

20. 함수 $f(x) = e^{-x} \int_0^x \sin(t^2) dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. $f(\sqrt{\pi}) > 0$
ㄴ. $f'(a) > 0$ 을 만족시키는 a 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $f'(b) = 0$ 을 만족시키는 b 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x \sin(t^2) dt$$

$$f'(x) = -e^{-x} \int_0^x \sin(t^2) dt + e^{-x} \cdot \sin(x^2)$$

$$= e^{-x} \left\{ \sin(x^2) - \int_0^x \sin(t^2) dt \right\}$$

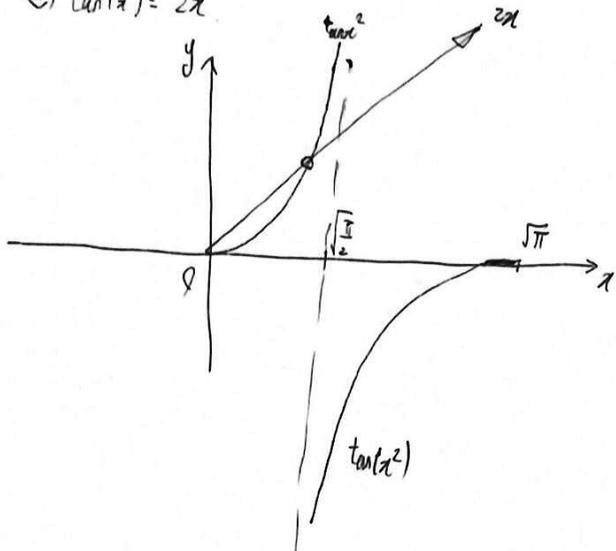
let. $F(x) = \sin(x^2) - \int_0^x \sin(t^2) dt$

$$F'(x) = 2x \cos(x^2) - \sin(x^2)$$

$$= \cos(x^2) (2x - \tan(x^2))$$

① $\cos(x^2) = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \in (0, \sqrt{\pi})$

② $\tan(x^2) = 2x$



특정 교점을 α 로 두면,

$F(x)$ 는 $0 \sim \alpha$: 양의 값

$\alpha \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$: 음의 값

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim \sqrt{\pi}$: 양의 값

즉 $F(x)$ 는 $(0, \alpha)$ 에서 증가

$(\alpha, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ 에서 감소

$(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi})$ 에서 증가.

① $f'(a) > 0$ 가 함 $\rightarrow F(a) > 0$ 인 실수 a .

a 가 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 존재함은 자명함.

㉔ 극값의 풀이 시의

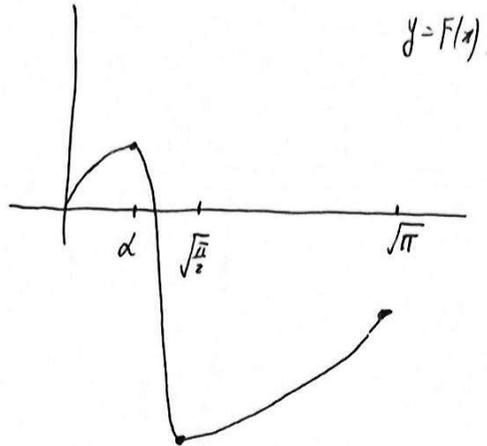
$F(x)$ 의 개형 추론은

이런 단계까지 풀어진 상태라면 간단하다

$$F(0) = 0$$

$$F(\sqrt{\pi}) < 0$$

즉



$f'(b) = 0$ 인 실수 b 는

$F(b) = 0$ 을 만족.

그 b 는 존재한다.

$(0, \sqrt{\pi})$ 에서는 오직 1개.

Q.E.D.

⑦ $e^{-\sqrt{\pi}} > 0$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) dt > 0$$

(이는 너무 쉬운 거라...)

30. $x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a 는 상수이다.)

(가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$(x-a)f(x) = g(x) \text{이다.}$$

(나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 동일한 극댓값 M 을 갖는다.

(단, $M > 0$)

(다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오. [4점]

Phase 1. A. $x > a$ 에서 $f(x)$ 는 3차함수로 정의 vs B. A는 틀렸다. $f(x)$ 는 $\frac{g(x)}{x-a}$ 의 분자함수다.

if A, $g(x) = (x-a)f(x)$.

($f(x)$ 최고차항 계수 -1)

(4)에서 $f(a) = f(\beta) = M$, $x=a, x=\beta$ 에서 극대.

3차항수에 극대가 2번 나타날 수 없으니 모순.

~ A \rightarrow B.

Phase 2. 4식 정리. $f(x) = \frac{g(x)}{x-a}$ ($x > a$).

$g(x) = (x-a)f(x) \rightarrow$ 미분

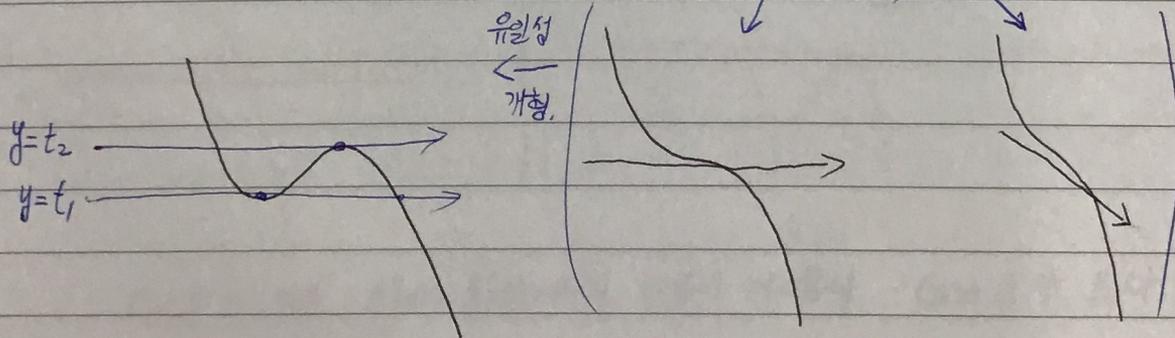
$g'(x) = f(x) + (x-a)f'(x)$

Sub. $x=a \rightarrow M + (a-a)f'(a) = g'(a)$

Sub. $x=\beta \rightarrow M + (\beta-a)f'(\beta) = g'(\beta)$

($y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 미분가능함이 주어질) + $\left(\begin{array}{l} f'(a) = f'(\beta) = 0 \text{ (극대이므로)} \\ \downarrow \downarrow \\ g'(a) = g'(\beta) = M \end{array} \right)$ + $\left(\begin{array}{l} g'(x) \text{는 최고차 계수} \\ -4 \text{인 3차항수} \end{array} \right)$

\Rightarrow ① $g'(x)$ 의 개형



$g'(x)$ 에서 $y=t_1, y=t_2$ 는 중간을 가지는 상수함수다. $g'(x)=M$ 의 근은 α, β . 최소 2개 이상.

즉 $t_1 < M < t_2$ 이다. 그런데 $M > 0$ 이므로 $g'(x)=0$ 의 근이라면 그 근값의 개수로 3개 또는 4개가 가능하다.

(Case D) (Case E)

이게 최선이였다. 후.. 나란 녀석

하지만 Case D를 살펴보면 (다)에 의해

f 는 꼭값 4개 이상이어야 하는데,

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - g(x)}{(x-a)^2} \quad (\text{분자식이 4차라 가능할지도 모른다.})$$

그럼, $f'(x)$ 의 분자에서 $(x-a)g'(x) - g(x) = r(x)$ 를 관찰하자.

$$r'(x) = (x-a)g''(x).$$

$g''(x)$ 가 2개의 근을 $x > a$ 에서 가져도,

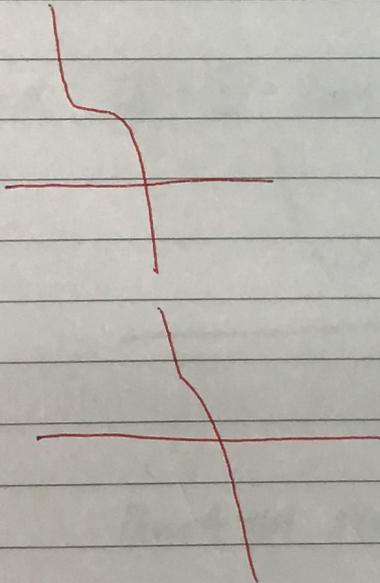
$(x-a)$ 의 존재로 인해 근이 4개일 위험은 사라진다.

즉 Case E가 옳다. $g(x)$ 의 꼭값은 1개다.

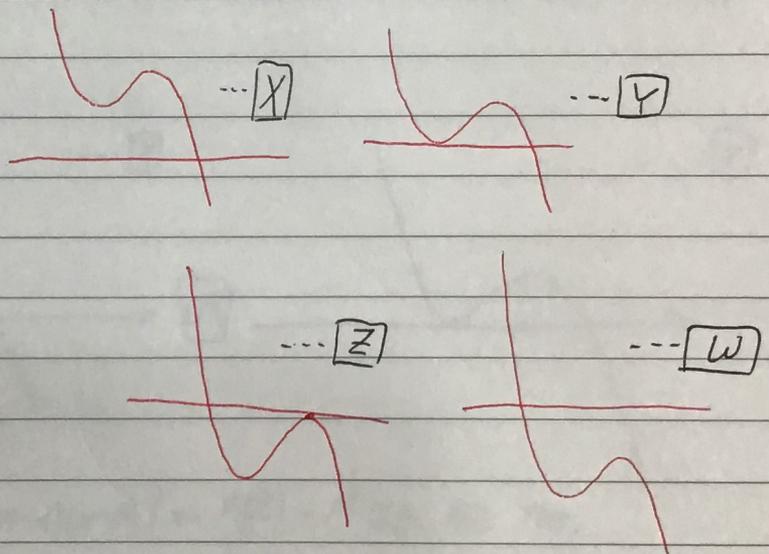
Phase 3. Case E는 $g'(x)=0$ 의 근이 0개, 1개인 Case F와,

서로 다른 근 2개로 이루어지는 Case G로 나눌 수 있다.

ex. Case F



ex. Case G



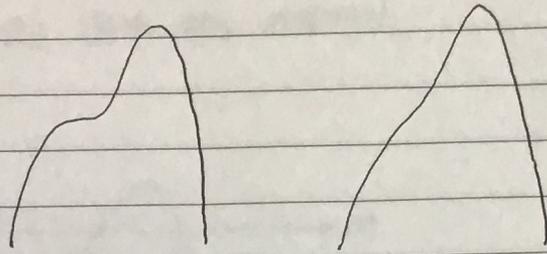
Case F의 경우 $g'(a) = g'(b) = M$ 의 만족이 어려우니 Case G가 옳다.

즉 $g(x) = -4(x-h)^2(x-l) + T$ 정도의 일반 꼴로 정의 가능하다.

하지만 $g'(a) = g'(b) = M > 0$ 이므로 X, Y만 Case G 중 건질 수 있다.

이게 최선이였다. 후.. 나란 녀석

Phase 4. \boxed{X} , \boxed{Y} 덕에 우리는 $g(x)$ 가 다음과 같음을 알았다.



이에 더해 $g(x) = M(x-a)$ 의 근이 α, β 일과,

$$g'(a) = g'(b) = M \text{ 또한 이이 알고 있다.}$$

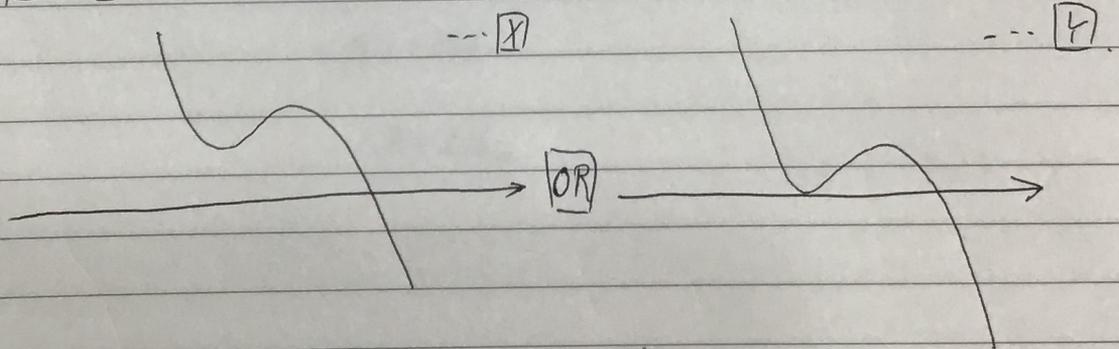
$$\text{let. } h(x) = g(x) - M \cdot (x-a).$$

$$\begin{pmatrix} h(a) = 0 & h'(a) = 0 \\ h(b) = 0 & h'(b) = 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) \text{는 다항함수,} \\ \text{근 개수 결정된 함수.} \end{pmatrix}$$

$$\therefore h(x) = -(x-a)^2(x-b)^2.$$

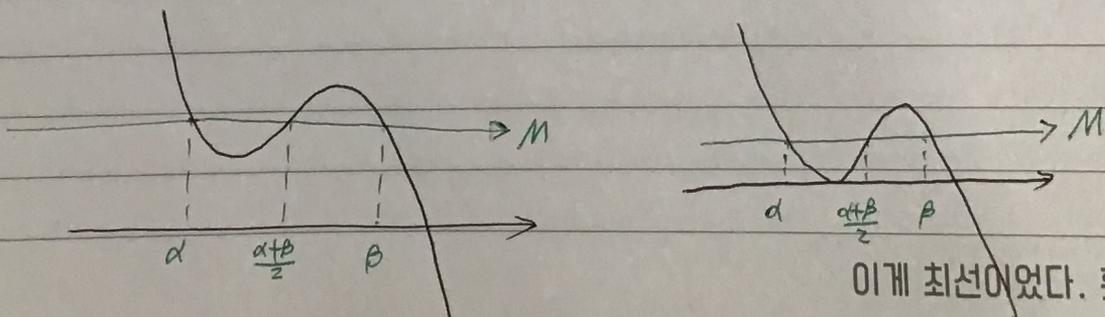
$$g(x) = -(x-a)^2(x-b)^2 + M(x-a).$$

Phase 5. $\boxed{X} + \boxed{Y} = g'(x)$ 의 단조.



Phase 4에서 $g'(x) = -4(x-a)(x-b)(x - \frac{\alpha+\beta}{2}) + M$ 일은 추론 가능.

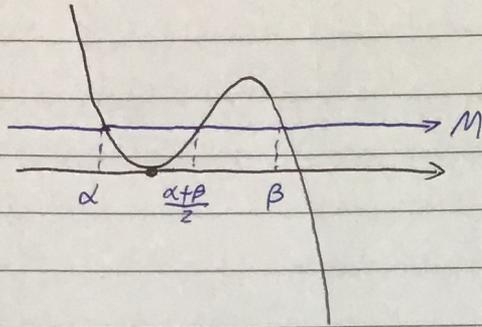
$$g'(x) = M \text{의 근은 } \alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}.$$



이게 최선이였다. 훗.. 나란 녀석

㉔와 ㉕는 평행이동 시 동일 형태.

M 의 최솟값은 ㉕일 때가 자명하다.



(α, β 가 근일 때 $\alpha + \beta$ 도 근일 경우는 변곡점일 때다. 삼차함수라서 가능한 부분.)

비율 관계보다는 $\alpha = -3\sqrt{3}, \beta = 3\sqrt{3}$ 대입이 편하다. \rightarrow ($\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 에서 이미 답은 고정된 상태.)

이때 근의 x 값은 -3 이고,

$$\begin{aligned} g'(-3) - M &= -4(-3+3\sqrt{3})(-3-3\sqrt{3})(-3) \\ &= -216. \end{aligned}$$

$g'(-3) = 0$ 인 ㉕이므로

$$-M = -216$$

$$\therefore M = 216 \text{ m.}$$

171130. $(\alpha - a) f(\alpha) = g(\alpha) = M(\alpha - a) \leftarrow (가), (4)$

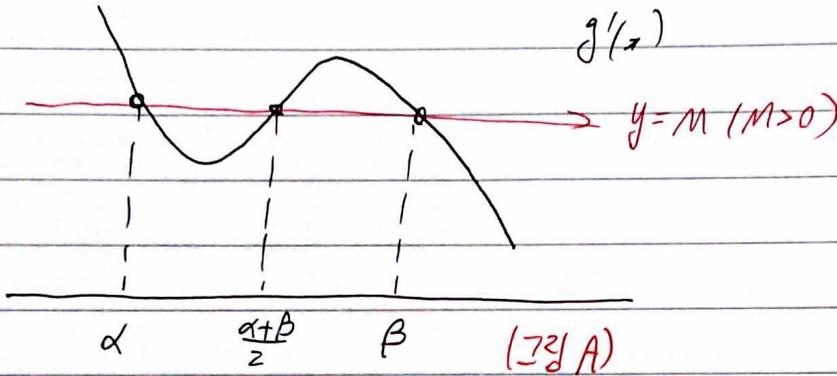
$(\beta - a) f(\beta) = g(\beta) = M(\beta - a)$

$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

$g'(x) = (x - a) f'(x) + f(x) \rightarrow g'(\alpha) = g'(\beta) = M$

$\therefore g(x) - M(x - a) = -(x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \rightarrow f(x) = M - \frac{(x - \alpha)^2(x - \beta)^2}{x - a}$

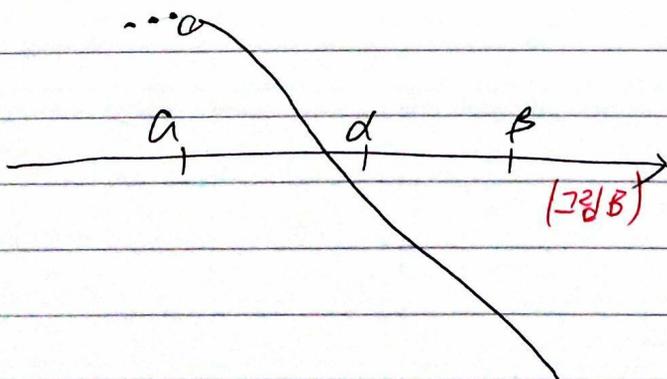
$g'(x) = M - (x - \alpha)(x - \beta)(4x - 2\alpha - 2\beta)$



(다) $\rightarrow f'(x) = \frac{(x - \alpha)(x - \beta) \left[(x - \alpha)(x - \beta) - 2(x - \alpha)(2x - \alpha - \beta) \right]}{(x - a)^2}$

$x = \alpha, x = \beta$, 그리고 근이 2개까지 더 가능.

let. $(x - \alpha)(x - \beta) - 2(x - \alpha)(2x - \alpha - \beta) = r(x)$

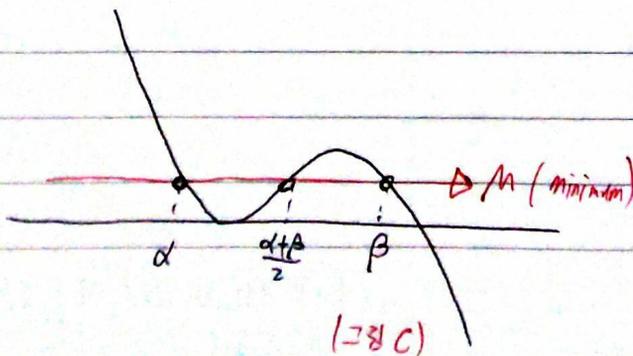


한 근은 a 이하. 즉 근은 1개.

(다)에서 f'(x)의 근의 개수 = 3.

g(x)는 극값이 2개, 1개, 0개 중 하나.

그림 A를 통해 1개인 때만 가능. 확인.



\rightarrow 이후 N.G.P. Ans. 2/6.

30. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{f(x)}$ 이 존재한다.

(다) 함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$ 의 극솟값을 k 라 할 때, $27k$ 의 값을 구하시오. [4점]

Q. 최고차 계수 1인 다항함수 $f(x)$ (2017-4-30.42)

$$g = x - \frac{f}{f'}$$

(가) $f(x)=0$ 의 실근 0, 2, 허근 x

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{f(x)}$ 이 존재

(다) $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x=2$ 에서 연속인 비가 x

$g(x)$ 의 극값은 $-1x$. $27k=?$

sol) (고유성이 풀이와 다르다. 어쨌든 고유성 풀이대로 푸는 것도
실선 무용하다. 궁금하면 찾아보라. 거기서 터져서 될 것이다)

(다)에서 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 가 연속이나 미분 불가능인 $x=\frac{5}{4}$
당연히 $x=\frac{5}{4}$ 가 근이다.

$$g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - \frac{f}{f'} = 0$$

$$\frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{f'\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{5}{4}$$

(가), (나)에서

$$f = x^n (x-2)^m \text{ 으로 두고,}$$

$m \geq 4$ 이면 (나)에 위배,

$m=0$ 은 (가)에 위배.

즉 m 의 후보 $m=1, 2, 3$.

| | $m=1$ | $m=2$ | $m=3$ |
|----------------|---------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| f | $x^1(x-2)$ | $x^1(x-2)^2$ | $x^1(x-2)^3$ |
| f' | $x^{n-1}(1(x-2)+x)$ | $x^{n-1}(x-2)(1(x-2)+2x)$ | $x^{n-1}(x-2)^2(1(x-2)+3x)$ |
| $\frac{f}{f'}$ | $\frac{x(x-2)}{1(x-2)+x}$ | $\frac{x(x-2)}{1(x-2)+2x}$ | $\frac{x(x-2)}{1(x-2)+3x}$ |

Use $\left(\frac{f}{f'} \right) \left(\frac{5}{4} \right) = \frac{5}{4}$

| | | | |
|---------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| $\frac{5}{4}$ | $\frac{-15}{-16}$ | $\frac{15}{-16}$ | $\frac{15}{-16}$ |
| $\frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{4}n + \frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{4}n + \frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{4}n + \frac{15}{4}$ |
| (x) | (x) | (0) | |

$m=3$ 에서 $n=6$ 근이 유일하다.

$$f(x) = x^6(x-2)^3 \text{ 임이 확장된다}$$

(참 쉬운 문제긴 하다. 하지만...)

N. G. D 하면

$$g = x - \frac{f}{f'} = \frac{8x^2 - 10x}{4x - 12} \quad (x = \frac{4}{3} \text{ 에서 } \sim \text{reg})$$

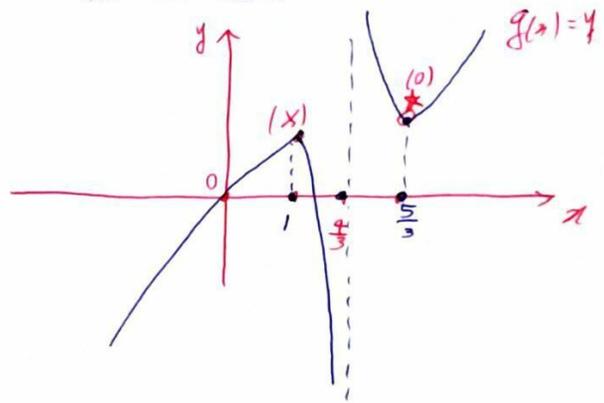
$$g' = \frac{2}{3} \cdot \frac{12x^2 - 32x + 20}{(3x-4)^2}$$

$$x=1, x=\frac{5}{3} \text{ 에서 } g'(x)=0.$$

$$g(1) = \frac{2}{3}, g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5g}{2g}$$

극소를 구한다고 해서 그게 작은 값을 의미한다고 착각하지 말자.

g 는 분수 형태다. $x=2$ 에서 정의 불가능하므로



항상 그래프를 그려서 자신이 어떤 꼴을 하고

있는지 알아야 하며, 풀이 과정 중 무심코

가정했던 고정 변수가 예외를 거치지 않는지,

극대 구하기인데 극소를 구한다는 실수 등은

정확한 문제 해석 뒤에는 따라오지 않는 법이다.

$$(극소 = \text{작은 값} = \frac{2}{3}, \text{답: } 18) \text{ 이라는}$$

오답이 나오지 않도록 주의하라는 말이다.

g 를 그려보도록 하고, 항상 그럴 수 있는

그래프들을 가사화해 예외, 반례를 줄여야

완벽한 풀이가 현장에서 가능하다.

$$k = g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{50}{27}, 27k=50 \quad \text{Ans } 50 \quad \text{대성마이백 (AEP)}$$

30. 실수 a 와 함수 $f(x) = \ln(x^4 + 1) - c$ ($c > 0$ 인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)이다.

$a = \alpha_1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

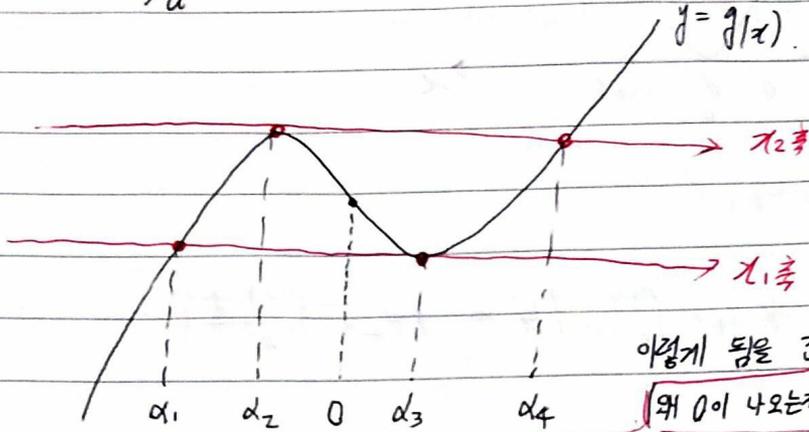
(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$(나) \int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x) dx = k \alpha_m \int_0^1 |f(x)| dx$$

$mk \times e^c$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$f(x) = \ln(x^2+1) - C \quad (C > 0)$$

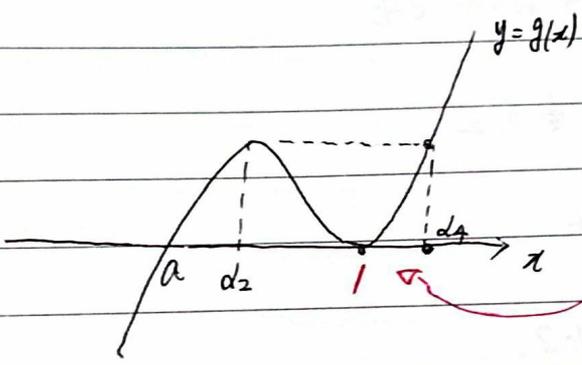
$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad g'(x) = f(x), \quad g(x) \text{을 } x \text{축 없이 그려면 (검은펜)}$$



이렇게 됨을 간단히 알 수 있다.
 (위 0이 나오는지는 후술.)

0이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 2가지 x축 설정을 고려해야 하며,
 이때의 가능한 a 값은 각각 2가지씩, $m=4$ 이다. (빨간펜)

문제에서 m의 설정 이후엔 $\alpha = \alpha_1$ 으로 잡으니 그래프를 등장하자.



(가) \rightarrow 1의 위치와, $g'(1) = 0$ 에서 C의 값이 나옴.

$$C = \ln 2.$$

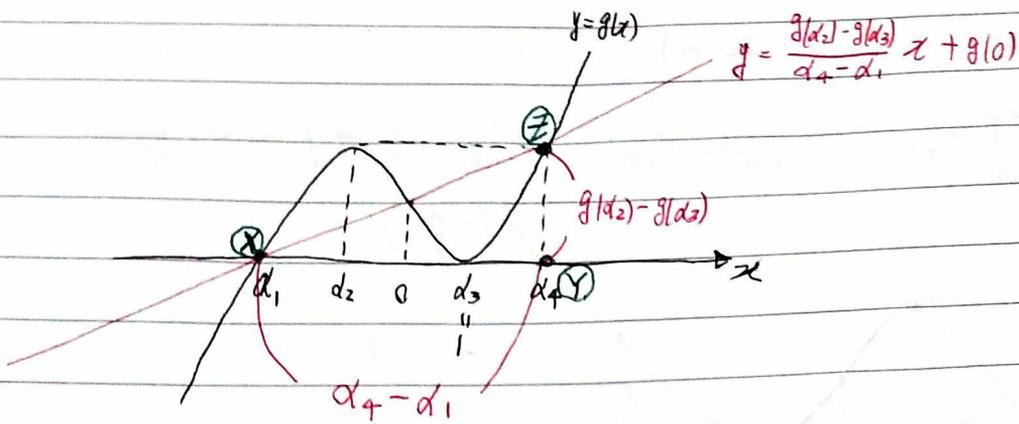
$$f(x) = \ln(x^2+1) - \ln 2.$$

(4) 혼동 방지를 위해 $\int_0^1 |f(x)| dx$ 를 먼저 보면 $\int_0^1 |f(x)| dx = -\int_0^1 f(x) dx = g(1) - g(0) = g(0) - g(\alpha_3)$
 $= \frac{g(\alpha_2) - g(\alpha_3)}{2}$

Q. 0을 어떻게 파악하는가?

A. $f(x) = f(-x)$ 이므로 $f(x)$ 는 y축 선대칭 함수다. 따라서
 이 $f(x)$ 를 직관한 $g(x)$ 는 $(0, g(0))$ 을 중심으로 한 점대칭함수임을 알 수 있다.

x_1 축과 x_2 축의 중간인 x 축을 잡을 경우 $(0, g(1))$ 이 $g(x)$ 의 변곡점임은 보인다.



$$(4) \rightarrow \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x) dx = k \alpha_4 \cdot \int_0^1 |f(x)| dx = k \alpha_4 \cdot \frac{g(\alpha_2) - g(\alpha_3)}{2}$$

$y = g(x)$ 는 $(0, g(0))$ 을 중심으로 하는 점대칭함수이다.

따라서 $\alpha_4 = -\alpha_1$ 이므로 $\alpha_4 = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{2}$ 이며,

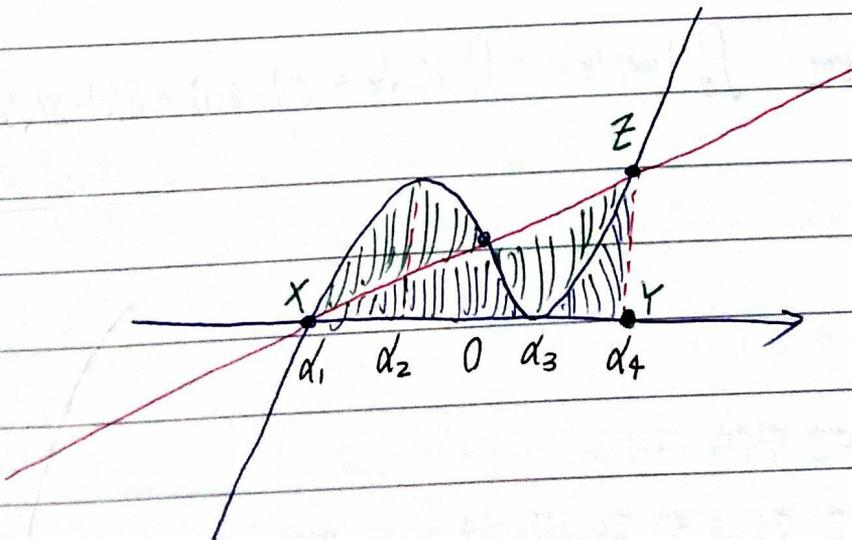
$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x) dx$ 는 삼각형 XYZ 의 넓이와 같다.

이는 $(\alpha_4 - \alpha_1) \cdot (g(\alpha_2) - g(\alpha_3)) \cdot \frac{1}{2}$ 이므로

$k=2$ 임을 밝힐 수 있다.

$\therefore m=4, k=2, C=\ln 2.$

Ans. 16.



30. 상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$ 가 있다. 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = |f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.
- (나) 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $4\sqrt{e}$ 이다.
- (다) 방정식 $g(x) = 4\sqrt{e}$ 의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$ 의 값을 구하십시오. [4점]

$$f(x) = \text{어떤 함수}$$

(2017-7-30)

$$g(x) = |f(x)| e^{f(x)}$$

(가) g 은 $x=2$ 에서 극소

(나) g 의 최댓값은 $4e^{\frac{1}{2}}$

(다) $g(x) = 4e^{\frac{1}{2}}$ 이 근 모두 유려우.

$$|f(-1)| = ?$$

$$\text{sol. } g(x) = |f(x)| e^{f(x)} = |f(x)| e^{f(x)}$$

$f(x)$ 의 최고차항 계수가 양수라면

$g(x)$ 에 최댓값은 존재하지 않는다.

즉 g 은 $\lim_{x \rightarrow \infty} g = 0^-$ 이다.

$$\text{let. } f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a < 0)$$

$$\text{let. } h(x) = f'(x) e^{f(x)} = (2ax + b) e^{f(x)}$$

$$h'(x) = (f''(x) + f'(x)^2) e^{f(x)}$$

$$f''(x) = 2a < 0 \text{ 이므로,}$$

일부 구간에서 $f''(x) + f'(x)^2$ 의 2개 근을 가지며,

$g(x)$ 를 그릴 때 $f(x) = 0$ 의 근

$-\frac{b}{2a}$ 또한 g 의 극값의 근일 수 있다

한 개의 근 2개는

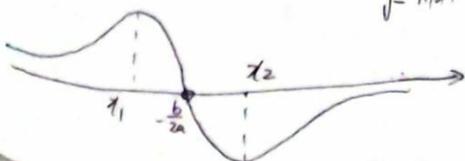
$$(2ax + b)^2 + 2a = 0 \text{의 근은}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-2a}}{2a} \quad (x_1, x_2 \text{로 let.})$$

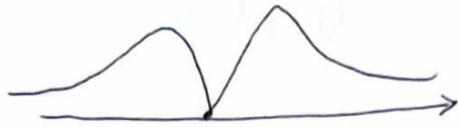
$x = -\frac{b}{2a}$ 을 사이에 둔다.

$h(x)$ 의 개형을 대충 아래와 같다. (확정성)

$$y = h(x)$$



$$y = g(x) = |h(x)|, \text{ 극 대략 개형}$$



즉 $x = -\frac{b}{2a}$ 에서 극소인데 이는 $x = 2$ 이다.

$$-\frac{b}{2a} = 2.$$

$$\therefore b = -4a.$$

$$g(x) = (-2a)|x-2| e^{ax^2 - 4ax + c} \quad (a < 0)$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{-2a}}{2a} = 2 \pm \frac{\sqrt{-2a}}{2a}$$

x_1, x_2 중 g 대입시 더 큰 값이 최댓값.

그 근이 둘 다 정수를 알 수 있다.

$$(g(x_1) = g(x_2))$$

$$\begin{aligned} g(x_2) = g(x_1) &= (-2a) \cdot \left(\frac{\sqrt{-2a}}{-2a}\right) \cdot e^{c - \frac{1}{2} - 4a} \\ &= \sqrt{-2a} \cdot e^{c - \frac{1}{2} - 4a} \\ &= 4e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

두 근이 모두 유려우이므로,

$\sqrt{-2a}$ 가 유려우이다.

$$\sqrt{-2a} = 4, \quad c - \frac{1}{2} - 4a = \frac{1}{2} \text{ 영문}$$

확정성을 4 있다.

$$\therefore a = -8 \rightarrow b = -4a = 32.$$

$$c = -3$$

$$\begin{aligned} |f(-1)| &= |a - b + c| = |-8 - 32 - 3| \\ &= \frac{43}{m} \quad (\text{Q.E.D.}) \end{aligned}$$

→ Q.E.D.은 꼭 증명 단계에만 쓰는 용어입니다...

관심 있는 편...

21. $\frac{3}{5} < x < 4$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=2$ 이고

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 \{f(x)\}^3}{x^3 \{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

$$\neg. g'(2) = -\frac{4}{7}$$

$$\sphericalangle. g(x) = \frac{1}{3}x^3 \{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$$

$$\sqsubset. 2 < g(1) < \frac{5}{2}$$

① \neg

② \neg, \sphericalangle

③ \neg, \sqsubset

④ $\sphericalangle, \sqsubset$

⑤ $\neg, \sphericalangle, \sqsubset$

☆ 역함수와 적분의 관계성 단기.

$$\frac{3}{5} < x < 4 \rightarrow f'(x) = \frac{1 - x^2 f(x)^3}{x^3 f(x)^2} \quad f(1) = 2$$

sol. II $x \rightarrow g(t)$ $f'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)} = \frac{1 - g(t)^2 \cdot t^3}{g(t)^3 \cdot t^2}$

$$g'(t) = \frac{t^2 g(t)^3}{1 - t^3 g(t)^2} \quad \left(\frac{3}{5} < g(t) < 4 \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{7. } g'(2) = \frac{4 g(2)^3}{1 - 8 g(2)^2} = -\frac{4}{7} \end{array} \right) \leftarrow \left(\frac{3}{5} < g(2) = 1 < 4 \right)$$

$f(1) = 2$
 $g(2) = 1$

$$t^2 g(t)^3 = g'(t) (1 - t^3 g(t)^2)$$

$$\underbrace{t^2 g(t)^3 + t^3 g(t)^2 g'(t)}_{\downarrow \text{이분꼴}} = g'(t)$$

$$\rightarrow t^3 g(t)^3 = 3g(t) + C$$

$$g(2) = 1 \rightarrow C = 5, \rightarrow 3g(t) + 5 = t^3 g(t)^3$$

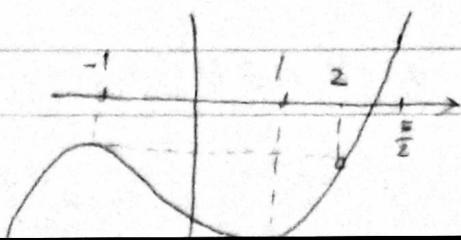
$$\left(\text{L. } g(t) = \frac{1}{3} t^3 g(t)^3 - \frac{5}{3} \quad \left(\frac{3}{5} < g(t) < 4 \right) \right)$$

$$\text{L 이용시 } g(1) = \frac{1}{3} g(1)^3 - \frac{5}{3}, \quad g(1)^3 - 3g(1) - 5 = 0$$

($g(2) = 1$ 이고, $f(1) = 2$ 일 때 $f'(1) < 0$ 이어 f 의 역함수가 근개하므로
 $f' \leq 0 \rightarrow g' \leq 0$, 즉 $g(1) > g(2)$, $g(1) > 1$ 이다.

$$\text{let, } h(x) = x^3 - 3x - 5 \quad (g(1) \text{ 은 } h(x) = 0 \text{ 의 근})$$

(\square 그래프 확인 시 $2 < g(1) < \frac{5}{2}$)



Ans. 7, L.C.

이게 최선이였다. 훗.. 나란 녀석

Sol 121

$f(x)$ 의 원함수를 구하는 것도 가능하다.

(대부분의 문제들은 원함수 설정 후 조건 생성으로 만들어지므로 역으로 원함수가 나올 예도 많다.)

Sol II의 부분적분 방식으로 $x^3 f(x)^2$ 을 넘기면

$$x^3 f(x)^2 f'(x) + x^2 f(x)^3 = 1.$$

$$x^3 f(x)^3 = 3x + C.$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow C = 5.$$

$$f(x)^3 = \frac{3x+5}{x^3}.$$

$$\left(f(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x+5)^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$\text{let } x = g(t) \quad t = \frac{3g(t)+5}{g(t)^3}$$

이 식에서 L, R은 동일한 방식으로 풀이며,

Sol III과 달리 f 의 사용 없이

바로 g 를 미분해 $g'(2)$ 를 구할 수 있다.

$$t g(t)^3 = 3g(t) + 5.$$

$$g'(t) \cdot 3t g(t)^2 + g(t)^3 = 3g'(t) + 5.$$

$$g(2) = 1$$

$$g'(2) = -\frac{4}{7}.$$

물론 $f(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x+5)^{\frac{1}{3}}$ 의 도함수에 $g(x)$ 대입도 가능하다.

Ans. 7, L, C

→ 이 문제 첫 풀이를 Sol II로 풀 보인, 목 먹었다. ㅋㅋ.

(학교에서 이거로 풀이하다가...)

30. 함수 $f(x) = e^x(ax^3 + bx^2)$ 과 양의 실수 t 에 대하여
 닫힌 구간 $[-t, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $M(t)$,
 최솟값을 $m(t)$ 라 할 때, 두 함수 $M(t), m(t)$ 는 다음 조건을
 만족시킨다.

- (가) 모든 양의 실수 t 에 대하여 $M(t) = f(t)$ 이다.
 (나) 양수 k 에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+2]$ 에 있는
 임의의 실수 t 에 대해서만 $m(t) = f(-t)$ 가 성립한다.

$$(다) \int_1^5 \{e^t \times m(t)\} dt = \frac{7}{3} - 8e$$

$f(k+1) = \frac{q}{p}e^{k+1}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, a 와 b 는 0이 아닌 상수, p 와 q 는 서로소인 자연수이고,

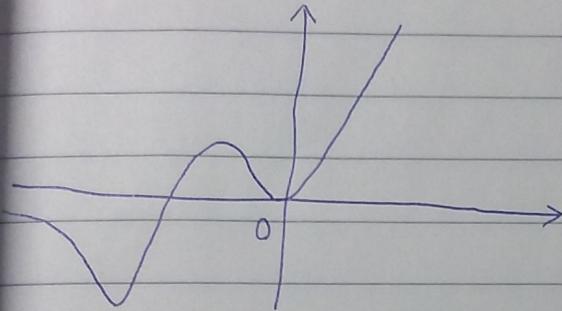
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ 이다.) [4점]

2018학년도 4월 30번. 도함수 추론 문제. (가장 잘 만들어진 컬러 Top 5 (주관적))

$$f(x) = e^x (ax^3 + bx^2) = x^2 e^x (ax + b)$$

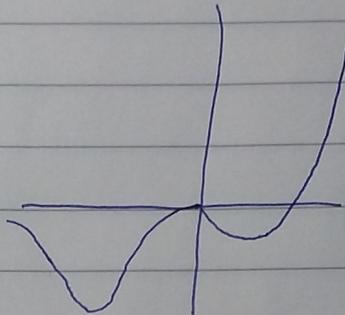
$$f'(x) = x e^x (ax^2 + (3a+b)x + 2b)$$

f(x)의 개형 추론



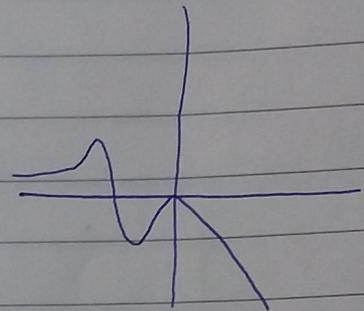
(0)

(a는 양수)



(X)

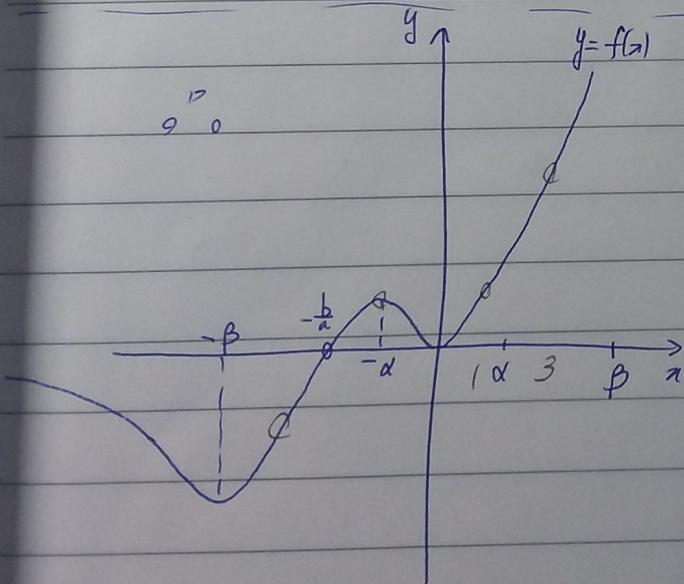
(기위배)



(X)

a = 0/0

(기위배)



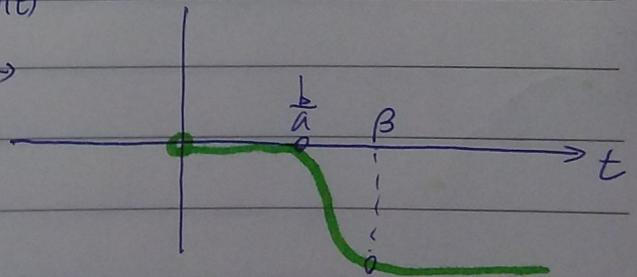
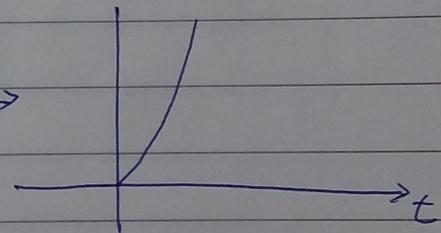
9.0

max

m(t)

min

m(t)



(k, t = -k-2)

m(t)는 (4) 조건에서 [k, k+2] 중 (t = k+2)에서를 제외하고 최솟값을 0에서 가지는 것이

자연스러우며, (4) 조건의 m(t) = f(-t)를 만족할 t는 b/a, beta 뿐이다.

따라서 $\frac{b}{a} = k, -\beta = -(k+2)$. $f'(-a) = f'(-\beta) = 0 = f'(-k-2)$

* 여기에 맞는 k는 2. -a = -1, -beta = -4가 4이다. (b=2a)

이제 (4) 조건을 보면

$$\int_1^5 e^{tm(t)} dt = \int_2^4 e^{tm(t)} dt + \int_4^5 e^{tm(t)} dt + \int_1^2 e^{tm(t)} dt$$

$$= \left. \frac{-at^4 + 2at^3}{4} \right|_2^4 + \int_4^5 e^t f(-t) dt + 0$$

$$= -\frac{68}{3}a + (-32a) \cdot \int_4^5 e^{t-4} dt$$

$$= -32a \cdot e + \frac{28}{3}a$$

$$= -8e + \frac{7}{3}$$

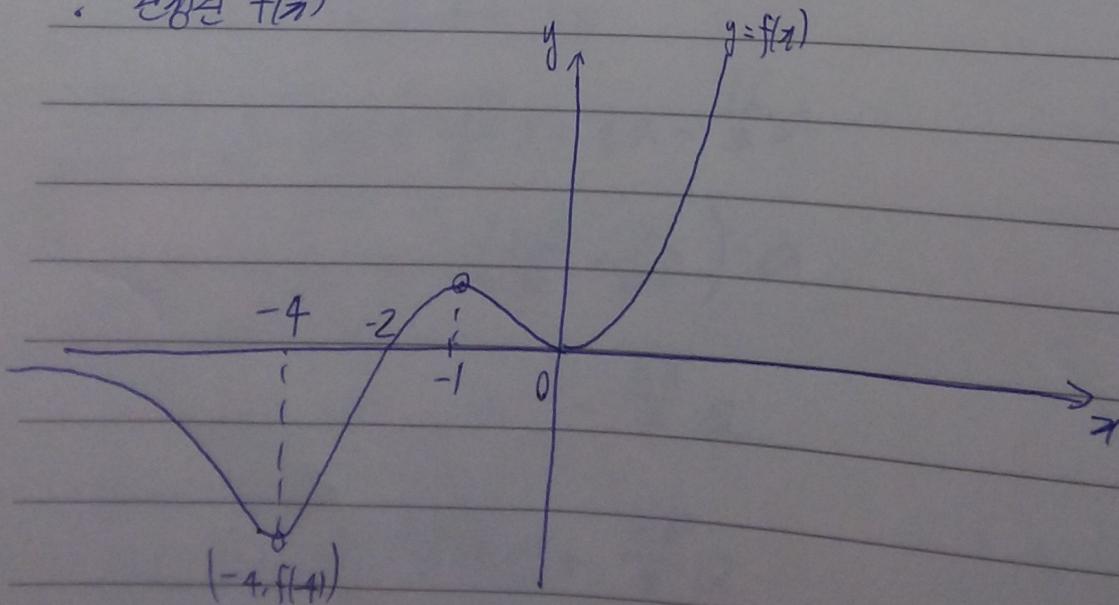
$$\therefore a = \frac{1}{7}$$

$$f(4+1) = f(3) = e^3 \cdot (27a + 9b)$$

$$= 45a \cdot e^3 = \frac{45}{4} e^3$$

Ans) $\frac{45}{4} e^3$

\therefore 완성된 $f(x)$



상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \sin^3 x + b \sin x$ 가

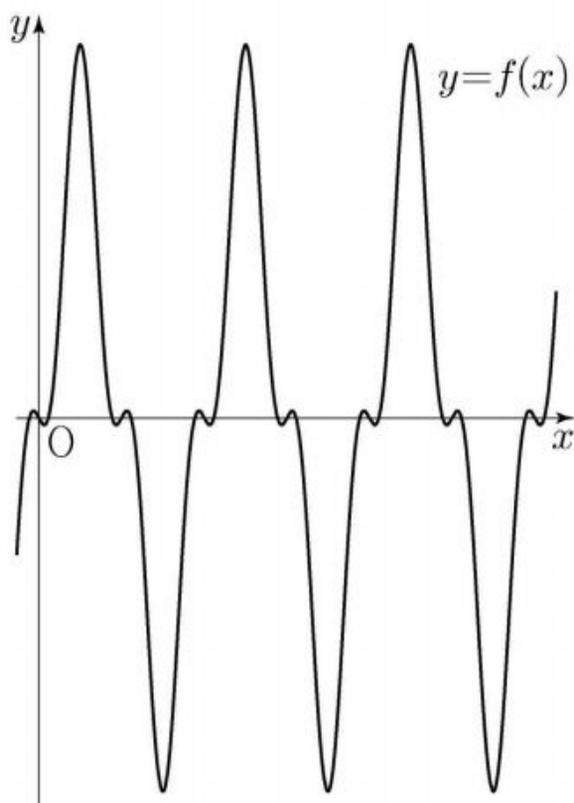
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

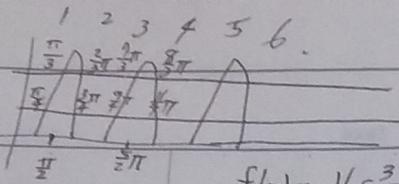
을 만족시킨다. 실수 t ($1 < t < 14$)에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 x_n 이라 하고

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101} c_n = p + q\sqrt{2}$ 일 때, $q - p$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 유리수이다.)





$f(x) = 16s^3 - 2s = t$. 이 큰 x_n , ($f(x)$ 구하기는 노동...)

$C_1 + C_2 = 0, C_3 + C_4 = 0 \dots$

즉 C_1 을 다시 구하라. ($f + 2\sqrt{2} = C_1$)

$C_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x)} dt$

$(x = \frac{\pi}{4} \sim \frac{\pi}{3})$

$f(\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2} \quad f(\frac{\pi}{3}) = 5\sqrt{3}$

$t = f(a) \quad (a), t = f(x)$

$dt = f'(a) da$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(a)}{f'(a)} \cdot f'(a) da$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2s(1-8c^2) dx$

$\downarrow c = a$
 $-s = da$

$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} 2(1-8a^2) (-da)$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 14 - 16a^2 da$

$14a - \frac{16}{3}a^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= 7\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$

$-7 + \frac{2}{3} = -\frac{19}{3} + \frac{17}{3}\sqrt{2}$

$\therefore q - p = 12$

30. $ab < 0$ 인 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{2}} \text{ 이고 함수 } g(x) \text{ 는 } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 이다.}$$

실수 k ($k > 0$)에 대하여 부등식

$$g(x) - k \geq xf(x)$$

를 만족시키는 양의 실수 x 가 존재할 때, 이 x 의 값 중
최솟값을 $h(k)$ 라 하자.

함수 $g(x)$ 와 $h(k)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 극댓값 α 를 갖고 $h(\alpha) = 2$ 이다.

(나) $h(k)$ 의 값이 존재하는 k 의 최댓값은 $8e^{-2}$ 이다.

$100(a^2 + b^2)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) [4점]

$ab < 0$ 인 상수 a, b .

$$f(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{2}} \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$x > 0$ 인 x 에서

$$g(x) - k \geq x f(x) \text{ 만족하는}$$

양수 실수 k 중 최대로 $h(k)$ 라 하자.

(가) $g(x)$ 는 x 의 몇몇 값 α , $h(x) = 2$

(나) $h(k)$ 가 존재하는 k 의 최댓값 $8e^{-2}$.

(다) $(a^2 + b^2)$ 값?

답) $g(x) - x f(x) \geq k$ 일 때,

$g(x) \rightarrow H(x) = g(x) - x f(x)$ 를 두어 파악하면
 $h(k)$ 를 짐작할 수 있고,

$H(x)$ 가 상수 a, b 조건 하에

고정된 항이므로

(나) 조건에서 ($k = 8e^{-2}$) \rightarrow (max)인
큰 힌트다.

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt - (ax^2 + bx)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= -x f(x) \\ &= -x \left(-\frac{a}{2}x + a - \frac{b}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}x (ax + b - 2a) e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

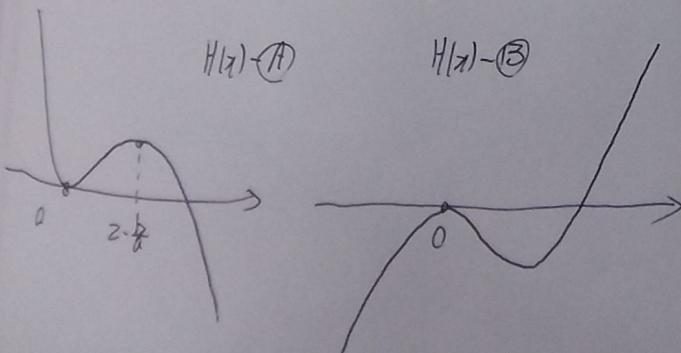
$H(x)$ 는 $x=0$, $x = 2 - \frac{b}{a}$ 에서 극값. ($H(0) = 0$)

$ab < 0$ 이므로 $0 < 2 - \frac{b}{a}$

a, b 의 부호 파악이 아직 불확한 상태.

$H(x) - \text{A}$

$H(x) - \text{B}$



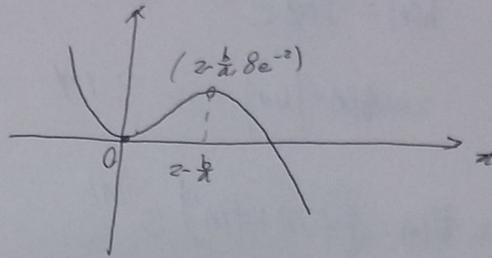
(나) 조건에서 $\max(k) = 8e^{-2}$ 이고,

$h(k)$ 의 정의

(양수 실수 k 중 최댓값)을 고려하면

Ⓐ, Ⓑ 중 Ⓑ는 $\max(k)$ 를 정의 불가

Ⓐ가 옳으며, $H(2 - \frac{b}{a}) = 8e^{-2}$.



$a < 0, b > 0$ 인 도함수 부호 변화로 파악.

(가) 조건에서 $g(x)$ 의 극대를 찾기 위해 $g'(x)$ 구하자.

$$g'(x) = f(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$$

유의이한 극값은 $x = -\frac{b}{a}$ 에서 발생

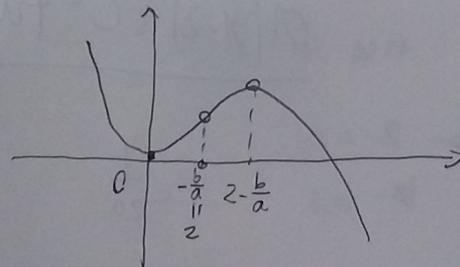
$$g(-\frac{b}{a}) = \alpha \quad \left(-\frac{b}{a} > 0, ab < 0 \text{ 이므로}\right)$$

그런데 $f(-\frac{b}{a}) = 0$ 이므로

$H(x) = g(x) - x f(x)$ 에서

$$H(-\frac{b}{a}) = g(-\frac{b}{a}) = \alpha \text{ 이다.}$$

$$-\frac{b}{a} < 2 - \frac{b}{a} \text{ 이며, } h(x) = 2 \text{ 라고 했으므로}$$



$$-\frac{b}{a} = 2 \text{ 이다. } b = -2a.$$

$$\rightarrow 2 - \frac{b}{a} = 4$$

$$N.G.D \rightarrow f = a(x-2)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$g = -2ax e^{-\frac{x}{2}}$$

$$H = -ax^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

$$H(4) = 8e^{-2} = -16ae^{-2} \quad b = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Ans) 125 QED

대성마이맥

30. 최고차항의 계수가 6π 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \frac{1}{2 + \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소이고,

$\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \alpha_1 = 0 \text{ 이고 } g(\alpha_1) = \frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

$$(나) \frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$$

$g'(-\frac{1}{2}) = a\pi$ 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$) [4점]

최고차 계수 6π , 상차항 $f(x)$

$$g(x) = \frac{1}{2 + \sin f(x)} > 0$$

$x = \alpha$ 에서 극대 or 극소

$\alpha \geq 0$ 인 α 들 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

(가) $\alpha_1 = 0$ $g(\alpha_1) = \frac{2}{3}$

(나) $\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'(-\frac{1}{2}) = a\pi, a^2 = ?$ ($0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$)

[Sol] (가) 조건을 먼저 살펴보면

$\alpha_1 = 0, \sin f(\alpha_1) = \frac{1}{2}$

$0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $f(\alpha_1) = f(0) = \frac{\pi}{6}$ (자명)

문제가 $g'(-\frac{1}{2})$ 구하기이므로 궁극적으로는

복잡한 $g(x)$ 자체를 파악하는 것보다는

f 의 구조를 알고 $g'(x)$ 함수에

-한 Substitute 만 쓰겠다고 생각하는 것이
지극히 자연스럽다.

(나)에서 $\sin f(\alpha_5) = \sin f(\alpha_2) + \frac{1}{2}$

이제 g' 과 α 를 알아보자.

$$g'(x) = \frac{-f'(x) \cos f(x)}{(2 + \sin f(x))^2} \quad (N.G.D.)$$

$\alpha_1 = 0$ 인데 $f(\alpha_1) = \frac{\pi}{6}$ 이므로 α_1 은 $f'(x)$ 의 근.

따라서 $f(x) = 6\pi x^3 + d x^2 + \frac{\pi}{6}$ 로 둘 수 있다.

($f(0) = \frac{\pi}{6}, f'(0) = 0$)

$f(x) = 18\pi x^2 + 2dx = 2x(9\pi x + d)$

Q. $-\frac{1}{2}$ 도 근값으로 인정되는가?

\swarrow \searrow
 아니다 그렇다.
 (A) (B)

if A. $\alpha_1 = 0$ 이후의 α 는 모두
필연적으로 $\cos f(x) = 0$ 의 근들에 포함.

$\sin f(x) = \pm 1$

But (4)의 해석에서 A는 뒤배문다.

$\sim A \rightarrow B \rightarrow x = -\frac{1}{2}$ 도 근값을 가진다.

($f'(x) = 0$ 의 근 2개,
 $\cos f(x) = 0$ 의 근 α 들로 α 는 이루어진다.)

이제 α_5, α_2 중 어느 것이 $-\frac{1}{2}$ 인지 결정해야 하는데...

A에서 논거했지만 둘 중 하나 $\sin f(x) = \pm 1$ 의 근이므로

이 조건에 맞게 정렬한 Case 들 나누면



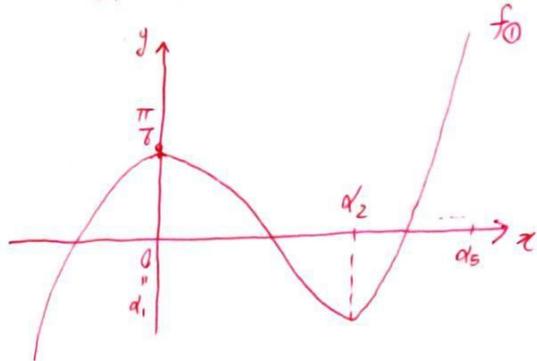
① $\sin f(\alpha_5) = 1$
 $\sin f(\alpha_2) = \frac{1}{2}$

② $\sin f(\alpha_2) = -1$
 $\sin f(\alpha_5) = -\frac{1}{2}$

($f'(x) = 0$ 의 근은 α_2 Case)

($f'(x) = 0$ 의 근은 α_5 Case)

①, ② 중 어느 쪽을 먼저 시도해도 좋다. ①은 모두 논리적으로
참 거짓을 판단하는데 무리가 없고, 제 3의 변수(잡맞값 같은 것)
없기 때문에... 먼저는 거짓인 ①부터 파악하겠다.



아. 참고로 α_5, α_2 둘 다 $f'(x) = 0$ 의 근이 아닐 수도 있지

않고 하여 그래프 그려도 두려워하면 될까?

친구들이 몇 있었는데, (나) 조건을 조금만 들여다보면

예외의 가능성을 평가법이 대공한 조건 설정으로

없고 있음을 확증할 수 있다 (참 잘 번 문제다)

①로 돌아가, $\sin f(\alpha_2) = \frac{1}{2}$ 이 되려면 $f(\alpha_2) = -\frac{2}{3}\pi$ 정도부터

시작한다. 허나 $\frac{\pi}{6}$ 와 $-\frac{2}{3}\pi$ 사이에 $\cos f(x) = 0$ 의 근이

4개므로 α_2 과 α_5 의 위치 관계가 모순.

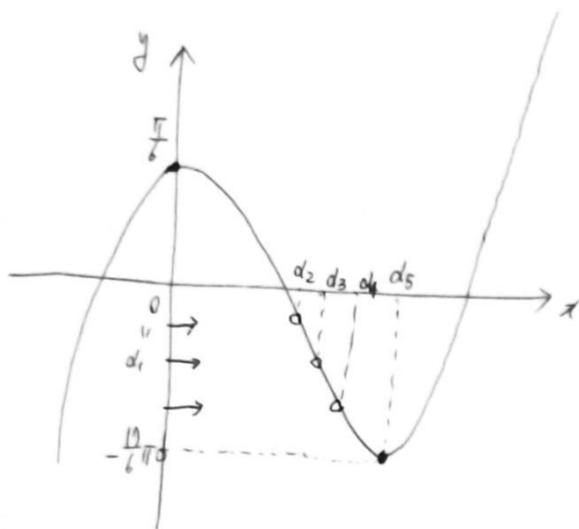
즉 ①은 거짓이다.

①과 ② 중 하나만 참인데

(~①) → ② 이므로 ②가 답이 되겠다

이는 확실히이다.

$f_2(x)$



위 그림처럼 볼 수 있도록 나타낼 수 있다.

$\cos f(x) = 0$ 이 되는 d_2, d_3, d_4 이므로

$$\text{순서에 맞게 } f(d_2) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(d_3) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$f(d_4) = -\frac{5\pi}{2}$$

$$f(d_5) = -\frac{11}{6}\pi \text{ 가 4번다. (N.G.D. 하자)}$$

$$d_5 = -\frac{d}{9\pi} \text{ 이므로}$$

$$f\left(-\frac{d}{9\pi}\right) = -\frac{11}{6}\pi$$

$$f(x) = 6\pi x^3 + dx^2 + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Sub}\left(-\frac{d}{9\pi}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{11}{6}\pi = \frac{d^3}{243\pi^2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow d = -9\pi$$

$$-\frac{d}{9\pi} = 1$$

$$\therefore f(x) = \pi(6x^3 - 9x^2 + \frac{1}{6})$$

$$g'(x) = \frac{-f'(x) \cos f(x)}{(2 + \sin f(x))^2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi\left(-\frac{19}{6}\right), \quad \sin f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{21}{2}\pi}{\frac{7}{4}} = 3\sqrt{3}\pi$$

$$f'(x) = \pi(18x^2 - 18x)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2}\pi$$

$$\therefore a = 3\sqrt{3}, \quad a^2 = 27$$

Ans) 27

Q. E. D.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x^2 + x + 1) = \pi f(1) \sin \pi x + f(3)x + 5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$ 의 값을 구하시오.

$$f'(x^2+1) = \pi f(1) \sin \pi x + f(3)x + 5x^2$$

만 생각하지 말고

(2x+1) 부터 공한다. 기본 중심!

선박한 풀이를 현장에서 써먹는 매우 어렵다.

$$(2x+1) f'(x^2+1) = 10x^3 + 5x^2 + 2f(3)x^2 + f(3)x + \pi f(1) (2x+1) \sin \pi x$$

$$f(x^2+1) = f(1) \left(-(2x+1) \cos \pi x + \frac{2}{\pi} \sin \pi x \right) + \frac{5}{2}x^4 + \frac{5+2f(3)}{3}x^3 + \frac{f(3)}{2}x^2 + C$$

$$x=0 \rightarrow f(1) = C + f(1) (-1)$$

$$C = 2f(1)$$

$$f(x^2+1) = \frac{5}{2}x^4 + \frac{5+2f(3)}{3}x^3 + \frac{f(3)}{2}x^2$$

$$+ f(1) \left(-(2x+1) \cos \pi x + \frac{2}{\pi} \sin \pi x + 2 \right)$$

$$A. x=1 \rightarrow f(3) = \frac{5}{2} + \frac{5+2f(3)}{3} + \frac{f(3)}{2}$$

$$+ f(1) (5)$$

$$-\frac{25}{6} = 5f(1) + \frac{1}{6}f(3)$$

$$B. x=-2 \rightarrow f(3) = 40 - \frac{40}{3} - \frac{16}{3}f(3) + 2f(3)$$

$$+ f(1) (5)$$

$$\frac{80}{3} + 5f(1) = \frac{13}{3}f(3)$$

$$A+B \rightarrow f(3) = 5, f(1) = -1. (\text{노동하자...})$$

$$\therefore f(0) = 93$$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g(x+1) - g(x) = -\pi(e+1)e^x \sin(\pi x)$$

$$(나) \quad g(x+1) = \int_0^x \{f(t+1)e^t - f(t)e^t + g(t)\} dt$$

$\int_0^1 f(x)dx = \frac{10}{9}e + 4$ 일 때, $\int_1^{10} f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$\begin{aligned} \text{1가)에서 } g(x+1) - g(x) &= -\pi(e+1)e^x \sin \pi x \\ &= \pi e^{x+1} \sin \pi(x+1) - \pi e^x \sin \pi x \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \therefore g(x) = \pi e^x \sin \pi x \quad (\text{???)}$$

$$\text{(14)에 Sub. } x=0 \rightarrow g(1) = 0, \text{ 1가)에 Sub. } x=0 \rightarrow g(0) = 0. \text{ 만-족 } \text{??}$$

이상 1가) 조건 다 씀.

$$\text{(4) 미분 } g'(x+1) - g'(x) = \{f(x+1) - f(x)\} e^x,$$

$$g'(x) = \pi e^x (\sin \pi x + \pi \cos \pi x)$$

$$g'(x+1) - g'(x) = \pi e^x (-e+1) \sin \pi x - \pi e \cos \pi x = (f(x+1) - f(x)) e^x.$$

$$f(x+1) - f(x) = -\pi(e+1) \sin \pi x - \pi^2 e \cos \pi x,$$

$$\xrightarrow{\text{정답}} \int_x^{x+1} f(t) dt = (e+1) \cos \pi x - \pi e \sin \pi x + C.$$

$$\text{Sub. } x=0 \rightarrow C = \frac{1}{9}e + 3. \quad \left(\int_0^1 f(t) dt = \frac{10}{9}e + 4 \right).$$

$$\text{let. } H(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

$$\boxed{\text{Ans}} = \sum_{x=1}^9 H(x)$$

$$\sum_{x=1}^9 H(x) = \sum_{x=1}^9 \left\{ (e+1) \cos \pi x - \pi e \sin \pi x + \frac{1}{9}e + 3 \right\}$$

$$= -(e+1) + 0 \times 9 + 9 \left(\frac{1}{9}e + 3 \right)$$

$$= 26$$

QED.

Ans. 26.

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) - x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x) + x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0) = 0$, $f'(1) = 1$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

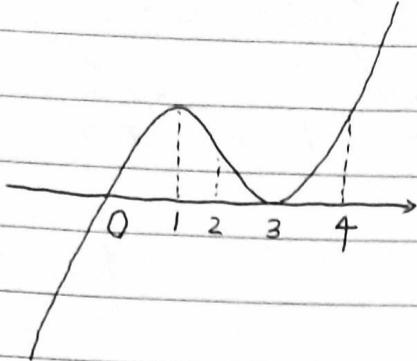
let. $f(x) - x = h(x)$. let. $h(x)$ 의 리고차항 계수 $= a$. ($a > 0$)

$h(0) = 0$ $h'(1) = 0$. ($0 = h(x)$)는 $x=0$ 가 $x=1$ 가 $x=3$ 가 $x=4$ 가 $x=1.5$ 가

Case A. 0이 중근이 아닌 경우

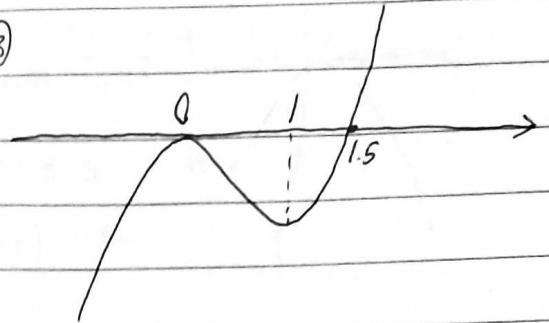
Case B. 0이 중근인 경우.

①



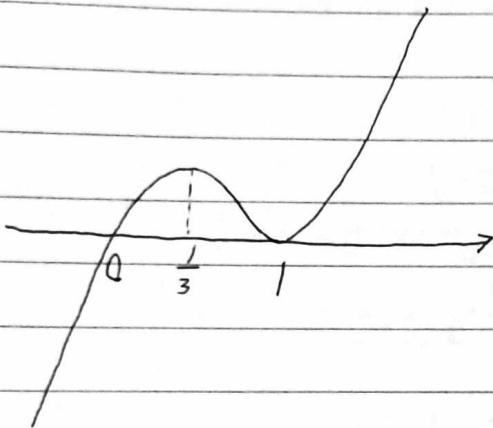
$h(x) = a(x-3)^2$

③



$h(x) = ax^2(x-1.5)$

②



$h(x) = ax(x-1)^2$

(4) $y = h(x) + 2x$ 도 서로 다른 실근 2개.

그러나 Case A에서 $ax(x-b)^2 + 2x = 0$ ($b = 1$ 또는 3)

$x(a(x-b)^2 + 2) = 0$. 근이 1개뿐이므로 불가.

즉 Case B만 옳다.

N.G.D. $ax^2(x-1.5) + 2x = 0$.

$x(ax(x-1.5) + 2) = x(ax^2 - \frac{3}{2}ax + 2)$.

↓ 근 1개 ↓ 중근! let $g(x)$. $g(x)$ 의 $D = \frac{9}{4}a^2 - 8a = 0$. $a > 0$.

$\therefore a = \frac{32}{9}$.

이게 최선이였다. 후.. 나란 녀석

$h(x) + x = f(x) = \frac{32}{9}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + x$. $f(3) = 96 - 48 + 3 = 51$.

30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_t^x f(s) ds$$

라 하자. 상수 a 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a) = 0$

(나) 함수 $|g(x) - g(a)|$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 1이다.

실수 t 에 대하여 $g(a)$ 의 값을 $h(t)$ 라 할 때, $h(3) = 0$ 이고 함수 $h(t)$ 는 $t = 2$ 에서 최댓값 27을 가진다.

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(ii) $a = \frac{1}{3}$ 일 때

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + b \text{ 에서}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b$$

$$= -1 + b = 0$$

이므로 $b = 1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 0$ 이다.

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ 이고

$$30(a+b) = 30 \times \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 40$$

29. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

직선 AB의 방정식은

$$y = -\frac{n+5}{n+4}x + n+5$$

자연수 a 에 대하여 $x = a$ 일 때

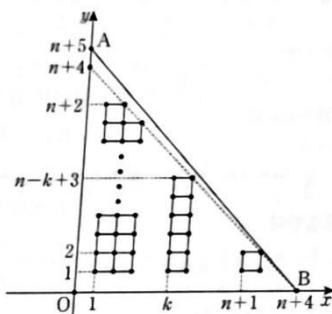
$$y = -\frac{n+5}{n+4}a + n+5$$

$$= n+5 - \left(1 + \frac{1}{n+4}\right)a$$

$$= n+5 - a - \frac{a}{n+4}$$

$0 < a < n+4$ 일 때, $0 < \frac{a}{n+4} < 1$ 이므로

$x = a$ 일 때, y 좌표가 자연수인 점의 개수는 $n+4-a$ 이다.



두 자연수 a, b 에 대하여 삼각형 AOB의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각 (a, b) , $(a+1, b)$, $(a+1, b+1)$, $(a, b+1)$

이라 하면

$a = 1$ 일 때, $1 \leq b \leq n+1$ 이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$ 이다.

$a = 2$ 일 때, $1 \leq b \leq n$ 이므로 정사각형의 개수는 n 이다.

$a = 3$ 일 때, $1 \leq b \leq n-1$ 이므로 정사각형의 개수는 $(n-1)$ 이다.

⋮

$a = n+1$ 일 때, $b = 1$ 이므로 정사각형의 개수는 1이다.

따라서

$$a_n = (n+1) + n + (n-1) + \dots + 1$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$$

$$\sum_{n=1}^8 a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 (n^2 + 3n + 2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6} + 3 \times \frac{8 \times 9}{2} + 2 \times 8 \right)$$

$$= 164$$

30. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$g(x) = \int_t^x f(s)ds$ 는 최고차항의 계수가 1인

사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수

$g(x) - g(a)$ 는 미분가능하다.

$g(x) \geq g(a)$ 일 때, $|g(x) - g(a)| = g(x) - g(a)$

$g(x) < g(a)$ 일 때, $|g(x) - g(a)| = -(g(x) - g(a))$

이므로 함수 $|g(x) - g(a)|$ 은 $g(x) - g(a) \neq 0$ 인

모든 x 에서 미분가능하다.

$g(x) - g(a) = 0$ 를 만족시키는 x 의 값을 k 라 하면,

$g(k) = g(a)$ 이므로

$$\frac{|g(x) - g(a)| - |g(k) - g(a)|}{x - k} = \frac{|g(x) - g(k)|}{x - k}$$

(i) $x = k$ 의 좌우에서 $g(x) - g(a)$ 의 부호가 같을 때

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{|g(x) - g(k)|}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{|g(x) - g(k)|}{x - k}$$

이므로 함수 $|g(x) - g(a)|$ 는 $x = k$ 에서 미분가능하다.

(ii) $x = k$ 의 좌우에서 $g(x) - g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k) = 0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{|g(x) - g(k)|}{x - k} \neq \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{|g(x) - g(k)|}{x - k}$$

이므로 함수 $|g(x) - g(a)|$ 는 $x = k$ 에서 미분가능하지 않다.

(iii) $x = k$ 의 좌우에서 $g(x) - g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k) \neq 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{|g(x) - g(a)|}{x - k} \neq \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{|g(x) - g(a)|}{x - k}$$

이므로 함수 $|g(x) - g(a)|$ 는 $x = k$ 에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x) - g(a)|$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이므로

$g(x) - g(a) = 0$, $g'(x) = f(x) \neq 0$

인 x 가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

그러므로 사차함수 $y = g(x)$ 는 단 하나의

극솟값을 갖고 함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선

$y = g(a)$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

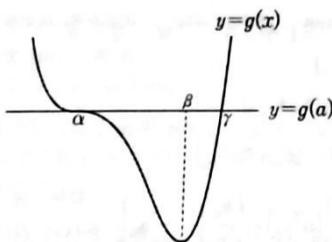
$g'(x) = 0$ 인 방정식 $g(x) - g(a) = 0$ 의 근을 α ,

함수 $g(x)$ 가 극솟값을 가질 때의 x 의 값을 β 라

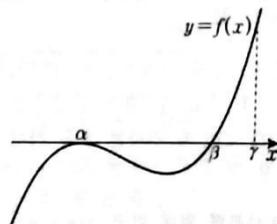
하면 α, β 의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우

로 나눌 수 있다.

(i) $\alpha < \beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma) = g(a)$, $\beta < \gamma$)



함수 $y = g(x)$ 의 도함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



$g(a) = g(\gamma) = g(a)$ 이므로 $\alpha = a$ 또는 $\gamma = a$

(가)에서 $f'(a) = 0$ 이므로 $\alpha = a$ 이다.

따라서 $f(x) = 4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$$h(t) = g(a) = \int_t^a f(s)ds = - \int_a^t f(s)ds \text{ 에서}$$

$$h'(t) = -f(t)$$

함수 $h(t)$ 가 $t=2$ 에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로 $h'(2) = -f(2) = 0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$ 이다.

$$a=2 \text{ 이면 } h(2) = \int_2^2 f(t)dt = 0 \neq 27$$

이므로 $a \neq 2$

$\beta = 2$ 이면

$$h(3) = \int_3^a f(s)ds = 0 \text{ 이고,}$$

$$h(2) = \int_2^a f(s)ds = 27 \text{ 이므로}$$

$$h(2) - h(3) = \int_2^3 f(s)ds = 27 \text{ 이다.}$$

$$\int_2^3 f(s)ds$$

$$= \int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$$

$$= \int_2^3 4[s^3 - 2(a+1)s^2 + (a^2+4a)s - 2a^2]ds$$

$$= \left[s^4 - \frac{8}{3}(a+1)s^3 + 2(a^2+4a)s^2 - 8a^2s \right]_2^3$$

$$= 65 - \frac{152}{3}(a+1) + 10(a^2+4a) - 8a^2$$

$$= 2a^2 - \frac{32}{3}a + \frac{43}{3} = 27$$

이므로

$$3a^2 - 16a - 19 = 0$$

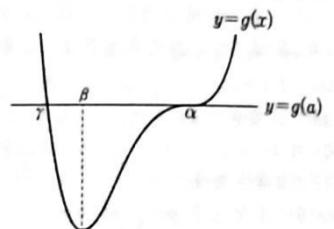
$$(a+1)(3a-19) = 0$$

$$a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{19}{3}$$

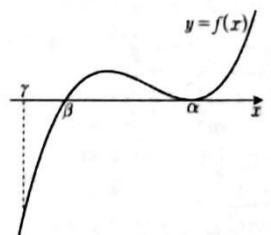
$a < 2$ 이므로 $a = -1$ 이다.

$f(x) = 4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha > \beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma) = g(a)$, $\gamma < \beta$)



함수 $y = g(x)$ 의 도함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a) = 0$ 이므로 $\alpha = a$ 이다.

따라서 $f(x) = 4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha < \beta$ 인 경우와 마찬가지로 $\beta = 2$ 이다.

$$f(x) = 4(x-a)^2(x-2)$$

$$a \neq 3 \text{ 이면 } h(3) = \int_3^a f(s)ds \neq 0 \text{ 이므로 } a = 3$$

따라서 $f(x) = 4(x-3)^2(x-2)$ 이고

$$h(2) = \int_2^a f(s)ds = \int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds = \frac{1}{3}$$

$h(2) \neq 27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

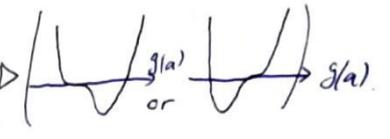
따라서 $f(x) = 4(x+1)^2(x-2)$ 이다.

$$f(5) = 4 \times 36 \times 3 = 432$$

Solution. $g(x) = \int_t^x f(s) ds$.

$g(a) = \int_t^a f(s) ds = - \int_a^t f(s) ds = h(t)$.

$h'(t) = -f(t)$. (a는 상수이므로 무시).

(4)에서 $g(x) = (x-d)^3(x-\beta) + g(a)$ 꼴임은 잘 알 수 있다. ($d \neq \beta$) \Rightarrow 

α, β 중 하나는 a ①

$h(t) = g(a) = \int_t^a f(s) ds = g(a) - g(t) = - (t-d)^3(t-\beta)$.

$g'(x) = f(x) = (x-d)^2(4x-3\beta-d)$

위자의 개형을 보면 $\alpha, \frac{3\beta+d}{4}$ 중 하나는 a ②

0.0에 의해 $a = d$. ($d \neq \beta$ 이므로 참함 X)

남은 조건은 $h(t) = -(t-d)^3(t-\beta)$ 에서 $h(3) = 0$
 $h(2) = 27$
 $h'(2) = 0$.

$h'(x) = -f(x) = -(x-d)^2(4x-3\beta-d)$.

$d, \frac{3\beta+d}{4}$ 중 하나는 2 ③

시기를 통해 $\rightarrow \alpha, \beta$ 중 하나는 3 ④

$\rightarrow -(2-d)^3(2-\beta) = 27 \rightarrow d \neq 2, \beta \neq 2$ ⑤

③, ⑤에서 $d \neq 2$ 이므로 $\frac{3\beta+d}{4} = 2, d = 8-3\beta$.

④를 사용하면 $8-3\beta$ 와 β 중 하나는 3 . $\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \beta = 3 \\ \downarrow \\ d = -1 \end{array} \right)$ 또는 $\left(\begin{array}{l} \beta = \frac{5}{3} \\ \downarrow \\ d = 3 \end{array} \right)$
 Case A. Case B.

A. $h(t) = -(t+1)^3(t-3)$ B. $h(t) = -(t-3)^3(t-\frac{5}{3})$.

이중 $h(2) = 27$ 을 만족하는 Case는 A뿐.

$\therefore h(t) = -(t+1)^3(t-3)$. $f(x) = (x-d)^2(4x-3\beta-d)$
 $= (x+1)^2(4x-8)$.

$\rightarrow f(5) = 36 \cdot 12 = 432$.

432 QED.

21. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. x_2 > \frac{1}{2}$$

$$\sphericalangle. y_2 - y_1 < x_2 - x_1$$

$$\sqsubset. \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$$

① \neg

② \neg, \sphericalangle

③ \neg, \sqsubset

④ $\sphericalangle, \sqsubset$

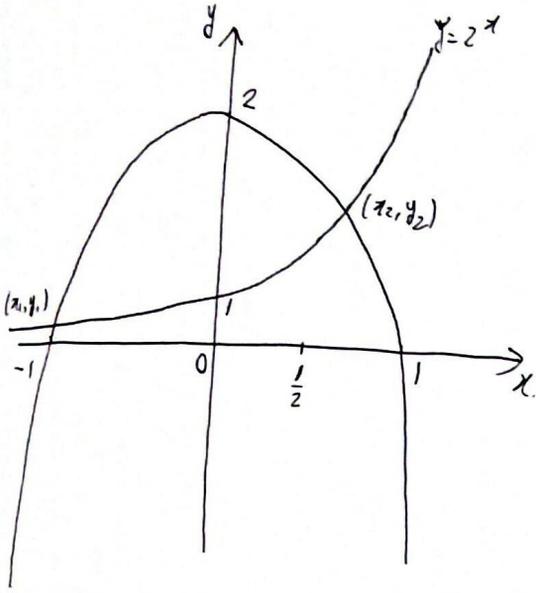
⑤ $\neg, \sphericalangle, \sqsubset$

$$y = 2^x$$

$$y = -2x^2 + 2$$

(20210621-4)
평차원

50. $y = 2^x$ 는 y 축 대칭축이 없다.



(그림 과묵함...)

식 정리부터.

$$2^{x_2} = 2 - 2x_2^2 = y_2$$

$$2^{x_1} = 2 - 2x_1^2 = y_1$$

(7) x_2 와 $\frac{1}{2}$ 대소 비교.

$$2^{x_2} = 2 - 2x_2^2$$

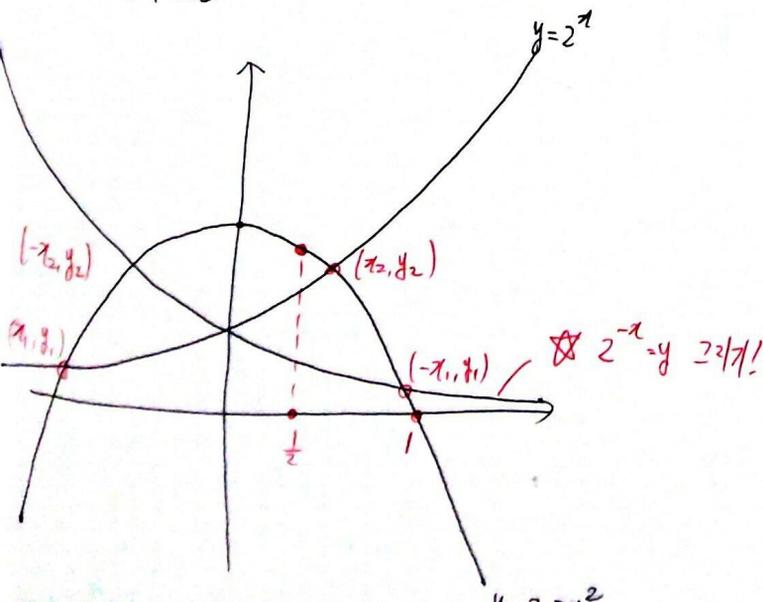
$$2^{\frac{1}{2}} < 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore x_2 > \frac{1}{2} \quad (\text{7=참})$$

(이전 문제들 풀이처럼 차이항수 설정해봐도 Good.)

(L, C) $y = 2^x$ 의 y 축 대칭

간단히 보면



$(x_1, y_1) \rightarrow (-x_1, y_1)$ 대칭을 통해

① $x_2 < -x_1$ 이며, $\textcircled{1} \rightarrow x_1 + x_2 < 0$

② $\textcircled{7}$ 추론으로 $\frac{1}{2} < x_2 < 1$ 이므로

$$\frac{1}{2} < -x_1 < 1 \text{ 도 추론됨.}$$

$$\frac{1}{2} < x_2 < 1$$

$$-1 < x_1 < \frac{1}{2}$$

$\textcircled{2} \rightarrow -\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < \frac{3}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$

L의 식은 $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

$$y_2 - y_1 = (2 - 2x_2^2) - (2 - 2x_1^2)$$

$$= -2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$(x_2 - x_1) > 0, \quad x_2 + x_1 > -\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < (x_2 - x_1) \text{ 은}$$

자명하다. (L=참)

C의 식은 $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2} < 1$,

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$$

(L번지와 C번지가 수직상 접한다. 본래의 의도된 풀이가 기울기 관찰이나 그림이지만 살짝 아쉽다.)

이 식은 L, C 번지 이전에 살폈다.

(C=참)

Ans. 7. L, C.

18. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t) dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x \leq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = 0$ 이다.

ㄴ. $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \geq 1$ 인 실수 a 가 존재한다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ (\ln(1+x^4))^{10} & (0 < x) \end{cases}$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) f(1-t) dt$$

(20210918)
(가) 평가원

sol. 대칭성 파악

$$g(1-x) = \int_0^{1-x} f(t) f(1-t) dt$$

let. $t=1-a$

$$= \int_1^x f(a) \cdot f(1-a) \cdot (-da)$$

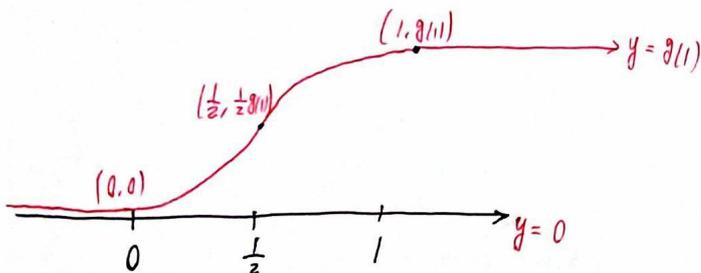
$$= - \int_1^x f(a) \cdot f(1-a) da$$

$$= - \int_0^x f(t) f(1-t) dt + \int_0^1 f(t) f(1-t) dt$$

$$\therefore g(x) + g(1-x) = g(1)$$

즉 $g(x)$ 는 $(\frac{1}{2}, g(\frac{1}{2}))$ 를 중심으로 점대칭.

$$2g(\frac{1}{2}) = g(1), g(0)=0$$



$g = g(x)$ 에서 미분.

$$g'(x) = f(x) \cdot f(1-x)$$

$$g'(x) = \begin{cases} x \leq 0 \rightarrow 0 & (\text{상수함수}) \\ 0 < x \leq 1 \rightarrow (\ln(1+x^4))^{10} \cdot (\ln(1+(1-x)^4))^{10} \geq 0 & (\text{중간부}) \\ 1 \leq x \rightarrow 0 & (\text{상수함수}) \end{cases}$$

$g(x)$ 가 점대칭함수이므로 $g'(x)$ 는 선대칭의 값을 가진다.

즉 위와 같이 그려짐이 자명하다. ($g(1) > 0$ 의 해석).

g, L 이 항등은 방희짐

($g'(x) \geq 0$ 임을 말하는 과정도 여러 가지다.)

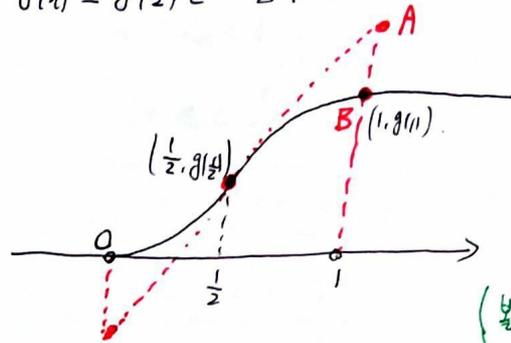
$g(x)$ 가 점대칭이므로 ($g(x) + g(1-x) = g(1)$)

$g'(x)$ 는 $(\frac{1}{2}, g'(\frac{1}{2}))$ 를 중심으로 선대칭한다.

이는 곧 $g'(x)$ 가 $g'(\frac{1}{2})$ 이라는 극대를 가짐을 의미.

(g' 그래프 그리는 시간 낭비할 필요가 없다.)

$g'(x) \leq g'(\frac{1}{2})$ 은 이렇게 나타낼 수 있다.



(불록성은 증명되므로 굳이 $g'(x)$ 없어도 됨.)

$$y = g'(\frac{1}{2})x + g(\frac{1}{2}) - \frac{g(\frac{1}{2})}{2} \text{ 을 그렸을 때,}$$

A, B 비교.

$$A(1, g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} g'(\frac{1}{2}))$$

$$B(1, g(1))$$

$g(x)$ 의 점대칭성에 의해

$$\frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}g'(\frac{1}{2}) \geq g(1) = 2g(\frac{1}{2}) \dots (4)$$

$$g'(\frac{1}{2}) \geq g(1) \geq g(x) \quad (\text{최댓값의 논리})$$

$$g'(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})^2$$

$$f(\frac{1}{2}) = (\ln \frac{17}{16})^{10} < (\ln e)^{10} = 1$$

$$\therefore f(\frac{1}{2}) < 1$$

$$g'(\frac{1}{2}) < 1$$

$$g(x) \leq g(1) \leq g'(\frac{1}{2}) < 1$$

$$\rightarrow g(x) < 1$$

드른 거짓.

Ans. 7. L.

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b 에 대하여
 ab 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.

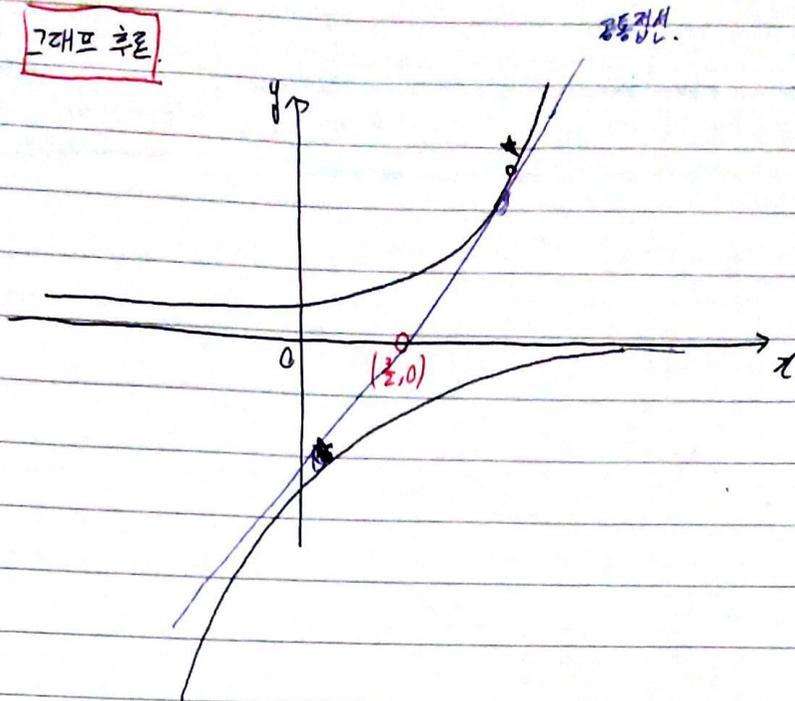
모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$-e^{-x+1} \leq ax + b \leq e^{x-2}$$

이 성립한다.

$|M \times m^3| = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

SOL ① 그래프 추론



$a > 0$ 임은 자명.

① $b > 0$ 일 때 최댓값 규명. $y = e^{x-2}$ 만 고려함.

$(0, b)$ (t, e^{t-2}) (점점의 x 좌표 (t, t))

$$\text{기울기} = a = \frac{e^{t-2} - b}{t} = e^{t-2}$$

$$a = e^{t-2}, \quad b = (1-t)e^{t-2}$$

$$ab = (1-t)e^{2t-4}$$

$$\text{let. } \lambda(t) = (1-t)e^{2t-4}$$

$$h'(t) = (1-2t)e^{2t-4}$$

$$t = \frac{1}{2} \text{에서 } ab = \frac{1}{2}e^{-3} \text{ (최대, 모순)}$$

$$\therefore \max(ab) = \frac{1}{2}e^{-3}$$

② $b < 0$ 에서 최솟값 규명.

$y = -e^{-x}$ 과 $y = e^{x-2}$ 는 $x = \frac{3}{2}$ 에서, $(\frac{3}{2}, 0)$ 에서 접점을 이룬다.

두 그래프가 양의 기울기인 공통접선을 가짐은 자명하며, $(\frac{3}{2}, 0)$ 을 지난다

$a > 0, b < 0$ 에서 ab 의 최솟값이 공통접선에서 생성됨은 간단한 추론으로

증명 가능하다. $\left\{ \begin{array}{l} \text{기울기 } \uparrow : e^{x-2} \text{ 에서 모순.} \\ -b \uparrow : -e^{-x} \text{ 에서 모순.} \end{array} \right.$

이게 최선이였다. 훗.. 나란 녀석

$(d, -e^{-d+1})$ $(\frac{3}{2}, 0)$ (f, e^{f-2}) 를 지나는 공을 접선 직선

$$\text{기울기 } a = \frac{e^{-d+1}}{f-d} = \frac{e^{f-2}}{f-d} = \frac{e^{f-2} + e^{-d+1}}{f-d} = \frac{2e^{f-2}}{f-d}$$

$$f-d=2, f+d=3.$$

$$f = \frac{5}{2}, d = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a = e^{\frac{1}{2}}, b = -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} \quad \min(ab) = -\frac{3}{2}e.$$

$$\therefore |M \cdot m^3| = \left| -\frac{27}{16} \right| = \frac{27}{16}$$

Ans) 43.

50L 2) 사 계반으로 미분 극점 파악

우선, 그래프를 통해 $a > 0$ 임은 추론 가능하다.

$$\text{주어진 식: } -e^{-x+1} \leq ax+b \leq e^{x-2} \quad (\text{모든 실 } x).$$

따로 바꾸도록 한다.

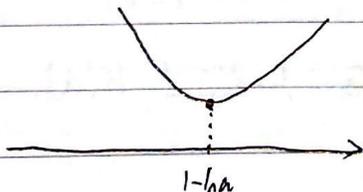
$$\textcircled{1} -b \leq ax + e^{-x+1}$$

$$\text{let } h(x) = ax + e^{-x+1}$$

$$h'(x) = a - e^{-x+1}$$

$$x = 1 - \ln a \text{ 에서 } h'(x) = 0.$$

$a > 0$, $h(x)$ 가



형태.

$$-b \leq h(x) \Leftrightarrow -b \leq h(1 - \ln a) = a(2 - \ln a).$$

$$\textcircled{2} b \leq e^{x-2} - ax$$

① 과 동일 한 방식 으로 풀 여 하 면

$b \leq -a(1 + \ln a)$ 를 구 할 수 있 다.

$$\therefore -2a + a \ln a \leq b \leq -a - a \ln a.$$

(부등식 최대-최소 문제로 바꾼다.)

$$-2a^2 + a^2 \ln a \leq ab \leq -a^2 - a^2 \ln a.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{우선 } a \text{의 범위를 정하자. } -2a^2 + a^2 \ln a \leq -a^2 - a^2 \ln a. \\ 2a^2 \ln a \leq a^2. \\ \ln a \leq \frac{1}{2}. \\ \therefore a \leq \sqrt{e} \text{에서 생략.} \end{array} \right\}$$

$$\text{let } -2a^2 + a^2 \ln a = g(a)$$

$$-a^2 - a^2 \ln a = k(a)$$

$$g(a) \leq ab \leq k(a) \quad (\text{g(a)의 최대, k(a)의 최소를 구한다.})$$

$$g'(a) = -a(3 + 2 \ln a).$$

$$a=0, e^{-\frac{3}{2}} \text{에서 극값이나 0은 범위 포함 X.}$$

$$\therefore M = \frac{1}{2} e^{-3}.$$

$$k'(a) = a(2 \ln a - 3).$$

$$a \leq \sqrt{e} \text{일 때 } k(a) \text{는 감소함수.}$$

$$\frac{2}{7}, a = \sqrt{e} \text{에서 최소인 } k(a).$$

$$\therefore m = -\frac{3}{2} e$$

$$\therefore |M \cdot m^3| = \frac{27}{16} e^3.$$

Ans) $43 \frac{11}{16} e^3$

20. 함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$ 에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$ 인 함수 $g(x)$ 와 자연수 n 이 다음 조건을 만족시킬 때, n 의 값은? [4점]

함수 $h(x) = f(nx)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\int_{-1}^1 h(x) dx = 2, \quad \int_{-1}^1 x h(x) dx = -\frac{1}{32}$$

이다.

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$$f(x) = \pi \sin 2\pi x$$

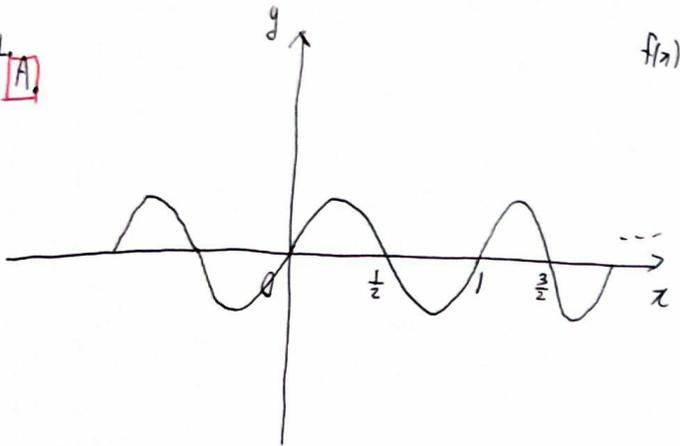
정의역 $[0, 1]$

자변수 n .

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$ 는 연속함수.

$$\int_{-1}^1 h(x) dx = 2$$

$$\int_{-1}^1 x h(x) dx = -\frac{1}{32}$$



$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi \sin 2\pi x dx = -\frac{1}{2} \cos 2\pi x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} f(nt) \cdot n dt = n \int_0^{\frac{1}{2n}} f(x) dx = 1$$

$$\text{let } x = nt$$

$$dx = n dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x) dx = \frac{1}{n}$$

$$y = f(x) \geq 0 \text{ 인 부분의 정적분은 } \frac{1}{n} \times 2n = 2,$$

$$2 = \left(\int_{[-1,1] \text{의 정적분값}} \right) \geq \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx = 2$$

$$\therefore \int_{-1}^1 h(x) dx = 2 \text{ 이기 위해서}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \leq 0) \rightarrow (\text{음의 값 상쇄}) \\ 1 & (0 \leq f(x)) \rightarrow (\text{양의 값 극대화}) \end{cases}$$

이후 풀이는

3두 [A] 기반

→ 필수적인 요소.

이후 (4) 해썬 자신

유하는 대로.

B-1. 대칭 활용 후 N.G.D. 일변적 풀이.

$$\int_{-1}^1 x h(x) dx \text{ 중 관찰}$$

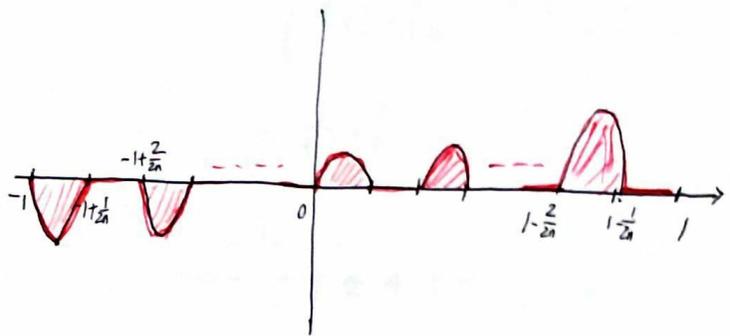
$$y = x f(x) \text{ 는 볼록 선대칭.}$$

이중 $x h(x)$ 에서 사라지는 부분은

$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x f(x) dx + \int_{-1+\frac{3}{2n}}^{-1+\frac{2}{2n}} x f(x) dx$$

$$+ \dots + \int_{1-\frac{3}{2n}}^{1-\frac{2}{2n}} x f(x) dx + \int_{1-\frac{1}{2n}}^{1-\frac{2}{2n}} x f(x) dx$$

→ $y = x h(x)$ 이라면 대칭... (크기는 음과 양에 대해 동일)



여기서

$$\begin{aligned} \int_{-1+\frac{1}{2n}}^{-1+\frac{3}{2n}} x f(x) dx &= \int_1^{-1+\frac{1}{2n}} (t) f(-nt) \cdot (-dt) \\ \text{let } x &= -t \\ dx &= -dt \\ &= \int_{-1+\frac{1}{2n}}^1 x f(x) dx \end{aligned}$$

→ $\delta(x)$ 로 인해 상쇄된 부분 돌아주기.

$$\rightarrow \int_{-1}^1 x h(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx \quad \text{--- (A)}$$

$$= \int_0^1 \pi x \sin 2\pi x dx$$

$$= -\frac{x}{2n} \cos 2\pi x + \frac{1}{4n^2\pi} \sin 2\pi x \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2n}$$

$$-\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$$\therefore n = 16.$$

B-2. @ 이후 적분법 (본인의 현상 풀이)

$$\int_{-1}^1 x h(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx$$

$$= \frac{x}{n} F(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n} F(x) dx$$

($f(x) = \pi \sin 2\pi x$ 의 부정적분 중
 $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2\pi x$ 설정)

$$= \frac{1}{n} F(1) - \int_0^1 \frac{1}{n} \cdot (-\frac{1}{2}) \cos 2\pi x dx$$

$$= -\frac{1}{2n} \cos 2\pi = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore n=16$

C) $H(x)$ 설정 \rightarrow 역함수 적분.

B-2 에서 $F(x)$ 설정 대신, 아예 처음부터

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2\pi x \text{ 사용}$$

$h(x)$ 는 0 또는 $f(x)$.

$h(x)$ 의 부정적분은 0 또는 $\frac{1}{n} F(x)$.

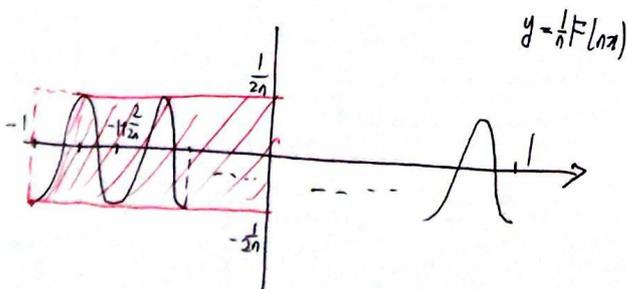
$$\rightarrow \int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x h(x) dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} H^{-1}(x) dx = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n^2} (n)$$

$$\int_{-1+\frac{2}{2n}}^{-1+\frac{3}{2n}} x h(x) dx = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n^2} (n-1)$$

$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{2n}} x h(x) dx = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{n^2} (n-1)$$

(왜?) $\rightarrow H^{-1}(x)$ 와 $h(x)$ 그래프 그린 후

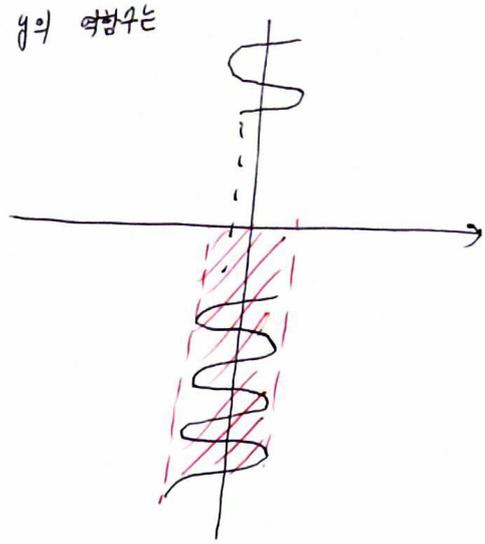
역함수의 면적을 살펴보면



ex. $\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x h(x) dx \leftrightarrow \int_{H(-1)}^{H(-1+\frac{1}{2n})} H^{-1}(x) dx$

이 y의 역함수는

y^{-1}



$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x h(x) dx = \int_{H(-1)}^{H(-1+\frac{1}{2n})} H^{-1}(x) dx$$

$$= - \left(\frac{x}{2n} \Big|_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} - \left(\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} - \int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \cos 2\pi x \right) dx \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n}$$

이후 구간에 $\frac{1}{n^2}$ 씩 더해진다.

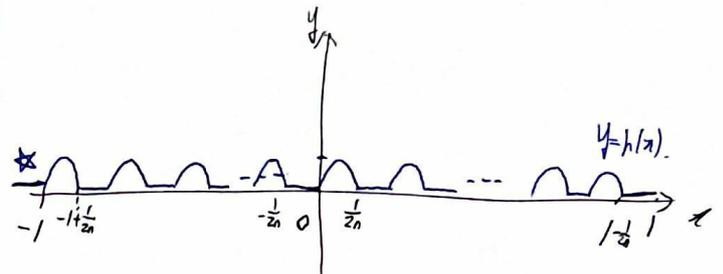
그래프 관찰을 통해 알 수 있다.

$$\therefore \frac{1}{4n^2} \cdot 2n - \frac{n}{n^2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore n=16$

D) 그래프 읽어내기 (가장 합당한, 좋은 풀이)

$h(x)$ 를 바로 그려보기.



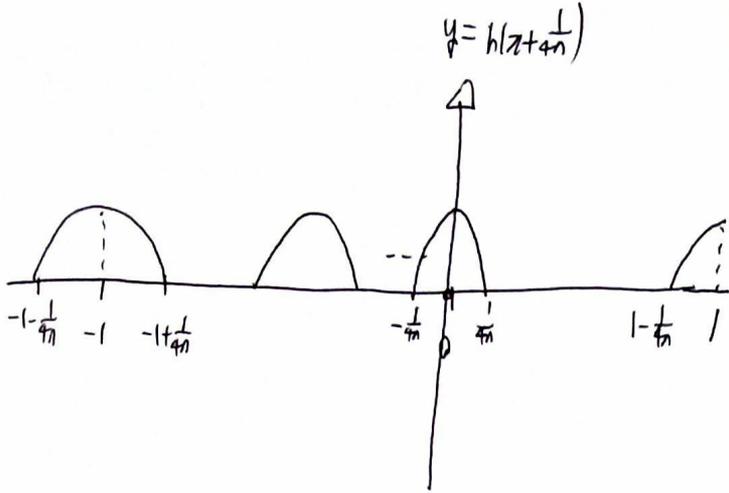
$$\int_{-1}^1 x h(x) dx = \int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{4n} \right) h(x) dx - \frac{1}{4n} \int_{-1}^1 h(x) dx$$

$$= 0 - \frac{1}{4n} \cdot 2 = -\frac{1}{2n}$$

$$-\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore n=16$

왜?



이 함수는 보통 선대칭.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x h(x) dx &= \int_{-1 + \frac{1}{4n}}^{1 - \frac{1}{4n}} (x + \frac{1}{4n}) h(x + \frac{1}{4n}) dx \\
 &= \int_{-1 + \frac{1}{4n}}^{1 - \frac{1}{4n}} x h(x + \frac{1}{4n}) dx + \frac{1}{4n} \cdot \int_{-1}^1 h(x) dx \\
 &= \int_{-1 + \frac{1}{4n}}^{1 - \frac{1}{4n}} x h(x + \frac{1}{4n}) dx + \boxed{\int_{-1 + \frac{1}{4n}}^{1 - \frac{1}{4n}} x h(x + \frac{1}{4n}) dx} \\
 &\quad + \frac{1}{4n} \int_{-1}^1 h(x) dx.
 \end{aligned}$$

어떤 방식으로 대칭을 잡고
 풀어도 결국 이 식은 사라지고,
 두 개 적분식으로 정리된다.

→ 이런 식으로 어떤 적분을 활용하면
 복잡한 식들도 간단하게 정리 가능.

이런 주기 대칭의 일반화를 쓰면

이 문제도 $\boxed{-\frac{1}{4n} \int_{-1}^1 h(x) dx}$ 로 정리.

20. 실수 $a(a > 1)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

① $g'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt$

$= 2x \int_0^x (t+1)(t-1)(t-a) dt$

$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (t^3 - at^2 - t + a) dt$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{a}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + ax$

$= \frac{x}{12} (3x^3 - 4ax^2 - 6x + 12a)$

$a > 1,$

let. $h(x) = 3x^3 - 4ax^2 - 6x + 12a$

$h(x)$ 는 종근을 가진다.

$h'(x) = 9x^2 - 8ax - 6$

$h(x) - h'(x) = 0$ 을 만족하는 x 에 대해서,

a 를 x 도 나타내면

① $h(x)$ 의 a .

$4a(x^2 - 3) = 3x^3 - 6x$

$a = \frac{3x(x^2 - 2)}{4(x^2 - 3)}$

② $h'(x)$ 의 a .

$8ax = 9x^2 - 6$

$a = \frac{9x^2 - 6}{8x} = \frac{3(3x^2 - 2)}{8x}$

$\therefore a = \frac{3x(x^2 - 2)}{4(x^2 - 3)} = \frac{3(3x^2 - 2)}{8x}$

let. $x^2 = k$

$(k-2) \cdot 24k = 12(3k-2)(k-3)$

$(k-2) \cdot 2k = (3k-2)(k-3)$

$2k^2 - 4k = 3k^2 - 11k + 6$

$k = 1$ or $6 \rightarrow x = \sqrt{6}$ (단, $x > 0$)

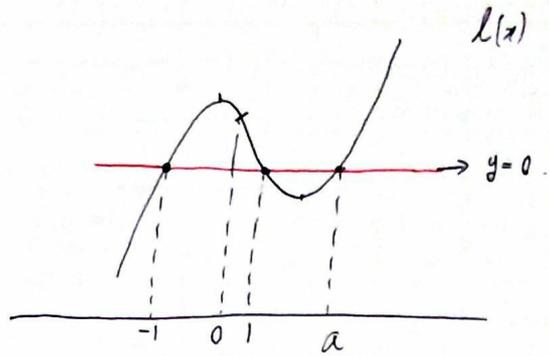
\therefore Sub. $\max(a) = \sqrt{6}$

② $g'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt$

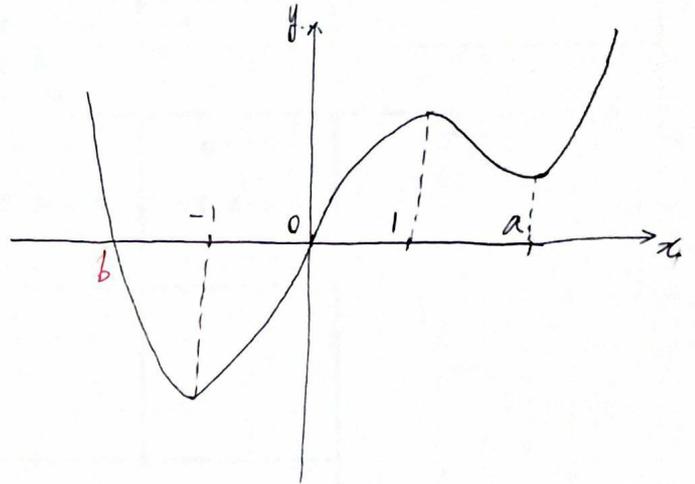
$= 2x \int_0^x (t+1)(t-1)(t-a) dt$

let. $l(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$ ($a > 1$)

$l'(0) = -1$ (N.O.D.)



$\int_0^x l(t) dt$ 의 개형 (단, $a > 1$)



지극 확정이 불가능한 이유는 a 가 제는 함수값이 예측 불가능하므로.

그러나 b 가 존재함은 확정 (오직 하나의 극값)
 $x=0$ 에서 극 확정. ($g'(x)$ 는 $x=0$ 에서 종근)

$\therefore \int_0^a l(t) dt \geq 0$ (음수의 값일 경우 a 는 여러 개.)

$\int_0^a l(t) dt = \int_0^a (t+1)(t-1)(t-a) dt$

$= \frac{a^2}{12} (-a^3 + 6a) = \frac{a^2}{12} (6 - a^2) \geq 0$

$a > 1, \therefore a^2 = 6$

$a = \sqrt{6}$ (max Sub.)

두 상수 $a, b(a < b)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$f(x) = (x-a)(x-b)^2$ 이라 하자. 함수 $g(x) = x^3 + x + 1$ 의 역함수

$g^{-1}(x)$ 에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$ 가 다음 조건을 만

족시킬 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오.

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) $h'(3) = 2$

$$(a < b)$$

$$f(x) = (x-a)(x-b)^2$$

(20211228 가)
포함원

$$g(x) = x^3 + x + 1$$

$$h(x) = f(g^{-1}(x))$$

$$f(x) = h(g(x)) = h(x^3 + x + 1) \text{ 양사.}$$

$(x-1) | h(x)$ 는 미분가능.

$$h'(3) = 2$$

$$f(8) = ?$$

50L. ☆ 구간 치환 ☆

$$f(x) = (x-a)(x-b)^2 = h(x^3 + x + 1)$$

$$g(x) = x^3 + x + 1 \text{ 은 } g'(x) > 0 \text{ 이므로}$$

치역이 실수 전체를 포함한다. (치역이 실수 전체 집합)

$$\rightarrow \text{let. } R(x) = (x-1) | h(x) |$$

$$\text{let. } x = t^3 + t + 1$$

$$R(t^3 + t + 1) = (t^3 + t) | h(t^3 + t + 1) | \\ = t(t^2 + 1) \cdot | f(t) |$$

$\therefore R(b) = t(t^2 + 1) \cdot | (t-a)(t-b)^2 |$ 이 미분 가능 함수.

$$R(x) = (x^2 + 1) \cdot (x-b)^2 \cdot \left\{ t |t-a| \right\}$$

$a \neq 0$ 일 경우 형식이 생겼다.

$$\therefore a = 0$$

$$f(x) = x(x-b)^2, \quad 0 < b$$

$$h'(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = (h(x^3 + x + 1))' = (3x^2 + 1) \cdot h'(x^3 + x + 1)$$

$x^3 + x + 1 = 3$ 을 만족할 x 는

$x=1$ 뿐이다. ($g(x)$ 는 증가함수 이므로)

$$f'(1) = 4 h'(3) = 8$$

$$f'(x) = (x-b)(3x-b)$$

$$f'(1) = (1-b)(3-b) \\ = b^2 - 4b + 3 = 8$$

$$b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$(b-5)(b+1) = 0$$

$$b = -1 \text{ or } 5$$

$$0 < b \text{ 이므로 } b = 5$$

$$\therefore f(8) = 8 \cdot 3^2 = 72$$

Ans. 72

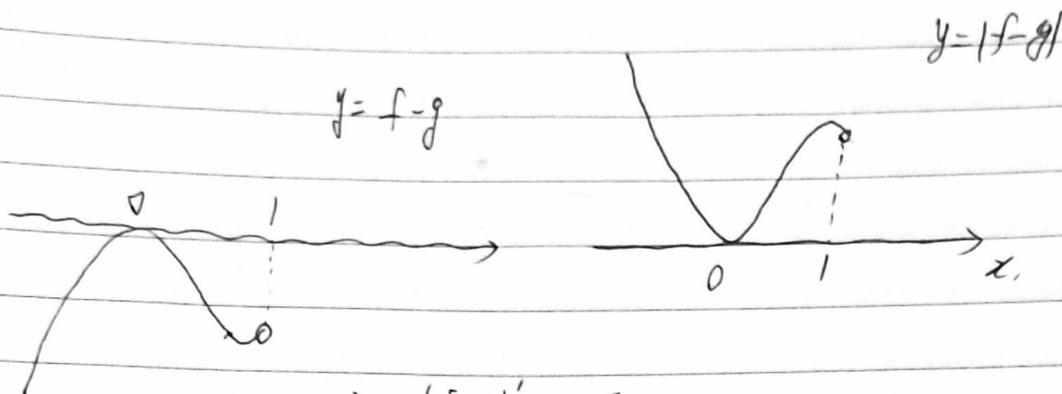
30. 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
함수 $g(x)$ 는 일차함수이다. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} |f(x) - g(x)| & (x < 1) \\ f(x) + g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
 $h(0) = 0$, $h(2) = 5$ 일 때, $h(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$h(x) = |f-g|, (x < 1)$. $f(0) = g(0) \Rightarrow f'(0) = g'(0)$ 의 후론.

let. $f-g = x^2(x+a)$ (기본한 인수 정리)



$$\Rightarrow (f-g)' = 3x^2 + 2ax$$

$$f'(1) - g'(1) = 2a + 3$$

절댓값 있을 경우 기울기는 $-2a-3$.

$$\Rightarrow h'(1) = -2a-3$$

$$\oplus h(1) = |f(1) - g(1)| = -a-1$$

$$\oplus h(2) = 5$$

복합한 인수 정리 $\rightarrow h(x) - (tx+r) = (x-1)^2 Q(x)$

$$t+r = -a-1$$

$$t = -2a-3$$

$$\rightarrow h(x) + (2a+3)x - a - 2 = (x-1)^2 Q(x) = \underbrace{(x-1)^2 (x+3a+7)}_{(h(2)=5 \text{ Sub.})}$$

$$\therefore h(x) = \begin{cases} -x^3 - ax^2 = -(f-g) \dots \textcircled{a} \\ (x-1)^2(x+3a+7) - (2a+3)x - a - 2 = (f+g) \dots \textcircled{b} \end{cases}$$

$\textcircled{a} + \textcircled{b}$ 의 값은 이차항 계수가 존재할 수 없다. ($g(x) = \text{일차항}$)

$$\text{N.G.D.} \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore h(4) = 39$$

29. 함수 $f(x) = e^x + x - 1$ 과 양수 t 에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x \{t - f(s)\} ds$$

가 $x = \alpha$ 에서 최댓값을 가질 때, 실수 α 의 값을 $g(t)$ 라 하자.

미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1 + e^{g(t)}} dt$ 의 값을

구하시오. [4점]

20. 두 상수 a, b 와 함수 $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ f(b-x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\int_a^{a-b} g(x) dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2} \ln 5$

② $\ln 5$

③ $\frac{3}{2} \ln 5$

④ $2 \ln 5$

⑤ $\frac{5}{2} \ln 5$

202020
사관-(가)

상수 a, b . $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ f(b-x) & (a \leq x) \end{cases}$$

$g(x)$ 는 실수 전체에서 미분가능. $\int_a^{a-b} g(x) dx = ?$

Sol. $\rightarrow a$ 의 부호 파악? $\Rightarrow f(x)$ 를 파악.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2+1} & (x < 0) \\ \frac{x}{x^2+1} & (0 \leq x) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & (x < 0) \\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & (0 \leq x) \end{cases}$$

$x=0$ 에서 $f'(x)$ 는 불연속. 즉, $g(x) = f(x) (x < a)$ 에서 $a < 0$ 임을 알 수 있다.

$\therefore a < 0$.

b 의 부호 파악 $\rightarrow a \leq x$ 에서 0의 위치.

앞에서 보았듯이 $x=0$ 에서 $f'(x)$ 는 불연속.

즉, $g(x) = f(b-x) (a \leq x)$ 에서 $b-x=0$ 의 근이 포함될 수 없다.

$b-a < 0$.

$\rightarrow b < a < 0$

$\therefore b < a < 0$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{-x}{x^2+1} & (x < a) \\ f(b-x) = \frac{x-b}{(b-x)^2+1} & (a \leq x) \end{cases}$$

$g(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분가능성.

- 풀이 ① $f(a) = f(b-a)$, $f'(a) = -f'(b-a)$.

$$\frac{-a}{a^2+1} = \frac{a-b}{(b-a)^2+1}$$

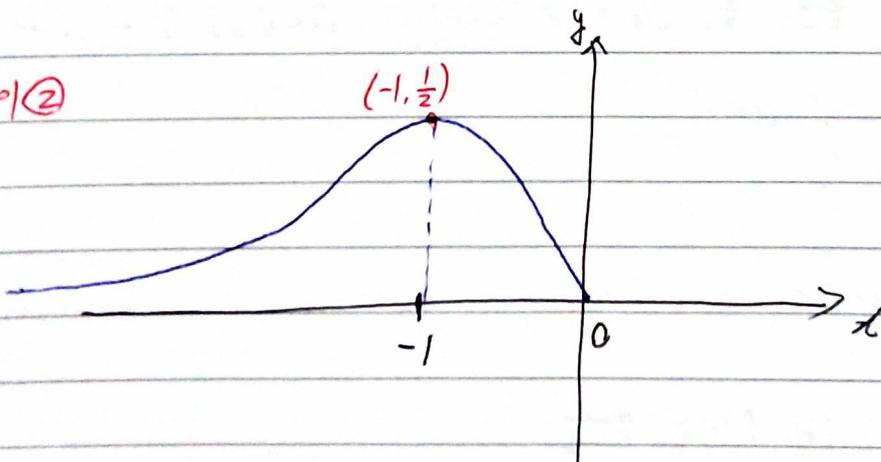
양립 ($\frac{a^2-1}{(a^2+1)^2} = \frac{(a-b)^2-1}{((b-a)^2+1)^2}$)

$$\rightarrow (a^2+1)^2 = ((b-a)^2+1)^2$$

$$\rightarrow a^2 = (b-a)^2$$

$$b \neq 0, \therefore \underline{b=2a < 0.}$$

- 풀이 ②



$f(x) (x \leq 0)$

$$a < 0, b-a < 0.$$

$f(a) = f(b-a)$ 인데 미분계수.....

이건 안 되네... 쪼라.

그냥 쪽지에서 풀다 보니...

$$\text{하여튼 } b = 2a < 0.$$

$$f'(a) = a.$$

$$\rightarrow a = -1, b = -2.$$

$$\int_a^{a-b} g(x) dx = \int_{-1}^1 g(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(-2-x) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|0| - \frac{1}{2} \ln 2 = \boxed{\frac{1}{2} \ln 5}$$

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq a) \\ 2a - f(x) & (f(x) < a) \end{cases} \quad (a \text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서만 미분가능하지 않다.

(나) 함수 $g(x) - f(x)$ 는 $x = \frac{7}{2}$ 에서 최댓값 $2a$ 를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{7}{4}$

④ 2

⑤ $\frac{9}{4}$

(202020-4)
사관

$$g(x) = \begin{cases} 2a - f(x) & (f(x) < a) \\ f(x) & (a \leq f(x)) \end{cases}$$

$$(4) \Rightarrow g(x) - f(x) = \begin{cases} 2a - 2f(x) & (f(x) < a) \\ 0 & (a \leq f(x)) \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{2}, f(\frac{2}{2}) < a.$$

$$f(\frac{2}{2}) = 0.$$

2a가 최댓값이므로 $f(x) < a$ 인 $f(x)$ 의 치역 중
최소가 0이다. 즉,

$$g(x) = \begin{cases} 2a - f(x) & (0 \leq f(x) < a) \\ f(x) & (a \leq f(x)) \end{cases}$$

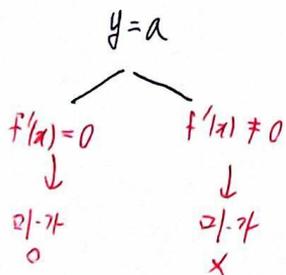
$$\therefore 0 \leq f(x).$$

$$\rightarrow x = \frac{2}{2} \text{ 에서 } f(x) = f(\frac{2}{2}) = 0.$$

$$0 \leq f(x) \text{ 이므로 자명하게 } f'(x) = 0.$$

$g(x)$ 의 그래프는 $y=a$ 인 경우 이외에는

미분불가능한 점이 생기지 않는다.



즉 $f(x)$ 의 관찰로 $g(x)$ 의 미분가능성 추론이 가능하다.

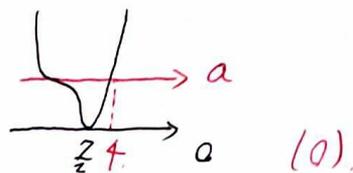
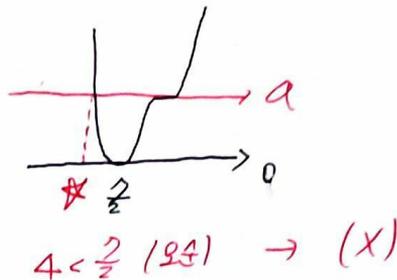
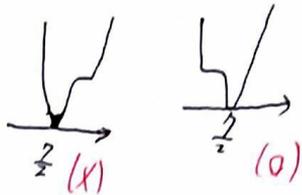
$f'(x) = 0$ 의 근의 개수가 3개거나 1개일 경우



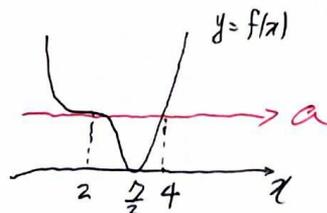
양의 a 의 경우 $y=a$ ($a > 0$)을 그릴 때
 $x=4$ 이외의 근이 팔히 생기므로
(가)에 위배된다.

즉 $f'(x)=0$ 의 근은 2개다.

ex.



사차함수 비율관계 사용 \rightarrow



$$f(x) = (x-2)^3(x-4) + \frac{27}{16}.$$

$$\therefore f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} \cdot (-\frac{3}{2}) + \frac{27}{16} = \frac{3}{2}$$

2/3

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2) = 0$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이다.

$g'(-1)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = \frac{n}{m-3\ln 3}$ 일 때, $|m \times n|$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 정수이고, $\ln 3$ 은 $1 < \ln 3 < 1.1$ 인 무리수이다.) [4점]

사관 202030, 최고차 1인 삼차함수 $f(x)$.

(가)

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt,$$

$g'(2) = 0$. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$.

~~가~~ $g'(-1)$ 의 값이 최대인 $f(x)$ 에서 $f(-1)$ 을 구하라.

$$(1 < \ln 3 < 1.1)$$

sol.

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt & (x \leq 0) \\ \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt & (0 < x) \end{cases}$$

$$x=2 \text{ 관찰} \Rightarrow g'(2) = 0. \quad g'(2) = \frac{f(2)}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{f(2) = 0}$$

$x=0$ 관찰 $\Rightarrow g'(0) = 0$ (좌우극한 모두).

$$g'(0) = f(0) \text{ (좌우극한 모두)},$$

$g(x) \geq 0$ 이므로 $f(0) \neq 0$ 일 경우 모순.

$$\boxed{f(0) = 0}$$

\therefore let. $f(t) = t(t-2)(t-a)$,

$$\hookrightarrow g(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1-t} dt & (x \leq 0) \\ \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t} dt & (0 < x) \end{cases}$$

$0 < x$ 의 범위로 우선 살펴.

$g(x) \geq 0$ 사용을 위해
 a 의 범위를 나눠보면

- $a < 0$ - ①
 - $a = 0$ - ②
 - $0 < a < 2$ - ③
 - $a = 2$ - ④
 - $2 < a$ - ⑤
- 포함.

$$(2+1)a \leq 0$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{t+1} dt \text{ 는 } 0 < x < 2 \text{ 구간 음수. 불가.}$$

$$(4)a = 2.$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)^2}{t+1} dt \rightarrow \text{가능} \rightarrow (5) \text{와 함께 다루자.}$$

$$(3) 0 < a < 2.$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{t+1} dt \geq 0 \text{ 일 경우. N.G.D.}$$

$$\int_0^x \frac{t^2(t-2)}{t+1} dt \geq a \cdot \int_0^x \frac{t(t-2)}{t+1} dt.$$

$$\int_0^x \left(t^2 - 3t + 3 + \frac{-3}{t+1} \right) dt \geq a \cdot \int_0^x \left(t - 3 + \frac{3}{t+1} \right) dt.$$

(g의 극값 중 국소는 t=2에서 나온다. x=2 대입시 만족해야 한다.)

$$\int_0^2 (\text{''}) dt \geq a \cdot \int_0^2 (\text{''}) dt.$$

$$\left[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3 \ln(t+1) \right]_0^2 \geq a \cdot \left[\frac{t^2}{2} - 3t + 3 \ln(t+1) \right]_0^2$$

$$\frac{8}{3} - 3 \ln 3 \geq a \cdot (-4 + 3 \ln 3).$$

$$(4 - 3 \ln 3) a \geq 3 \ln 3 - \frac{8}{3}.$$

$$\frac{3 \ln 3 - \frac{8}{3}}{4 - 3 \ln 3} \leq a,$$

$$\text{이때 } g'(-1) = \frac{f(-1)}{2} = \frac{-3(a+1)}{2} \leq \frac{-2}{4 - 3 \ln 3}.$$

$$\text{이때 } f(-1) \leq \frac{-4}{4 - 3 \ln 3}.$$

(일단 keep.)

여기서 끝. 하지만
이게 최선이였다. 훗.. 나란 녀석

(4)+(5) $2 \leq a$

좀 더 엄밀하게 ○○

$$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t} dt.$$

$0 < x$ 에서 $g(x)$ 의 극소는 $x=a$ 에서 나온다.

즉, $g(a) \geq 0$ 임을 보임으로 충분할 듯.

$$\rightarrow \int_0^a \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t} dt \geq 0. \quad (a \geq 2 \text{ 잊지 말자})$$

이렇하면 $\int_0^a \frac{t^2(t-2)}{1+t} dt \geq a \cdot \int_0^a \frac{t(t-2)}{1+t} dt.$

NGD 식은 ③에서 끌어오면.

$$\frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 + 3a - 3 \ln(a+1) \geq a \cdot \left(\frac{a^2}{2} - 3a + 3 \ln(a+1) \right).$$

정리하면

$$\frac{a^3}{6} + \frac{3}{2}a^2 + 3a - (3a+3) \ln(a+1) \geq 0, \quad \text{--- (A)}$$

$a \geq 2$ 에서 이 식을 만족할까? 파악이 어렵다면 조건을 먼저 써보자.

$g'(-1)$ 이 최대일 경우를 먼저 따져보자는 것.

$$g'(-1) = \frac{f(-1)}{2} = -\frac{3}{2}(a+1).$$

a 가 최소인 경우는 $a=2$ 일 때.

★ (A)에 $a=2$ 대입 시 성립.
(A)의 성정을 먼저 잡아 두는 것은 이 문제 풀이에
그다지 도움이 되지 않는다. 조건을 유리하게 사용하자.

자, 그렇다면 $\left[\begin{array}{l} g'(-1) = \frac{-2}{4-3 \ln 3} \quad \text{③} \\ g'(-1) = -\frac{9}{2} \quad \text{④} \end{array} \right.$ 이 둘 중 무엇이 더 큰가?

$$\frac{-2}{4-3\ln 3} \text{ vs } -\frac{9}{2} \text{ (?)}$$

→ $|\ln 3| < 1.1$ 조건을 사용하면

$$\frac{-2}{4-3\ln 3} \text{ 가 더 크다. (N.G.D.)}$$

따라서 이제 $f(x)$ 에 대해

$$\bullet \bullet \bullet f(-1) = \frac{-4}{4-3\ln 3}$$

↳ $x \leq 0$ 에서의 $f(x) \geq 0$ 판단은

신스로 해 보시길 바람. 매우 좋은 문제.

→ 물론 ①②③④⑤ 어느 쪽이든

$$g'(x) = \frac{f(x)}{2} = -\frac{3}{2}(a+1) \text{ 이므로}$$

a 의 가능한 가장 작은 값이 되어야 함이

보이긴 한다. 엄밀하게 풀어보았을 뿐. (실제에서는 ③④⑤ 맞은 뒤 ③만 풀어야 함)

두 페이지로 끝내도 될 풀이다.

21. 함수 $f(x) = -\frac{kx^3}{x^2+1}$ ($k > 1$)에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선

$y = f^{-1}(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 가장 작은 값을 α , 가장 큰 값을 β 라 하자. 함수 $y = f(x-2\beta) + 2\alpha$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $f'(\beta) = 2g'(\alpha)$ 일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$

② $\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

③ $\frac{4+2\sqrt{2}}{5}$

④ $\frac{5+2\sqrt{2}}{5}$

⑤ $\frac{6+2\sqrt{2}}{5}$

29. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & (x < 1) \\ cx^2 + \frac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x 좌표가 각각 $-1, 1, 2$ 일 때, $2a+4b-10c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 $0, 1, a, 2, b$ 이다.

$$f'(1) < 0, f'(2) < 0, f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

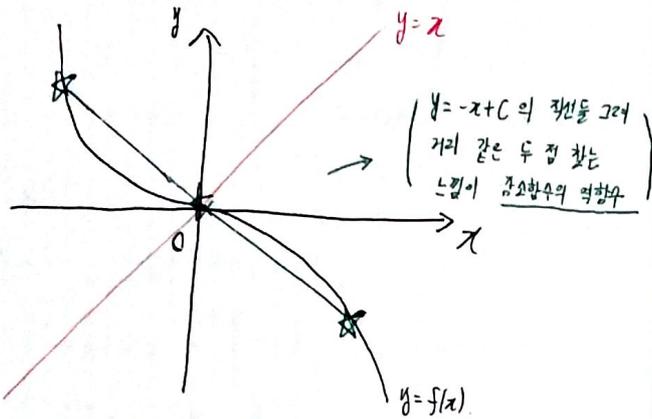
$$f(x) = -\frac{kx^3}{x^2+1} \quad (k>1)$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow x = \alpha \sim \beta. \quad \left(\begin{array}{l} 2018 1021-가 \\ \text{교육청} \end{array} \right)$$

$$g(f(x-2\theta) + 2d) = x.$$

Sol. $k>1$ 이므로 $f(x)$ 를 그려보면 대략

$$f'(x) = -k \cdot \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \leq 0$$

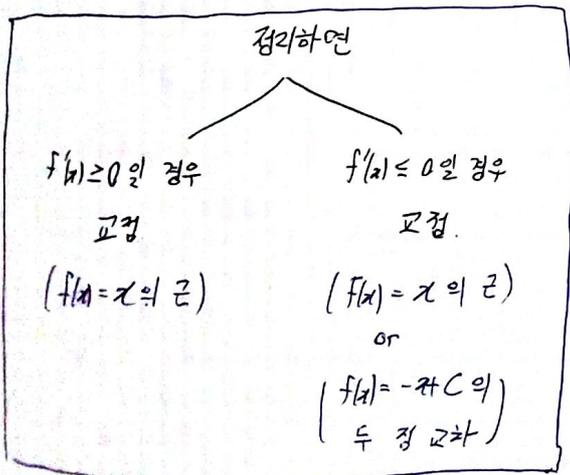


$$(+) \quad (f(x) + f(-x) = 0, \quad x=0 \text{ 중심 원점 점대칭})$$

$\rightarrow f(x)$ 가 감소함수이므로 $f(x) = x$ ($f(x)$ 가 증가함수일 때 원함수와 역함수의 교점 찾는 방식) 뿐만 아니라

$$f(a) = b, \quad f(b) = a \text{ 꼴, 즉 } f(x) = -x + C \text{ 꼴도 추론해야 한다.}$$

($f(x)$ 가 감소함수일 때 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 교점을 표현하는 방식)



이 문제의 경우 특수하게도

원점 점대칭 감소함수이므로

$f(x) = \pm x$ 에서만 교점이 나온다.

$$f(x) = \pm x.$$

$$-\frac{kx^3}{x^2+1} = +x \quad \leftrightarrow \quad -\frac{kx^3}{x^2+1} = -x.$$

$$x \left(1 + \frac{kx^2}{x^2+1} \right) = 0$$

$$x \left(\frac{kx^2}{x^2+1} - 1 \right) = 0.$$

$$x(kx^2 + 1) = 0$$

$$x(kx^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{\frac{1}{k-1}}.$$

($k > 1$).

$$\alpha = -\sqrt{\frac{1}{k-1}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{k-1}} \quad (-\alpha = \beta)$$

$$f(-\beta) = \beta, \quad f(\beta) = -\beta.$$

$$\left(g(f(x-2\beta) + 2d) = g(f(x-2\beta) - 2\beta) = x \right)$$

$$f'(x-2\beta) \cdot g'(f(x-2\beta) + 2d) = 1.$$

$$g'(f(x-2\beta) - 2\beta) = \frac{1}{f'(x-2\beta)} \quad \text{--- (A)}$$

$$f'(\beta) = 2g'(\alpha) = 2g'(-\beta) \text{ 이므로.}$$

(A)에 $x = \beta$ 대입 시

$$g'(-\beta) = \frac{1}{f'(-\beta)} = g'(\alpha).$$

$$f(x) \text{ 는 원점대칭이므로 } f(\beta) = f'(-\beta)$$

$$g'(\alpha) = \frac{1}{f'(-\beta)} = \frac{1}{f'(\beta)} = \frac{f'(\beta)}{2}.$$

$$f'(\beta) = -\sqrt{2} = f'\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) \text{ --- (} f(x) \text{ 는 감소함수)}$$

$$f'(x) \text{ 에 } x = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \text{ 대입. } f'\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) = \frac{2-3k}{k} = -\sqrt{2}.$$

$$(3-\sqrt{2})k = 2, \quad k = \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x < 1) \\ cx^2 + \frac{5}{2}x & (1 \leq x) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 20190629-4 \\ \text{평가원} \end{array} \right)$$

$f(x) = f''(x)$ 의 근 3개. $(-1, 1, 2)$. $2a+4b-10c=?$

50. $\star \left(\begin{array}{l} f = \text{증가} \\ \downarrow \\ f(x) = x \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} f = \text{감소} \\ \downarrow \\ f(x) = x \\ \text{OR} \\ f(x) = -x+c \end{array} \right)$

if, $f = \text{증가}$.

$$f(-1) = -1, f(1) = 1, f(2) = 2.$$

$$-a+b = -1$$

$$a+b = c + \frac{5}{2} = 1.$$

$$a=1, b=0, c = -\frac{3}{2}.$$

$$4c+5 = -1 \neq 2. \quad (\text{모순})$$

\downarrow

$\therefore f = \text{감소}$.

\rightarrow 역함수의 정의에 의해, $f(x) = -x+c$ 의 두 근을

다라 e라고 하면

$f(x) = x$ 의 근 중 적어도 하나는 구간 (d, e) 에 존재.

(부가) if $f(x) = x$ 의 근이 (d, e) 에 없다면

d 와 e 는 $y=x$ 를 기준으로 한 쪽면에

존재하는 것이므로 모순이다.

즉 $f(x) = -x+c$ 의 두 근(최소 두 근)이 존재한다면

그 두 근 사이 구간에 하나의 근은 spare로 남기자.

이 문제에선 $f(-1) = 2 \leftrightarrow f(2) = -1$ 인 두 근

사이, 즉 $(-1, 2)$ 구간 사이의 $x=1$ 에서

$f(x) = x$ 의 근이 나머지 추론 가능하다.

이후는 N.G.D.

$$f(-1) = 2 \quad f(2) = -1 \quad f(1) = 1$$

$$-a+b = 2$$

$$4c+5 = -1$$

$$a+b = c + \frac{5}{2} = 1.$$

$$c = -\frac{3}{2}$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore 2a+4b-10c = 20$$

Ans. 20.

$f(x)$: 최고차 항부터 삼차함수.

$(f \circ f)(x) = x$.

(20190930-나)
포항가원

모든 실근은 0, 1, a, 2, b.

(?) $f'(1) < 0, f'(2) < 0$, $f'(0) - f'(1) = 6$.

$f(5) = ?$ ($1 < a < 2 < b$)

501. $(f \circ f)(x) = x$.



let. $f(x) = g(x)$ 의 방정식. (다만 올바른 역함수로 정의 불가.)

$f(g(x)) = x$ 인 $g(x)$ 의 설정.

다만 $f(x)$ 의 기울기 부호가 이렇 미정하므로

$f'(x)$ 의 기울기 변화가 부호 변화로 이어질 경우

$$\left(\begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = x \text{ 탐색.} \\ f'(x) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ \text{또는} \\ f(x) = -x + C \end{cases} \text{ 탐색.} \end{array} \right)$$

위와 같은 경우로 나누어 풀 수 있다.

Case 1. $f(x)$ 는 증가함수.

$f(x) = g(x)$. ($g(x)$ 는 근반한 $f(x)$ 의 역함수.)

→ $f(x) = x$ 근 탐색 시 5개가 나올 수 없다.



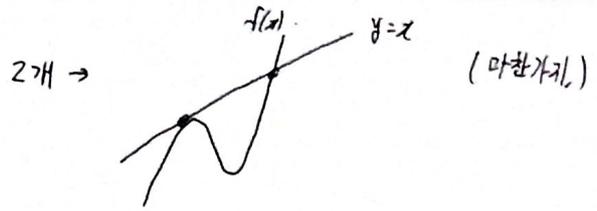
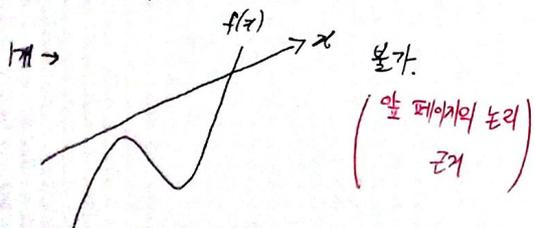
Case 2. $f(x)$ 는 극값을 가지는 함수.

Case 1 이 분가하므로 $f'(x)$ 의 부호 변화도 불가피하다.

위의 서술대로 나뉘어 푸는 것이 옳다.

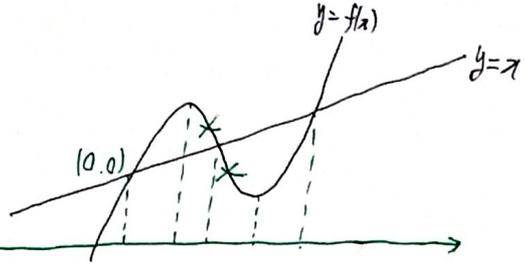
이때 $f(x) = x$ 의 근의 개수가 1~3개 중 어느 것인지를

먼저 보면



→ $f(x) = x$ 의 근은 3개다.

간단히 그려보면



앞 문단에서 서술한 근거를 토대로

$f(x) = -x + C$ 의 두 근은

$f'(x) \leq 0$ 구간에 존재.

$(f \circ f)(x) = x$ 의 근은 $0 < 1 < a < 2 < b$ 순이므로

① $f(x) = x$ 의 근은, 0, a, b.

② $f(x) = -x + C$ 의 근은, 1, 2.

($f(1) = 2, f(2) = 1$ 이라는 표현)

$f(x)$ 의 식을 구하기 위해 (변수 4개)

식 4개가 필요한데

$f(0) = 0$

$f(1) = 2$

$f(2) = 1$

$f'(0) - f'(1) = 6$.

→ $f(x)$ 를 구할 수 있다!!

N.G.D → $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$.

⊕ 추가 설명.(?)

Q. $f'(1) < 0, f'(2) < 0$ 이 두 조건 사용은?

A. 과정이나 마찬가지로 근이 Case 1 이므로만 보고

사용은 하지 않았다. 실전에서는 눈감만 할하면

Case 1 분류가 필요 없었을 것이나, 없어도 푸는 데

지장이 없다.