20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ,ㄴ,ㄷ

<보 기>

ㄱ. $x_2>\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

#Comment

① 그래프 크게, 비율 맞게 그리기, 정수 격자점 표시

② 교점은 대입해서 등식 세워두기

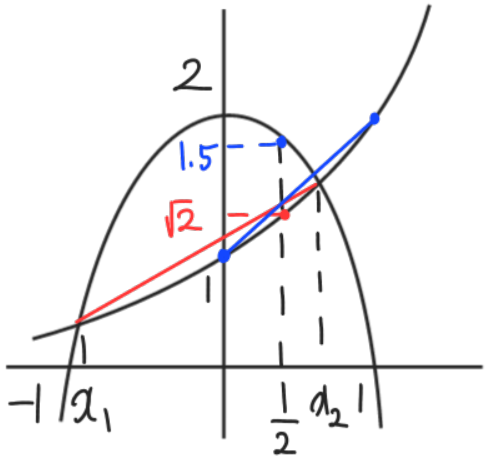
③ $f(a)$, $g(a)$ 대소 비교하여 a, x_1 대소 비교하기

④ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$은 두 점 사이의 기울기로 해석

⑤ x_1y_1이나 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$은 사각형의 넓이

⑥ ㄱ의 $\dfrac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기

⑦ 볼록성을 이용한 기울기 대소 비교



① 이용

ㄱ ③,⑥ 이용 $x=\frac{1}{2}$ $\quad 2^{\frac{1}{2}} < -2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2 = 1.5$

ㄴ ④,⑦ 이용 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} < 1$

두 교점 기울기

(0,1)~(2,1) 기울기

ㄷ ② 이용 $y_1=2^{x_1}=-2x_1^2+2$, $y_2=2^{x_2}=-2x_2^2+2$

$y_1y_2=2^{x_1+x_2}$

ㄷ $\Leftrightarrow$ $2^{-\frac{1}{2}} < 2^{x_1+x_2} < 2^0$

$-1<x_1$, $\frac{1}{2}<x_2$ 이므로 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2$

그래프에서 $|x_1|>|x_2|$ 이므로 $x_1+x_2<0$

따라서 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$ 이므로 참

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$\boxed{ㄱ, ㄴ, ㄷ}$

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

ㄱ $x=\frac{1}{2}$, $\underbrace{-\log_2\frac{1}{2}}_{=1} > \underbrace{2^{-\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}<x_1$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\underbrace{-\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=2^{-1}} < 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\Rightarrow$ $x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

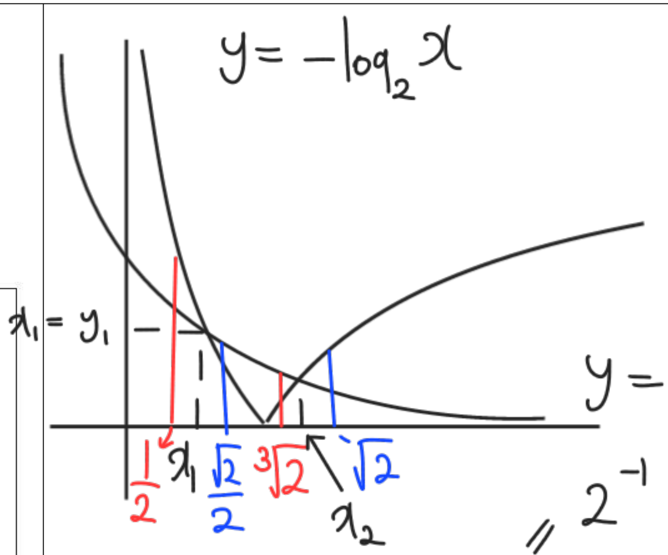
#Comment

① $a<b$를 증명하기 위해 사이에 $a<x<b$인 x 놓는 센스

Tip! 1. 보기의 숫자가 이용되는 경우 다수

Tip! 2. 지수는 밑이 같아야 대소 비교 쉬움

② 종종 역함수, 대칭/평행이동 이용



ㄴ $x=\sqrt{2}$, $\underbrace{\log_2\sqrt{2}}_{=2^{-1}} > 2^{-\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $x_2<\sqrt{2}$

$x=\sqrt[3]{2}$, $\log_2\sqrt[3]{2} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$ $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{2}<x_2$

$3^{-1} < 2^{-1.5} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$ ① 이용

ㄷ $x_1=y_1$ (∵ 역함수)

by ㄱ, $\frac{1}{2}<y_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ① $y=\log_2 x$

by ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{3}<y_2<\frac{1}{2}$ ⋯ ②

① − ② : $0<y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

2021 사관(나) 21번

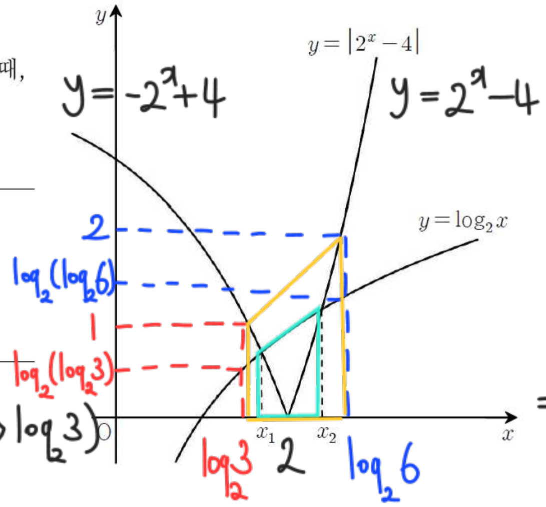
21. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] $\boxed{ㄱ, ㄴ}$

<보 기>

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$



ㄱ $x=\log_2 3$, $-2^{\log_2 3}+4=1>\log_2(\log_2 3)$ $(\because 2>\log_2 3)$

$\therefore \log_2 3<x_1$

$x=\log_2 6$, $2^{\log_2 6}-4=2>\log_2(\log_2 6)$ $(\because 4>\log_2 6)$

$\therefore x_2<\log_2 6$

ㄴ 교점 대입

$\to y_1=-2^{x_1}+4=\log_2 x_1$

$y_2=2^{x_2}-4=\log_2 x_2$

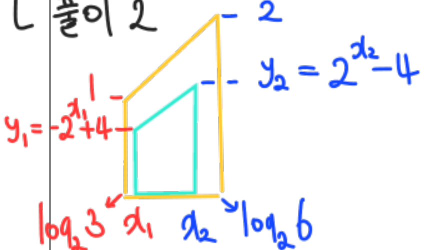
$\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

$\Rightarrow x_2-x_1<\log_2 6-\log_2 3=1$

$2^{x_2}-2^{x_1}=y_2+y_1<2+1=3$

$\therefore (x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<1\times 3=3$

ㄴ 풀이 2



사다리꼴 넓이 비교

$\frac{1}{2}\times(x_2-x_1)\times(y_2+y_1)<\frac{1}{2}\times(\log_2 6-\log_2 3)\times(1+2)$

$(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

$\cancel{ㄷ}$ $2^{x_1}+2^{x_2}-8>\log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow y_2-y_1>\log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow \log_2\frac{x_2}{x_1}>\log_2(\log_3 6)$

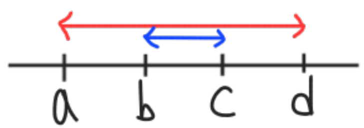
$\Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1}>\log_3 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 3}$ (문제 조건은 밑이 2)

(거짓)

#Comment

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

② $a<b<c<d$이면 $c-b<d-a$(수직선에 표시해보면 자명)



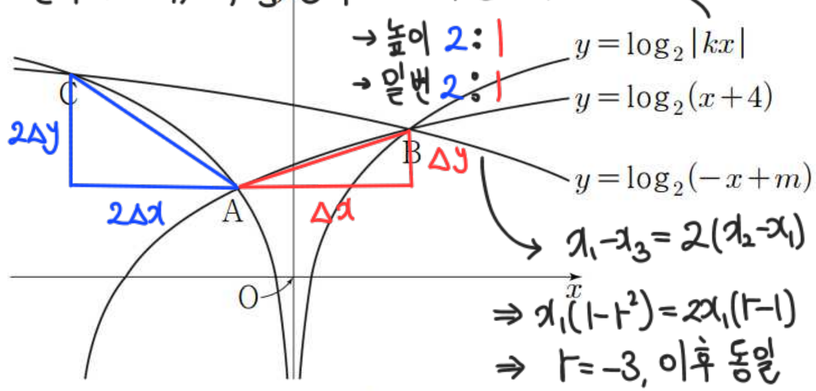
③ x_1y_1이나 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$은 사각형의 넓이

④ $(x_2-x_1)(y_2+y_1)\div 2$는 사다리꼴 넓이

20210415 $\boxed{ㄱ, ㄴ}$

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]

ㄷ 풀이2 : x_1, x_2, x_3 등비 → y_1, y_2, y_3 등차



$x_1 - x_3 = 2(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow x_1(1-r^2) = 2x_1(r-1)$

$\Rightarrow r=-3$, 이후 동일

〈보 기〉

ㄱ. $x_2 = -2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2{}^2 = x_1x_3$ → "①~④에서 m, k 소거해야겠네" → "m 소거 간단하네"

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

#Comment

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

교점은 대입

$y_1 = \log_2(x_1+4) = \log_2(-kx_1)$

$y_2 = \log_2(x_2+4) = \log_2(kx_2) = \log_2(-x_2+m)$

$y_3 = \log_2(-x_3+m) = \log_2(-kx_3)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+4 = -kx_1 \\ x_2+4 = kx_2 = -x_2+m \\ -x_3+m = -kx_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = -4 \text{ ①} \\ \text{②}(k-1)x_2 = 4, \quad (k+1)x_2 = m \text{ ③} \\ (k-1)x_3 = -m \text{ ④} \end{cases}$

ㄱ ①÷② $\dfrac{(k+1)x_1}{(k-1)x_2} = -1$, ⑤ $k+1 = 2(k-1)$, $\boxed{k=3}$

ㄴ ③÷④ $\dfrac{(k+1)x_2}{(k-1)x_3} = -1$ ⑥ → "⑤÷⑥ 하면 k 소거" → $\boxed{x_2{}^2 = x_1x_3}$

↳ 등비수열 $x_2 = x_1 r$, $x_3 = x_1 r^2$

ㄷ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} + \dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \dfrac{\log_2(kx_2)-\log_2(-kx_1)}{\cancel{(r-1)x_1}} + \dfrac{\log_2(-kx_3)-\log_2(-kx_1)}{(r+1)\cancel{(r-1)x_1}} = 0$

$(r+1)\log_2(-r) + \log_2 r^2 = \log_2(-r)^{r+3} = 0$ $\therefore r=-3$

→ $x_2 = -3x_1$

$-3x_1 = \dfrac{12}{k+1}$ → $m=12$

$x_2 = \dfrac{4}{k-1} = \dfrac{m}{k+1}$ → $k=2$

$\boxed{m+k^2 = 12+4 = 16}$