

개념 기출 다잡기

지수함수 로그함수 ㄱㄴㄷ

20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ, ㄴ, ㄷ

<보 기>

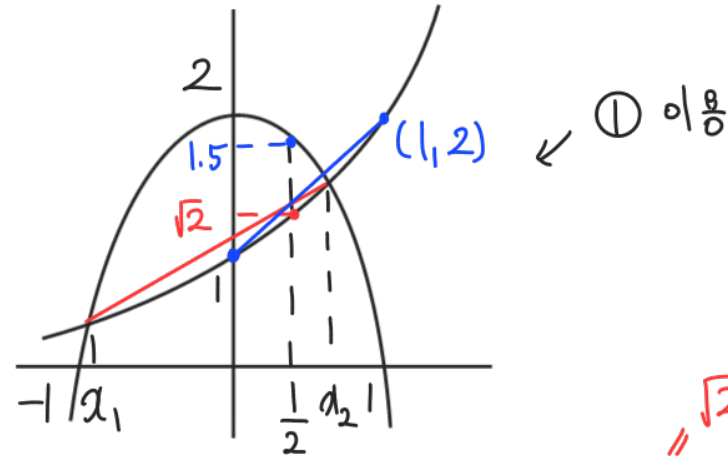
ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

#Comment

- ① 그래프 크게, 비율 맞게 그리기, 정수 격자점 표시
- ② 교점은 대입해서 등식 세워두기
- ③ $f(a), g(a)$ 대소 비교하여 a, x_1 대소 비교하기
- ④ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 은 두 점 사이의 기울기로 해석
- ⑤ $x_1 y_1$ 이나 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ 은 사각형의 넓이
- ⑥ ㄱ의 $\frac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기
- ⑦ 불록성을 이용한 기울기 대소 비교



- ㉠ ③, ⑥ 이용 $x = \frac{1}{2}$ $2^{\frac{1}{2}} < -2(\frac{1}{2})^2 + 2$
- ㉡ ④, ⑦ 이용 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$ (0,1) ~ (1,2) 기울기 두 교점 기울기
- ㉢ ② 이용 $y_1 = 2^{x_1} = -2x_1^2 + 2, y_2 = 2^{x_2} = -2x_2^2 + 2$
 $y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2}$
 $\text{ㄷ} \Leftrightarrow 2^{-\frac{1}{2}} < 2^{x_1 + x_2} < 2^0$
 $-1 < x_1, \frac{1}{2} < x_2$ 이므로 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2$
 그래프에서 $|x_1| > |x_2|$ 이므로 $x_1 + x_2 < 0$
 따라서 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$ 이므로 참

개념 기출 다잡기

지수함수 로그함수 ㄱㄴㄷ

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$ 과 $y=|\log_2 x|$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ, ㄴ, ㄷ

< 보기 >

- ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$
- ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2} - 2}{6}$

① $x = \frac{1}{2}, -\log_2 \frac{1}{2} > 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} < x_1$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, -\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

#Comment

- ① $a < b$ 를 증명하기 위해 사이에 $a < x < b$ 인 x 놓는 센스
- Tip! 1. 보기의 숫자가 이용되는 경우 다수
- Tip! 2. 지수는 밑이 같아야 대소 비교 쉬움
- ② 종종 역함수, 대칭/평행이동 이용

$y = -\log_2 x$

$y = \log_2 x$

$y = 2^{-x}$

$x_1 = y_1$

$\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

① $x = \sqrt{2}, \log_2 \sqrt{2} > 2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 < \sqrt{2}$

$x = \sqrt[3]{2}, \log_2 \sqrt[3]{2} < 2^{-\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{2} < x_2$

② $x_1 = y_1$ (\because 역함수) $3^{-1} < 2^{-1.5} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$ 이용

by ㄱ, $\frac{1}{2} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ \rightsquigarrow ① $y = \log_2 x$

by ㄴ, $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < y_2 < \frac{1}{2}$ \rightsquigarrow ②

① - ② : $0 < y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2} - 2}{6}$

개념 기출 다잡기

지수함수 로그함수 7L2

2021 사관(나) 21번

21. 두 곡선 $y = |2^x - 4|$, $y = \log_2 x$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

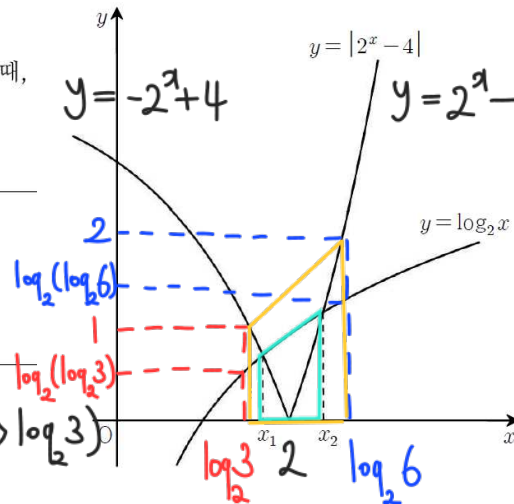
ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 3$

ㄷ. $2^{x_1} + 2^{x_2} > 8 + \log_2(\log_3 6)$

<보기>



㉠

교점 대입

$\rightarrow y_1 = -2^{x_1} + 4 = \log_2 x_1$

$y_2 = 2^{x_2} - 4 = \log_2 x_2$

$\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

$\Rightarrow x_2 - x_1 < \log_2 6 - \log_2 3 = 1$

$2^{x_2} - 2^{x_1} = y_2 + y_1 < 2 + 1 = 3$

$\therefore (x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 1 \times 3 = 3$

㉠ $x = \log_2 3$, $-2^{\log_2 3} + 4 = 1 > \log_2(\log_2 3)$ ($\because 2 > \log_2 3$)

$\therefore \log_2 3 < x_1$

$x = \log_2 6$, $2^{\log_2 6} - 4 = 2 > \log_2(\log_2 6)$ ($\because 4 > \log_2 6$)



$\therefore x_2 < \log_2 6$

사다리꼴 넓이 비교

$\frac{1}{2} \times (x_2 - x_1) \times (y_2 + y_1) < \frac{1}{2} \times (\log_2 6 - \log_2 3) \times (1 + 2)$

$(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 3$

~~$2^{x_1} + 2^{x_2} - 8 > \log_2(\log_3 6)$~~

$\Leftrightarrow y_2 - y_1 > \log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x_2}{x_1} > \log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} > \log_3 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 3}$ (문제 조건은 말이 2)

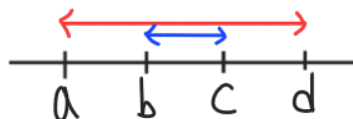
(거짓)

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

② $a < b < c < d$ 이면 $c - b < d - a$ (수직선에 표시해보면 자명) 2

③ $x_1 y_1$ 이나 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ 은 사각형의 넓이

④ $(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) \div 2$ 는 사다리꼴 넓이



개념 기출 다잡기

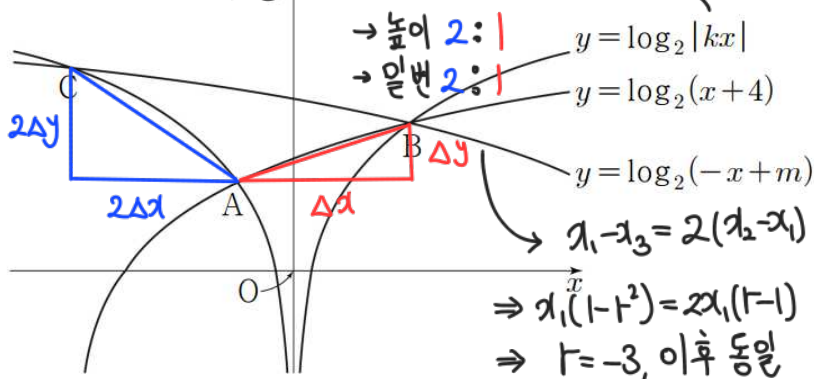
지수함수 로그함수 7L2

20210415

7, L

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k 에 대하여 두 곡선 $y = \log_2 |kx|$ 와 $y = \log_2(x+4)$ 가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y = \log_2(-x+m)$ 이 곡선 $y = \log_2 |kx|$ 와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$ 이고, m 은 실수이다.) [4점]

ㄷ 풀이2: x_1, x_2, x_3 등비 $\rightarrow y_1, y_2, y_3$ 등차



\rightarrow 높이 2:1
 \rightarrow 밑변 2:1
 $x_1 - x_3 = 2(x_2 - x_1)$
 $\Rightarrow x_1(1-t^2) = 2x_1(t-1)$
 $\Rightarrow t = -3$, 이후 동일

<보기>
ㄱ. $x_2 = -2x_1$ 이면 $k=3$ 이다.
ㄴ. $x_2^2 = x_1x_3 \rightarrow$ "①~④에서 m, k 소거해야겠네" \rightarrow "m 소거 간단하게"
ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$ 이다.

#Comment

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

교점은 대입

$$y_1 = \log_2(x_1+4) = \log_2(-kx_1)$$

$$y_2 = \log_2(x_2+4) = \log_2(kx_2) = \log_2(-x_2+m)$$

$$y_3 = \log_2(-x_3+m) = \log_2(-kx_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+4 = -kx_1 \\ x_2+4 = kx_2 = -x_2+m \\ -x_3+m = -kx_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = -4 & \textcircled{1} \\ (k-1)x_2 = 4, (k+1)x_2 = m & \textcircled{2} \\ (k-1)x_3 = -m & \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \Rightarrow \frac{(k+1)x_1}{(k-1)x_2} = -1, \quad k+1 = 2(k-1), \quad \boxed{k=3}$$

$$\textcircled{3} \div \textcircled{4} \Rightarrow \frac{(k+1)x_2}{(k-1)x_3} = -1 \rightarrow \text{"}\textcircled{5} \div \textcircled{6} \text{ 하면 } k \text{ 소거"} \rightarrow x_2^2 = x_1x_3$$

등비수열 $x_2 = x_1r$
 $x_3 = x_1r^2$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\log_2(kx_2) - \log_2(-kx_1)}{(k-1)x_1} + \frac{\log_2(-kx_3) - \log_2(-kx_1)}{(k+1)(k^2-1)x_1} = 0$$

$$(k+1) \log_2(-t) + \log_2 t^2 = \log_2(-t) \quad t+3=0 \Rightarrow t=-3 \Rightarrow x_2 = -3x_1$$

$$-3x_1 = \frac{12}{k+1} \Rightarrow m=12$$

$$x_2 = \frac{4}{k-1} = \frac{m}{k+1} \quad k=2$$

$$\boxed{m+k^2 = 12+4 = 16}$$