25)=0.3944\cdots$㉠

한편,

$P(X\le 15)+P(\overline{X}\le 22)$

$=P\left(Z\le \frac{15-20}{4}\right)+P\left(Z\le \frac{22-20}{\frac{4}{5}}\right)$

$=P(Z\le -1.25)+P(Z\le 2.5)$

$=0.5-0.3944+P(Z\le 2.5)=1.0994$

따라서 $P(Z\le 2.5)=1.0994-0.1056=0.9938$

그러므로 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938\cdots$㉡

$P(10\le X\le 25)$

$=P\left(\frac{10-20}{4}\le Z\le \frac{25-20}{4}\right)$

$=P(-2.5\le Z\le 1.25)$

$=P(-2.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.25)$

$=P(0\le Z\le 2.5)+P(0\le Z\le 1.25)$

$=0.4938+0.3944$ (∵ ㉠, ㉡)

$=0.8882$

28) 정답 ⑤

조건 (가)에 의하여

$f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$ 또는 $f(3)=6$

(i) $f(3)=2$인 경우

두 조건 (나), (다)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_2=25$

이고, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=8$

따라서 함수 f의 개수는 $25\times 8=200$

(ii) $f(3)=4$인 경우

두 조건 (나), (다)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2=9$

이고, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=64$

따라서 함수 f의 개수는 $9\times 64=576$

(iii) $f(3)=6$인 경우

두 조건 (나), (다)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_1\Pi_2=1$

이고, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6\Pi_3=216$

따라서 함수 f의 개수는 $1\times 216=216$

(i), (ii), (iii)에서

$200+576+216=992$

29) 정답 25

$a+b+c+d+e=1$, a,b,c,d,e가

이 순서대로 등차수열을 이루므로,

$c=\frac{1}{5}$, $a+e=\frac{2}{5}$임을 알 수 있다.

따라서

$E(X)=10\times P(X=3)=2$이며,

$E(X^2)=\frac{25}{2}\times\frac{2}{5}=5$이다.

한편, $Y=5X+2$의 관계이므로,

$V(5X+2)=25V(X)=25\{E(X^2)-\{E(X)\}^2\}$이므로,

$V(Y)=25\times 1=25$임을 알 수 있다.

30) 정답 371

선택된 20개의 지폐 중 오만원짜리, 만원짜리, 오천원짜리, 천원짜리 지폐의 개수를 각각 a, b, c, d라고 하자.

(i) $3\le a\le 10$, $3\le b\le 10$, $3\le c\le 10$, $3\le d\le 10$ 일 때

$a+b+c+d=24$에서

$a'=a-3$, $\cdots$, $d'=d-3$ 라 두면

$0\le a'\le 7$, $0\le b'\le 7$, $0\le c'\le 7$, $0\le d'\le 7$

$a'+b'+c'+d'=12$

⇨ ${}_4H_{12}-{}_4C_1\times{}_4H_4={}_{15}C_3-{}_4C_1\times{}_7C_4=455-140=315$

(ii) $3\le c\le 10$, $d=0$인 경우

$a+b+c=24$에서

$a'=a-3$, $\cdots$, $c'=c-3$ 라 두면

$0\le a'\le 7$, $0\le b'\le 7$, $0\le c'\le 7$

$a'+b'+c'=15$이다.

$a'+b'+c'=15$의 경우의 수는 $a'+b'+c'=6$의 경우와 같다.

⇨ ${}_3H_6={}_8C_2=28$

(iii) $c=0$, $3\le d\le 10$인 경우 → (ii)와 같다.

⇨ ${}_3H_6={}_8C_2=28$

(iv) $c=0$, $d=0$인 경우

$a+b=24$에서

만족하는 경우의 수는 존재하지 않는다.

따라서 (i)~(iv)에서

$a=315+28+28=371$

미적분

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

23) 정답 ①

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9^n+2\cdot 3^{n+2}}-3^n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 3^{n+2}}{\sqrt{9^n+2\cdot 3^{n+2}}+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{18}{\sqrt{1+9\left(\frac{1}{3}\right)^n}+1}$

$=9$

24) 정답 ①

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\dfrac{4}{5}$

$5(\tan\alpha-1)=4(1+\tan\alpha)$

$\tan\alpha=9$

25) 정답 ②

$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{a}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{1-\frac{a}{t^2}}=\dfrac{2t^3}{t^2-a}$

$t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 $\dfrac{2}{1-a}=-2$이므로 $1-a=-1$

$\therefore\ a=2$

26) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$x=t$일 때, x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{8\ln(t^2+1)}}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2=\sqrt{3}\times\dfrac{2t^3\ln(t^2+1)}{t^2+1}$

따라서 입체도형의 부피 V는 다음과 같다.

$\ln(t^2+1)=s$라 두면

$V=\sqrt{3}\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^k-1}}t^2\times\dfrac{2t\ln(t^2+1)}{t^2+1}dt$

$=\sqrt{3}\int_1^k(e^s-1)s\,ds$

$=\sqrt{3}\left[(e^s-s)s-\left(e^s-\frac{1}{2}s^2\right)\right]_1^k$

$=\sqrt{3}\left[\left\{(e^k-k)k-\left(e^k-\frac{1}{2}k^2\right)\right\}-\left\{(e-1)-\left(e-\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

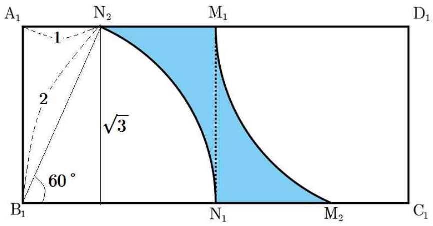
$=\sqrt{3}\left\{(k-1)e^k-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}\right\}=\sqrt{3}\left(e^2-\frac{3}{2}\right)$

따라서 $k=2$이다.

27) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

S_1은 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이 $4\sqrt{3}$에서 도형 $A_1B_1N_1N_2$의 넓이 2배를 빼면 된다.



$A_1B_1N_1N_2=\triangle A_1B_1N_2+$부채꼴$N_2B_1N_1$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{3}\pi$

따라서

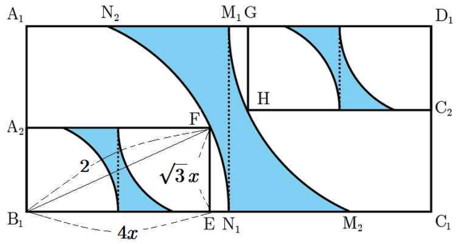
$S_1=4\sqrt{3}-2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$

다음 그림과 같이 $\overline{B_1F}=2$이고

$\overline{A_2B_1}:\overline{B_1E}=\sqrt{3}:4$ 이므로

$\overline{A_2B_1}=\sqrt{3}x$, $\overline{B_1E}=4x$ 라 두자.



직각삼각형 FB_1E에서

$(\sqrt{3}x)^2+(4x)^2=2^2 \Rightarrow 19x^2=4$, $x=\dfrac{2}{\sqrt{19}}$

따라서 $\overline{A_2B_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

직사각형의 닮음비가 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_1}=\sqrt{3}:\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

따라서 넓이비는 $(\sqrt{3})^2:\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)^2=3:\dfrac{4\times 3}{19}=19:4$

개수가 2배씩 증가하므로 공비는 $2\times\dfrac{4}{19}=\dfrac{8}{19}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{8}{19}} = \frac{19}{11}\times\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$$

28) 정답 ②

삼각형 PQR은 원점 O을 지나고 직선 l에 수직인 직선이 l로 나누어진 부분의 큰 쪽의 호와 만나는 점이 R일 때 최대가 된다. (밑변이 $\overline{PQ}$라면 높이가 점 R에서 직선 l까지 거리가 된다. 이때, 거리가 최대이다.)

따라서 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OA}=1$, $\angle OAH=\theta$에서

$\overline{OH} = \overline{OA}\sin\theta=\sin\theta$이다.

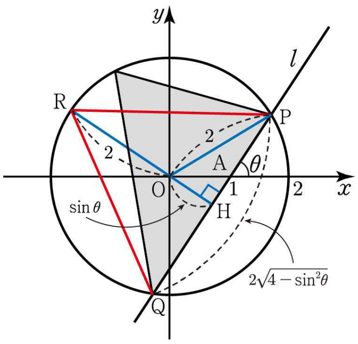
따라서 $\overline{RH} \le 2+\sin\theta$ ($\because \overline{RH} \le \overline{RO}+\overline{OH}$)

$\overline{OP}=2$이므로 직각삼각형 OPH에서 피타고라스 성질을 이용하면

$\overline{PH} = \sqrt{4-\sin^2\theta}$

따라서 $\overline{PQ} = 2\sqrt{4-\sin^2\theta}$

그러므로



$$\triangle PQR \le \frac{1}{2}\times(2+\sin\theta)\times 2\sqrt{4-\sin^2\theta}$$
$$=(2+\sin\theta)\sqrt{4-\sin^2\theta}$$

따라서 $S(\theta)=(2+\sin\theta)\sqrt{4-\sin^2\theta}$이다.

그러므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{S(\theta)}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2+\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[\,2\theta-\cos\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2\pi-3+3\sqrt{3}}{6}$$

[다른 풀이]

직선 l은 기울기가 $\tan\theta$이고 $(1,0)$을 지나므로

$l : y=\tan\theta(x-1)$ ⇨ $\tan\theta x-y-\tan\theta=0$이다.

삼각형 PQR은 원점 O을 지나고 직선 l에 수직인 직선이 l로 나누어진 부분의 큰 쪽의 호와 만나는 점이 R일 때 최대가 된다. (밑변이 $\overline{PQ}$라면 높이가 점 R에서 직선 l까지 거리가 된다. 이때 거리가 최대이다.)

따라서 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = \frac{|-\tan\theta|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\sin\theta$$

29) 정답 4

(가)에서 $g(a)=f(a)$이므로 $\ln f(a)=1$이다.

따라서 $f(a)=e$

$\therefore\ f(x)=k(x-a)^2+e\ \ (k<0)\ \cdots$㉠

$\therefore\ M=e$

한편,

$$g'(x)=f'(x)\ln\{f(x)\}+f(x)\times\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$=f'(x)\{\ln f(x)+1\}$$

$g'(x)=0$의 해는 $f'(x)=0$ 또는 $\ln f(x)+1=0$을 만족하는 x값들이다.

$f'(x)=0$의 해는 $x=a$이고 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 가지므로

$\ln f(x)+1=0$의 해에서 함수 $g(x)$는 최솟값을 갖는다.

$\ln f(x)=-1$

$$f(x)=\frac{1}{e}$$
$$k(x-a)^2+e=\frac{1}{e}$$
$$-k(x-a)^2=e-\frac{1}{e}$$
$$(x-a)^2=-\frac{1}{k}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$
$$x-a=\pm\sqrt{-\frac{1}{k}\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$
$$x=a\pm\sqrt{-\frac{1}{k}\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

따라서 (나)에서 $\left(b+\sqrt{e-\frac{1}{e}}\right)-b=\sqrt{e-\frac{1}{e}}$이므로

$$2\sqrt{-\frac{1}{k}\left(e-\frac{1}{e}\right)}=\sqrt{e-\frac{1}{e}}$$
$$\sqrt{-\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{k}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ k=-4$

그러므로 $f(x)=-4(x-a)^2+e$이고

$M-f(a+1)=e-(-4+e)=4$이다.

[랑데뷰팁]

최솟값은 $x=a\pm\frac{1}{2}\sqrt{e-\frac{1}{e}}$ 일 때이므로

$f\left(a\pm\frac{1}{2}\sqrt{e-\frac{1}{e}}\right)=\frac{1}{e}$에서

$g\left(a\pm\frac{1}{2}\sqrt{e-\frac{1}{e}}\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

㉠의 이차항의 계수 k값에 관계없이 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 e와 $-\frac{1}{e}$로 일정하다.

30) 정답 109
[그림 : 이정배T]

(가)에서 $x\to 0$일 때, 분모가 0이므로 분자도 0이어야 한다.
$\sin f(0)=0$이므로 $f(0)=n\pi$ (n은 정수)이다.
$h(x)=\sin f(x)$라 하면 $h(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-g(0)}{x}=h'(0)=9$이다.

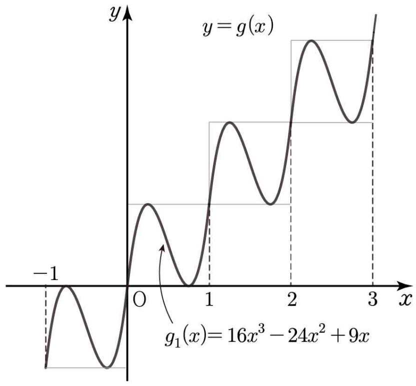
즉, $h'(x)=\cos(f(x))f'(x)$이므로
$h'(0)=\cos n\pi\times f'(0)=9$
$\cos n\pi=\pm 1$이므로 $f'(0)=\pm 9$이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$에서 $g(0)=f(0)-f(0)=0$이고
$g'(0)=f'(0)=\pm 9$이다.
$g(x+1)=g(x)+1$에서
$1\le x<2$의 함수 $g(x)$는 $0\le x<1$의 $f(x)-f(0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다. 또한 실수 전체의 집합에서 미분가능이므로 $x=1$에서 미분가능이어야 한다.
삼차함수 $f(x)$가 두 극값이 존재하고 $f'(0)=f'(1)$이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$이어야 한다.

즉, 삼차함수 $f(x)$는 $\left(\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$에 점대칭인 그래프를 갖는다.

이때, 함수 $g'(0)<0$이면 조건을 만족하지 못한다. (두 극값의 차가 1이하인 상황에서 구간이 x축의 방향으로 1만큼 평행이동할 때, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하므로 전체적으로 증가하는 그래프가 나타나야 한다.)
따라서
$g(0)=0,\ g(1)=1$
$g'(0)=f'(0)=9$이고 $g'(1)=f'(1)=9$이다.
$0\le x<1$일 때, $g(x)=ax^3+bx^2+cx$라 하면
$g(1)=1$에서 $a+b+c=1$
$g'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $g'(0)=9$이므로 $c=9$
$\therefore\ a+b=-8$
$g'(1)=3a+2b+9=9$
$\therefore\ 3a+2b=0$
따라서 $a=16,\ b=-24$이다.
$0\le x<1$에서
$g(x)=16x^3-24x^2+9x$

함수 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$0\le x<1$에서 $g(x)=g_1(x)$라 두면

$$\int_0^1 g_1(x)=\int_0^1(16x^3-24x^2+9x)dx$$
$$=\left[4x^4-8x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=4-8+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 xg_1(x)=\int_0^1(16x^4-24x^3+9x^2)dx$$
$$=\left[\frac{16}{5}x^5-6x^4+3x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{16}{5}-6+3=\frac{1}{5}$$

$a=16$이므로

$$\int_0^{\frac{a}{4}}xg(x)dx$$
$$=\int_0^4 xg(x)dx$$
$$=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 x\{g_1(x-1)+1\}dx+\int_2^3 x\{g_1(x-2)+2\}dx+\int_3^4 x\{g_1(x-3)+3\}dx$$
$$=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg_1(x-1)dx+\int_1^2 xdx+\int_2^3 xg_1(x-2)dx+\int_2^3 2xdx+\int_3^4 xg_1(x-3)dx+\int_3^4 3xdx$$

에서 $\int_n^{n+1}xg_1(x-n)dx=\int_0^1(x+n)g_1(x)dx$

$=\int_0^1 xg_1(x)dx+n\int_0^1 g_1(x)dx$이다.

따라서

$$\int_0^4 xg(x)dx$$
$$=4\int_0^1 xg(x)dx+(1+2+3)\int_0^1 g_1(x)dx+\int_1^2 xdx+\int_2^3 2xdx+\int_3^4 3xdx$$
$$=4\times\frac{1}{5}+6\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+5+\frac{21}{2}$$

$=\frac{4}{5}+3+17$

$=\frac{104}{5}$

$p=5,\ q=104$이므로 $p+q=109$

[랑데뷰팁]

$x=\frac{1}{2}$에서 변곡점을 갖고 극댓값이 1, 극솟값이 0, $g(0)=0$인 상황에서 삼차함수 비율 관계를 고려하면 $0 \le x < 1$에서 $g(x)=16x\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$임을 알 수 있다.

기하

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

23) 정답 ③

점 A$(1, 2, 3)$을 x축, y축에 대하여 대칭이동시킨 두 점 B, C의 좌표는 B$(1, -2, -3)$, C$(-1, 2, -3)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

24) 정답 ⑤

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=16 \quad \cdots ㉠$

주축의 길이가 6이므로 $a=3$을 ㉠에 대입하여 구하면

$9+b^2=16,\ b=\sqrt{7}$

점근선 중 기울기가 양수인 점근선 l의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{7}}{3}x$

따라서 점 $F(4, 0)$과 직선 $\sqrt{7}x-3y=0$사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{7}\times 4-3\times 0|}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(-3)^2}}=\frac{4\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$

25) 정답 ④

$\vec{p}=(a,\ b)$라면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$이고 $\vec{p}\cdot\vec{a}=2a$이므로 $\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$에서 $2a=6$이므로 $a=3$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 할 때, 점 P는 $x=3$ 위의 점이다.

$\vec{q}=(x,\ y)$라면 $|\vec{q}-\vec{c}|=1$에서 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$이다.

그러므로 $|\vec{p}-\vec{q}|$는 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$위의 점에서 직선 $x=3$까지 거리이므로 최솟값은 점 $(-1,\ 1)$에서 $x=3$까지 거리에서 반지름의 길이 2을 빼면 된다.

그러므로 $4-2=2$이다.

26) 정답 ④

포물선 $y^2=4px$의 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

원 C는 중심이 $(p, 0)$이고 직선 $x=-p$에서 접하므로 원 C의 반지름의 길이는 $p-(-p)=2p$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FA}}=2p$

즉, 점 A의 x좌표는 p이고 y좌표는 $2p$이다.

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 A$(p, 2p)$에서의 접선의 방정식은

$2py=4p\times\frac{p+x}{2}$

$y=x+p$이다.

접선의 x절편이 $-p$이므로 B$(-p, 0)$이다.

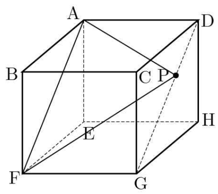
따라서 직각삼각형 ABF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2p)^2=8$

$p^2=4$

$\therefore\ p=2$이다.

27) 정답 ④



점 P는 선분 DG 위의 점이므로 평면 AFP는 평면 ABGD와 같다. 또 평면 EFG는 평면 EFGH와 같으므로 두 평면 AFP, EFG가 이루는 각은 평면 ABGD와 평면 EFGH가 이루는 각과 같다. 두 평면의 교선 FG에 수직인 두 모서리 DG와 GH가 이루는 각은 45°이므로

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

28) 정답 ③

단축의 길이가 2이므로 타원의 방정식

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$에서 $b=1$이다.

$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$

$c^2=a^2-b^2=a^2-1$이므로 $c=\sqrt{a^2-1}$이고 이것을 타원의 방정식에 대입하면 $\frac{a^2-1}{a^2}+y^2=1$에서

$y=\pm\frac{1}{a}$이다.

따라서 A$\left(\sqrt{a^2-1},\ \frac{1}{a}\right)$, B$\left(\sqrt{a^2-1}, -\frac{1}{a}\right)$

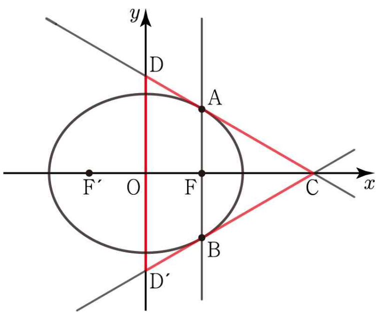
두 점 A, B 가 x축 대칭이므로 두 점에서 접선의 교점은 x축 위에 있다.

점 A에서의 접선의 방정식을 구해보자.

$\frac{\sqrt{a^2-1}x}{a^2}+\frac{1}{a}y=1\cdots ㉠$

㉠의 x축과 y축과의 교점을 각각 C, D라 하고 좌표를 구해보면

$C\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}},\ 0\right)$, $D\,(0,\ a)$



D의 x축 대칭인 점을 $D'(0,\ -a)$라 하면
삼각형 CDD'는 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형이다.

선분 OC가 정삼각형의 높이이므로

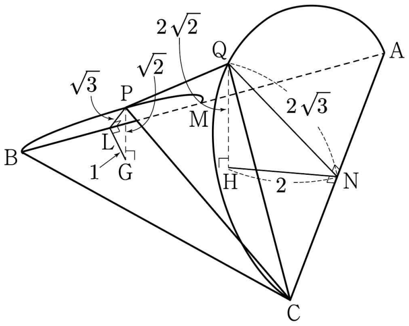
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2a=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\to\sqrt{3}=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\to 3a^2-3=a^2\to a^2=\frac{3}{2}$$

따라서 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$

타원의 장축의 길이는 $2a=\sqrt{6}$이다.

29) 정답 20
[출제자 : 서태욱 답길학원 010-3022-6918]
[그림 : 서태욱T]



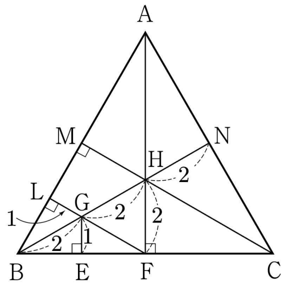
[그림1]

[그림1]에서 선분 BM의 중점을 L, 선분 AC의 중점을 N이라 하면 점 L은 점 P에서 선분 BM에 내린 수선의 발이고
점 N은 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발이다.
이때 삼수선 정리에 의하여 $\overline{PL}\perp\overline{GL}$이므로

$\overline{GL}=\sqrt{\overline{PL}^2-\overline{PG}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$이다.

마찬가지로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{QN}\perp\overline{HN}$이므로

$\overline{HN}=\sqrt{\overline{QN}^2-\overline{QH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=2$이다.

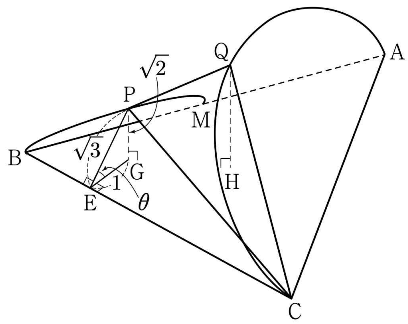


[그림2]

삼각형 ABC를 포함하는 평면을 단면화하여 나타내면

[그림2]에서 $\frac{\overline{GE}}{\overline{BE}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\overline{HF}}{\overline{BF}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 세 점 B, G, H는 한 직선 위에 존재한다.

또, [그림1]에서 $\overline{BG}:\overline{BH}=\overline{PG}:\overline{QH}=1:2$이므로 선분 PQ의 연장선은 삼각형 ABC를 포함하는 평면과 점 B에서 만난다.
즉, 삼각형 PCQ를 포함하는 평면과 삼각형 ABC를 포함하는 평면의 교선은 직선 BC이다.
이제 이면각 θ를 구하기 위해 직선 BC에 수직인 양쪽 평면에 포함된 두 직선을 찾자.



[그림3]

[그림3]에서 삼수선 정리에 의하여 $\overline{PE}\perp\overline{BC}$이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{GE}}{\overline{PE}}$이고 $\overline{PE}=\sqrt{\overline{GE}^2+\overline{PQ}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$이다.

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{GE}}{\overline{PE}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $60\times\cos^2\theta=60\times\frac{1}{3}=20$이다.

30) 정답 64
(가)에서 점 P는 중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.
즉, $P\,(a,\ b)$이면 $(a+1)^2+(b-\sqrt{3})^2=4\cdots$㉠을 만족한다.
(나)에서 $k\neq 0$, $k\neq 1$인 상수이므로 점 O, P, Q 는 서로 다른 세 점이고 한 직선 위에 있다. (다)에서 점 O 를 기준으로 P, Q 는 반대 방향에 위치한다.

따라서 $P\,(a,\ b)$, $Q\,(x,\ y)$라 하면 $\frac{b}{a}=\frac{y}{x}\Rightarrow y=\frac{b}{a}x\cdots$㉡이다.

(다)에서 $ax+by=-4\cdots$㉢
㉡을 ㉢에 대입하면

$ax + \frac{b^2}{a}x = -4 \Rightarrow (a^2+b^2)x = -4a$

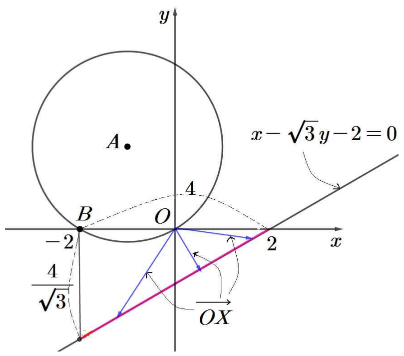
따라서 $x = \frac{-4a}{a^2+b^2}$ 이고 ㉡에 대입하면

$y = \frac{-4b}{a^2+b^2}$ 이다.

한편, ㉠에서 $a^2+b^2 = -2a+2\sqrt{3}b$이므로

$x - \sqrt{3}y = \frac{-4a+4\sqrt{3}b}{-2a+2\sqrt{3}b} = 2$

즉, 점 Q는 직선 $x-\sqrt{3}y-2=0$위의 점이다.
직선 $x-\sqrt{3}y-2=0$위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각을 θ라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\theta$ 이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}| \le 4$에서 $-2 \le |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\theta \le 2$이다.



따라서 그림과 같이 X가 나타내는 도형의 길이 $l = \frac{8}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore\ 3l^2 = 3 \times \frac{64}{3} = 64$