수학 공통 빈칸 대비 특강자료 (by 태태)

수학 빈칸 문제는 표면적으로는 어떠한 문제를 풀어가거나 증명하는 과정을 이해하는 것을 요하는 것처럼 보인다.

그러나 평가원은 관대하다!!

그 과정을 이해하지 못하더라도 앞에서 나온 정보를 이용해 답을 “무조건” 구할 수 있다.

Tip)

1. 힌트
   = 빈칸이 포함된 식과 똑같은 모양 찾기!

2. 힌트는 빈칸이 나온 식 위에서 찾는다
   1) 빈칸 바로 위를 먼저 본다
   2) 없으면 위로 가면서 같은 모양을 찾는다
   3) 바로 위가 아니면 맨 위에 있는 경우가 많다

3. 빈칸 이전과 비교해 뭐가 바뀌었는지 관찰한다.

4. 과정이 이해가 잘 안된다면 빈칸만 남기고 나머지를 넘긴다.

<cf.>

지난 교육과정에서 빈칸 문제가 확통에서 나왔기 때문에 평가원 문제는 최근 기출 4문항만 수록했습니다.

6월, 9월 평가원 모의고사에서는 빈칸 문제가 출제되지 않았으나 예비시행에서 출제되었고, 수능 단골 유형이므로 방심하지 말고 대비하시는 것을 추천드립니다.

<활용하기>

2페이지 두 문제의 Tip)을 활용한 손풀이를 3,4페이지에 수록했습니다. 2페이지 두 문제를 푼 다음 3,4페이지를 보면서 Tip 활용법을 익힌 후 나머지 문제들을 풀어보세요.

시간이 너무 없어서 첫 두 문항을 제외한 나머지는 ebs 해설로 대체하겠습니다 ㅠㅠ 하지만 문제를 풀 때는 Tip을 최대한 활용하면서 풀어보세요!!

<차례>

p.2 # 1~2
p.3~4 # 1~2 손풀이
p.5~9 # 3~12
p.10~13 # 3~12 해설

1. 2022 예시문항 13번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ 을 구하는 과정이다.

$n=1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a_1}=2$이다.

$n=2$일 때, $a_2 = S_2 - S_1 = -\frac{7}{6}$이므로 $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7}$이다.

$n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{S_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k!} = -\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$

즉, $S_n = -\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$이므로

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -\left(\boxed{(나)}\right)$$

이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n} k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^{n} k(k+1)$$

$$= \frac{64}{7} - \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \boxed{(다)}$$

$$= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5) \times g(3) \times h(6)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2. 수완 실전 모의고사 4회 13번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $3S_n=(n+2)a_n$이 성립할 때, $a_n=pn^2+qn$이다. 다음은 상수 p, q를 구하고, 이를 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

$a_1=1$이고, $3S_n=(n+2)a_n$에서
$n=2$일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$
이므로 $a_2=3$이다.
즉, $\begin{cases} p+q=1 \\ 4p+2q=3 \end{cases}$
이므로 연립방정식을 풀면
$p=\boxed{(가)}$, $q=\boxed{(나)}$이다.
따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=\boxed{(가)}\times n^2+\boxed{(나)}\times n$ ...... (*)
이다.
(i) $n=1$일 때,
$a_1=\boxed{(가)}\times 1^2+\boxed{(나)}\times 1=1$
이므로 (*)이 성립한다.
(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
$a_m=\boxed{(가)}\times m^2+\boxed{(나)}\times m$
한편, $3S_n=(n+2)a_n$에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$이므로
$a_{m+1}=\boxed{(다)}\times a_m=\frac{1}{2}\times\boxed{(라)}$이다.
따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 α, β라 하고 (다), (라)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

1. 2022 예시 #13

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}}$$

①

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$을 구하는 과정이다.

$n=1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a_1} = 2$이다.

$n=2$일 때, $a_2 = S_2 - S_1 = -\frac{7}{6}$이므로 $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7}$이다.

$n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{S_n}{n!} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!}} - \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k!}} = -\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$

즉, $\boxed{S_n = -\frac{\boxed{(가)}}{n+1}}$이므로

②

$$a_n = \boxed{S_n} - \boxed{S_{n-1}} = -\left(\boxed{(나)}\right)$$

이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n} k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \boxed{\frac{8}{7} - \sum_{k=3}^{n} k(k+1)}$$

⑤

$$= \boxed{\frac{64}{7} - \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \boxed{(다)}}$$

$$= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5) \times g(3) \times h(6)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

(가) ① $\boxed{\text{Tip1}}$ $\boxed{}$과 같은 모양을 찾는다.

$\boxed{\text{Tip2-1}}$ 바로위를 확인한다. ⟶ 없음.

$\boxed{\text{Tip2-3}}$ 맨 위에서 같은 모양 찾음.

② 같은 모양을 찾았으면 그대로 대입한다.

$$\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{-n}{(n+1)!}$$

$\therefore f(n) = n$

(나) ③ $\boxed{\text{Tip1}}$ $\boxed{}$과 같은 모양을 찾는다.

$\boxed{\text{Tip2-1}}$ 바로위를 확인한다. ⟶ 찾음

④ 같은 모양을 찾았으면 그대로 대입한다.

$$-\frac{n}{n+1} - \left(-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{-n^2+n^2-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n^2+n}$$

$\therefore g(n) = \frac{1}{n^2+n}$

(다) ⑤ 어? 이게 뭐징 ๑^๑?

⇒ $\boxed{\text{Tip3}}$ 위아래 달라진 것을 비교한다.

⇒ $\sum_{k=3}^{n} \to \sum_{k=1}^{n}$으로 바뀌면서 새로운 것들이 추가됨.

$\therefore$ 우선 $\sum_{k=3}^{n}$을 $\sum_{k=1}^{n}$으로 바꿔보자 $\left(\sum_{k=3}^{n} = \sum_{k=1}^{n} - \sum_{k=1}^{2}\right)$

$$\frac{8}{7} - \left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) - \sum_{k=1}^{2} k^2+k\right\}$$

⑥ 식 정리 후 비교

$$= \frac{8}{7} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\text{이것만 남음.}} - \sum_{k=1}^{n} k + 8$$

$\therefore h(k) = k^2$

$f(5) \times g(3) \times h(6)$

$= 5 \times \frac{1}{12} \times 36 = 15$

$\therefore$ ⑤

2. 수완 실전4 #13

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $3S_n=(n+2)a_n$이 성립할 때, $a_n=pn^2+qn$이다. 다음은 상수 p, q를 구하고, 이를 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> $a_1=1$이고, $3S_n=(n+2)a_n$에서
> $n=2$일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$
> 이므로 $a_2=3$이다.
> 즉, $\begin{cases} p+q=1 \\ 4p+2q=3 \end{cases}$
> 이므로 연립방정식을 풀면
> $p=\boxed{\text{(가)}}$, $q=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $a_n=\boxed{\text{(가)}}\times n^2+\boxed{\text{(나)}}\times n$ ······ ($*$)
> 이다.
> (i) $n=1$일 때,
> $a_1=\boxed{\text{(가)}}\times 1^2+\boxed{\text{(나)}}\times 1=1$
> 이므로 ($*$)이 성립한다.
> (ii) $n=m$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면
> $a_m=\boxed{\text{(가)}}\times m^2+\boxed{\text{(나)}}\times m$
> ①
> 한편, $3S_n=(n+2)a_n$에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$이므로
> $a_{m+1}=\boxed{\text{(다)}}\times a_m=\frac{1}{2}\times\boxed{\text{(라)}}$이다.
> 따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ($*$)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 α, β라 하고 (다), (라)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

(가) & (나) "시키는 대로 한다"

$\rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$

(다) ① $\boxed{\text{Tip 1}}$ $\boxed{}$과 같은 모양 찾는다.

② 대입한다.

$\frac{1}{2}(m+1)^2+\frac{1}{2}(m+1)=(\text{다})\times\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m\right)$

⇒ @_@?? 어떻게 하라는거지... 과정 이해 안됨

→ ③ $\boxed{\text{Tip 4}}$ 그냥 빈칸만 남기고 다 넘겨!

$(\text{다})=\dfrac{\frac{1}{2}(m+1)^2+\frac{1}{2}(m+1)}{\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m\right)}=\dfrac{\frac{1}{2}(m+1)(m+2)}{\frac{1}{2}(m+1)\cdot m}=\dfrac{m+2}{m}$

(라) (다), a_m에 구한것 대입

$(\text{라})=\frac{m+2}{m}\times m(m+1)=(m+2)(m+1)$

$\therefore f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=f(1)+g(4)$

$=3+30=33$ $\therefore$ ②

<u>3. 2021 6평 가형 15번</u>

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n} \;\cdots\cdots\; (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= 2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m} \\ &\quad +(2^{2m+2}-1)\times\boxed{(가)}+m\times 2^{-m-1} \\ &=\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m} \\ &=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

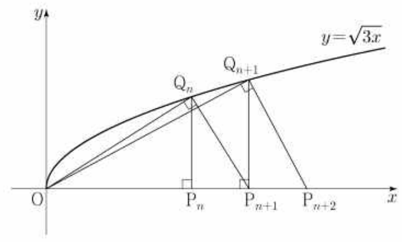
① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

<u>4. 2021 9평 가형 16번</u>

모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 P_nQ_n이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 Q_nP_{n+1}이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.
$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OP_n}+\overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{P_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 OP_nQ_n과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{OP_n}:\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

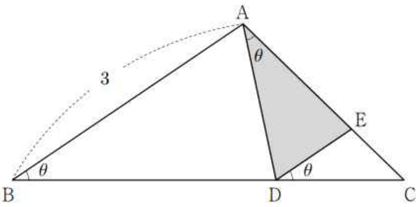
이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

5. 2021 고2 6월 17번

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 인 임의의 실수 θ에 대하여 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{CAB}=3\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 D를 $\angle\mathrm{DAC}=\theta$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 점 E를 $\angle\mathrm{EDC}=\theta$가 되도록 잡는다. 다음은 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$를 구하는 과정이다.



> $\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{DAB}=2\theta$이므로 $\angle\mathrm{BDA}=\pi-3\theta$이다.
>
> 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\boxed{(가)}}$$
>
> 이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{3\sin\theta}{\boxed{(가)}}$이다.
>
> 또한 $\angle\mathrm{ADE}=2\theta$이므로
>
> $$\overline{\mathrm{DE}}=\boxed{(나)}\times\overline{\mathrm{AD}}^2$$
>
> 이다. 따라서 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$는
>
> $$S(\theta)=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)^3\times\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

6. 2021 고2 9월 16번

수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)\quad\cdots(\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
>
> (좌변)$=a_1$, (우변)$=a_2-\boxed{(가)}=1=a_1$
>
> 이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때, $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면
>
> $$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$$
>
> 이다.
>
> $n=m+1$일 때, $(\bigstar)$이 성립함을 보이자.
>
> $$\begin{aligned}&a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}\\&=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}\\&=(m+1)a_{m+1}\left(\boxed{(나)}+1\right)-\frac{m(m+1)}{4}\\&=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{(다)}\right)-\frac{m(m+1)}{4}\\&=\frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)\end{aligned}$$
>
> 따라서 $n=m+1$일 때도 $(\bigstar)$이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$$
>
> 이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(5)}{g(3)}$의 값은? [4점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

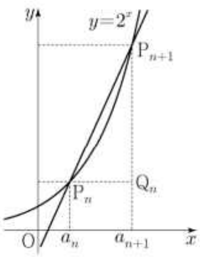
7. 2021 수능 가형 16번

상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이고
> 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.

다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.



> 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로
>
> $2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$
>
> 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
> $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
> 점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1},\ 2^{a_n})$이므로
>
> $A_n=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$
>
> 이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{(가)}$이고,
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
>
> $a_n=\boxed{(나)}$
>
> 이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118　② 121　③ 124　④ 127　⑤ 130

8. 수완 수열 34번

다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 등식

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$

$=\dfrac{n(2n^2+1)}{3}$ …… (∗)

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=2$일 때, (좌변)$=6$, (우변)$=6$이므로 (∗)이 성립한다.
> (ii) $n=m\ (m\ge 2)$일 때, (∗)이 성립한다고 가정하면
>
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$
>
> $=\dfrac{m(2m^2+1)}{3}$
>
> 이다.
> 위 등식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하여 정리하면
>
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+\boxed{(가)}+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$
>
> $=\dfrac{m(2m^2+1)}{3}+\boxed{(가)}$
>
> $=\dfrac{m(2m+1)(m+1)}{3}+\boxed{(나)}$
>
> $=\dfrac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3}$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (∗)이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (∗)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(3)+g(4)$의 값을 구하시오.

9. 수완 실전 모의고사 1회 11번

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3 \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=3a_2-S_1$

$=3a_2-a_1$

$=3\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=4$

(우변)$=4$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$(k+2)a_{k+1}-S_k=k+3$

$(\boxed{\text{(가)}})a_{k+1}-S_{k+1}=k+3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a_{k+1}=a_{k+2}-\boxed{\text{(나)}}$이므로

㉠에 이 식을 대입하면

$(k+3)a_{k+2}-S_{k+1}=\boxed{\text{(다)}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $\dfrac{f(12)\times g(2)}{h(2)}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

10. 수완 실전 모의고사 2회 13번

모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k^5,\ b_n=\sum_{k=1}^{n}k^7$$

을 각각 만족시킨다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4 \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^5+1^7=2$, (우변)$=\frac{1}{8}\times2^4=2$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_m+b_m=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4$

이다. $n=m+1$일 때

$a_{m+1}+b_{m+1}$

$=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4+\boxed{\text{(가)}}$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4[m^4+(\boxed{\text{(나)}})\times\{(m+2)^2+m^2\}]$

$=\frac{1}{8}\{\boxed{\text{(다)}}\}^4$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(1)+g(3)+h(5)$의 값은? [4점]

① 210 ② 212 ③ 214 ④ 216 ⑤ 218

11. 수완 실전 모의고사 3회 13번

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$a_n=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}\ (n\ge2)$$

가 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

(단, $3S_n+1\ne0$, $S_n\ne0$)

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1}$ …… ㉠

이므로 $S_n-S_{n-1}=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}$, 즉

$(S_n-S_{n-1})(3S_n+1)=3S_n^2$

$(1-3S_{n-1})S_n=S_{n-1}$

이므로 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}+\boxed{(가)}$, $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$이다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공차가 $\boxed{(가)}$인 등차수열

이다.

그러므로 $S_n=\boxed{(나)}$

㉠에서 $a_n=\boxed{(다)}\ (n\ge2)$

따라서 $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \boxed{(다)} & (n\ge2)\end{cases}$

위의 (가)에 알맞은 수를 k, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $kf(3)g(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{17}{100}$ ③ $\frac{9}{50}$ ④ $\frac{19}{100}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

12. 수완 실전 모의고사 5회 13번

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\frac{(4n+1)\times(2n)!}{2\times n!}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1 \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=5$, (우변)$=5$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1+\frac{\boxed{(가)}}{2\times(m+1)!}$$

$$=\frac{\boxed{(나)}\times(2m+1)!}{(m+1)!}-1$$

$$=\frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!}-1$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(1)+g(2)$의 값은? [4점]

① 256 ② 258 ③ 260 ④ 262 ⑤ 264

<해설>

3번

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}$$

$$= 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$$
$$+ \{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{(m+1)m} + m\times 2^{-(m+1)}$$

$$= 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$$
$$+ (2^{2m+2}-1)\times \boxed{2^{m(m+1)}} + m\times 2^{-m-1}$$

$$= \boxed{2^{m(m+1)}} \times \boxed{2^{2m+2}} - \frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$

$$= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

즉, $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$$

정답 ④

4번

모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overline{\mathrm{OP}_n} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1} = a_n + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n : \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$a_n \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = 3a_n$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \boxed{3}$

이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n = 1+(n-1)\times 3$

$= 3n-2$

따라서, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n = \frac{1}{2}\times \overline{\mathrm{OP}_{n+1}} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$$

$$= \frac{1}{2}\times a_{n+1} \times \sqrt{3a_n}$$

$$= \frac{1}{2}\times (\boxed{3n+1}) \times \sqrt{9n-6}$$

이다.

따라서, $p=3$, $f(n)=3n+1$이므로

$p+f(8)=3+25=28$

정답 ⑤

5번

$\angle ABC=\theta$, $\angle DAB=2\theta$ 이므로
$\angle BDA=\pi-3\theta$ 이다.
삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$$

이므로 $\overline{AD}=\dfrac{3\sin\theta}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$ 이다.

또한 $\angle EAD=\theta$ 이고 $\angle ADE=2\theta$ 이므로
$\angle DEA=\pi-3\theta$ 이다.
삼각형 ADE 에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{DE}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\pi-3\theta)}$ 이므로

$$\overline{DE}=\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\times\overline{AD}=\boxed{\frac{1}{3}}\times\overline{AD}^2$$

이다. 따라서 삼각형 ADE 의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DE}\times\sin(\angle ADE)$$

$$=\frac{1}{6}\times\left\{\frac{3\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\right\}^3\times\sin 2\theta$$

$$=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^3\times\boxed{\sin 2\theta}$$

이다.

$f(\theta)=\sin(\pi-3\theta)$, $g(\theta)=\sin 2\theta$, $p=\dfrac{1}{3}$ 이므로

$$p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}\times\sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{6}$$

6번

(ⅰ) $n=1$일 때,
(좌변)$=a_1$,

(우변)$=a_2-\boxed{\dfrac{1}{2}}=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)-\boxed{\dfrac{1}{2}}=1=a_1$

이므로 (★)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 (★)이 성립한다고 가정하면

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$$ 이다.

$n=m+1$일 때 (★)이 성립함을 보이자.

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}$$

$$=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}$$

$$=(m+1)a_{m+1}\left(\boxed{\frac{m}{2}}+1\right)-\frac{m(m+1)}{4}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}a_{m+1}-\frac{m(m+1)}{4}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{\frac{1}{m+2}}\right)-\frac{m(m+1)}{4}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)$$

따라서 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$$

이 성립한다.

$p=\dfrac{1}{2}$, $f(m)=\dfrac{m}{2}$, $g(m)=\dfrac{1}{m+2}$

따라서 $p+\dfrac{f(5)}{g(3)}=13$

7번

$$\frac{A_3}{A_1}=\frac{\frac{1}{2}(a_4-a_3)(2^{a_4}-2^{a_3})}{\frac{1}{2}(a_2-a_1)(2^{a_2}-2^{a_1})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times d\times(2^{1+3d}-2^{1+2d})}{\frac{1}{2}\times d\times(2^{1+d}-2)}$$

$$=2^{2d}$$

이므로

$\dfrac{A_3}{A_1}=16$에서

$2^{2d}=16$

$d=\boxed{2}$

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1+(n-1)d$$
$$=1+(n-1)\times 2$$
$$=\boxed{2n-1}$$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여

$$A_n=\frac{1}{2}\times 2\times(2^{2n+1}-2^{2n-1})$$
$$=\boxed{3\times 2^{2n-1}}$$

따라서

$p=2$, $f(n)=2n-1$, $g(n)=3\times 2^{2n-1}$
이므로

$$p+\frac{g(4)}{f(2)}=2+\frac{3\times 2^7}{3}=130$$

정답 ⑤

8번

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1^2+2^2+1^2=6$

(우변)$=\frac{2\times(2\times2^2+1)}{3}=\frac{18}{3}=6$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq2)$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{m(2m^2+1)}{3}$$

이다.

위 등식의 양변에 $\boxed{(m+1)^2+m^2}$을 더하여 정리하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+\boxed{(m+1)^2+m^2}+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{m(2m^2+1)}{3}+\boxed{(m+1)^2+m^2}$$
$$=\frac{m(2m^2+1)+3m^2}{3}+(m+1)^2$$
$$=\frac{m(2m+1)(m+1)}{3}+\boxed{(m+1)^2}$$
$$=\frac{m(2m+1)(m+1)+3(m+1)^2}{3}$$
$$=\frac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$$
$$=\frac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(m)=(m+1)^2+m^2$, $g(m)=(m+1)^2$이므로

$f(3)=4^2+3^2=16+9=25$, $g(4)=5^2=25$

$f(3)+g(4)=25+25=50$

답 50

9번

(우변)$=4$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$(k+2)a_{k+1}-S_k=k+3$

$(k+2)a_{k+1}-S_k+a_{k+1}-a_{k+1}=k+3$

$(\boxed{k+3})a_{k+1}-S_{k+1}=k+3$ …… ㉠

$a_{k+2}=a_{k+1}+\frac{1}{k+3}$에서 $a_{k+1}=a_{k+2}-\boxed{\frac{1}{k+3}}$이므로

㉠에 이 식을 대입하면

$(k+3)\left(a_{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)-S_{k+1}=k+3$

$(k+3)a_{k+2}-1-S_{k+1}=k+3$

$(k+3)a_{k+2}-S_{k+1}=\boxed{k+4}$

따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$

이다.

이상에서 $f(k)=k+3$, $g(k)=\frac{1}{k+3}$, $h(k)=k+4$이므로

$$\frac{f(12)\times g(2)}{h(2)}=\frac{15\times\frac{1}{5}}{6}=\frac{1}{2}$$

답 ②

10번

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^5+1^7=2$

(우변)$=\frac{1}{8}\times1^4\times(1+1)^4=\frac{1}{8}\times2^4=2$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_m+b_m=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4$

이다. $n=m+1$일 때

$$a_{m+1}+b_{m+1}$$
$$=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4+\boxed{(m+1)^5+(m+1)^7}$$
$$=\frac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+8(m+1)+8(m+1)^3\}$$
$$=\frac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+(4m+4)(2m^2+4m+4)\}$$
$$=\frac{1}{8}(m+1)^4[m^4+(\boxed{4m+4})\{(m+2)^2+m^2\}]$$
$$=\frac{1}{8}(m+1)^4[m^4+\{(m+2)^2-m^2\}\{(m+2)^2+m^2\}]$$
$$=\frac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+(m+2)^4-m^4\}$$
$$=\frac{1}{8}(m+1)^4(m+2)^4$$
$$=\frac{1}{8}\{\boxed{(m+1)(m+2)}\}^4$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4$

이다.

이상에서

$f(m)=(m+1)^5+(m+1)^7$

$g(m)=4m+4$

$h(m)=(m+1)(m+2)$

이므로

$f(1)=2^5+2^7=160$

$g(3)=12+4=16$

$h(5)=6\times7=42$

따라서 $f(1)+g(3)+h(5)=160+16+42=218$

답 ⑤

11번

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1}$ …… ㉠

이므로 $S_n-S_{n-1}=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}$, 즉

$(S_n-S_{n-1})(3S_n+1)=3S_n^2$, $3S_n^2+S_n-3S_nS_{n-1}-S_{n-1}=3S_n^2$

$(1-3S_{n-1})S_n=S_{n-1}$

$S_n=\frac{S_{n-1}}{1-3S_{n-1}}$, $\frac{1}{S_n}=\frac{1-3S_{n-1}}{S_{n-1}}$

이므로 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}+\boxed{-3}$, $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$이다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공차가 $\boxed{-3}$인 등차수열이다. 즉,

$\frac{1}{S_n}=-3n+4$, $S_n=\boxed{\frac{1}{4-3n}}$

이다. ㉠에서

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$

$=\frac{1}{4-3n}-\frac{1}{7-3n}=\boxed{\frac{3}{(4-3n)(7-3n)}}$

따라서 $a_n=\begin{cases} 1 & (n=1) \\ \boxed{\dfrac{3}{(4-3n)(7-3n)}} & (n\ge 2) \end{cases}$

그러므로

$k=-3$, $f(n)=\dfrac{1}{4-3n}$, $g(n)=\dfrac{3}{(4-3n)(7-3n)}$

이다.

따라서 $kf(3)g(3)=-3\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{50}$

답 ③

12번

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=5$, (우변)$=5$이므로 ($*$)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1} \\ &= \frac{(2m+1)!}{m!}-1+\frac{\boxed{\{4(m+1)+1\}\times\{2(m+1)\}!}}{2\times(m+1)!} \\ &= \frac{2(m+1)(2m+1)!}{2\times(m+1)!}+\frac{(4m+5)(2m+2)!}{2\times(m+1)!}-1 \\ &= \frac{\{(m+1)+(4m+5)(m+1)\}(2m+1)!}{(m+1)!}-1 \\ &= \frac{\boxed{(2m+3)(2m+2)}\times(2m+1)!}{(m+1)!}-1 \\ &= \frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!}-1\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1$$

이다.

$f(m)=\{4(m+1)+1\}\times\{2(m+1)\}!$, $g(m)=(2m+3)(2m+2)$

이므로

$f(1)+g(2)$

$=\{4\times(1+1)+1\}\times\{2\times(1+1)\}!+(2\times2+3)\times(2\times2+2)$

$=9\times4!+7\times6$

$=216+42=258$

답 ②