제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. 두 다항식 $A=x^2-x+1$, $B=-x^2+2x$ 에 대하여 $A+B$는? [2점]

① $-x-1$ ② $-x+1$ ③ $x-1$ ④ $x+1$ ⑤ $2x+1$

$(1-1)x^2+(-1+2)x+1$

$= x+1$

2. 등식 $x^2+\boxed{(a-1)}x\boxed{-1}=x^2+\boxed{2}x+\boxed{b}$가 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

항등식
① 동류항 계수같다
② 적당한 x 대입
(0이 되는 것이 많으면 편리)

$a-1=2$, $a=3$

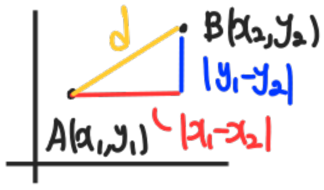
$b=-1$

$a+b=2$

3. 좌표평면 위의 두 점 P(1, 2), Q(−2, 1) 사이의 거리는? [2점]

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

두 점 사이의 거리



$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$\sqrt{(1-(-2))^2+(2-1)^2}$

$=\sqrt{9+1}$

$=\sqrt{10}$

4. 등식 $(2+3i)(1-i)=a+bi$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$2-3i^2-2i+3i$

$=5+1\cdot i$

5. 좌표평면 위의 세 점 A$(a,\ 3)$, B$(-2,\ 5)$, C$(3,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

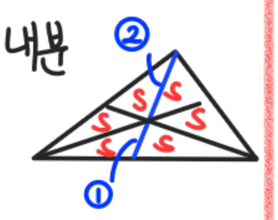
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

삼각형 무게중심

① (좌표의 합) 나누기 3

② 중선 2:1 내분

③ 넓이 6등분



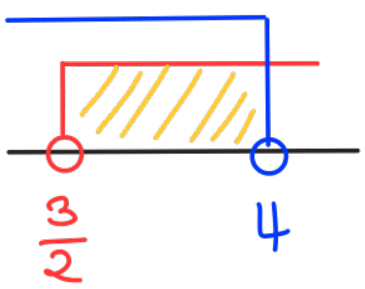
$\frac{a+(-2)+3}{3}=1$ $\frac{b+3+5}{3}=2$

$a=2,\ b=-2$

6. 연립부등식 $\begin{cases} x+3<3x \\ 3x+4<2x+8 \end{cases}$ 의 해가 $a<x<b$일 때, ab의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\begin{cases} 3<2x \\ x<4 \end{cases}$, $\frac{3}{2}<x<4$



$\frac{3}{2}<x<4$

7. 다항식 $(x^2+1)^2+3(x^2+1)+2$가 $(x^2+a)(x^2+b)$로 인수분해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$X^2+3X+2=(X+1)(X+2)$

$=(x^2+2)(x^2+3)$

정수 개수 세는 방법과 원리

① $1 \le x \le n \rightarrow n$개 (↑시작을 1로)

② $m \le x \le n \rightarrow (n-m+1)$개

앞으로는 그림 풀이 중요

8. 부등식 $|2x-1| \le 5$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$-5 \le 2x-1 \le 5$

$-4 \le 2x \le 6$

$-2 \le x \le 3$

→ ① $1 \le x+3 \le 6$: 6개

② $3-(-2)+1 = 6$ 개

9. 좌표평면 위의 점 $(1,\ a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A라 하자. 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(2,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(1, a) \xrightarrow[\text{대칭}]{y=x} A(a, 1) \xrightarrow[\text{대칭}]{x\text{축}} (a, -1)$

$= (2, b)$

$a=2,\ b=-1$

10. 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이① 식으로

$(3,1)$ 지나는 직선 $y=m(x-3)+1$

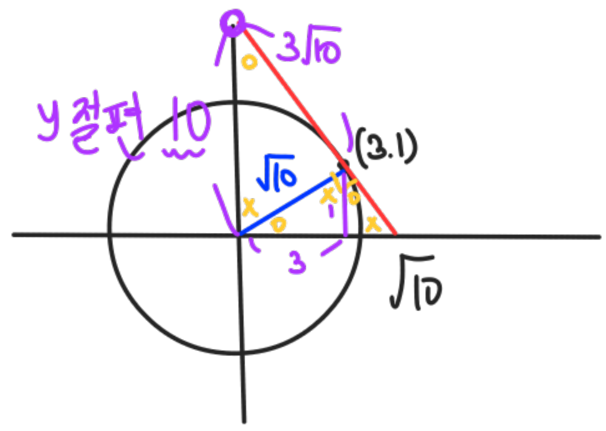
$mx-y-3m+1=0$, 중심 $(0,0)$과 거리는 반지름 $\sqrt{10}$

$d=\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$, $|3m-1|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

$(3m-1)^2=10(m^2+1)$, $m^2+6m+9=(m+3)^2=0$

$m=-3$, $y=-3x+10$, y절편 10

풀이 ② 그림으로



11. 연립방정식 $\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2=0 \\ x+2y-10=0 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$\begin{cases} (2x-y)^2=0, \quad y=2x \\ x+2y-10=0 \end{cases}$

$x+4x-10=0$,

$x=2$, $y=4$

켤레근을 갖는다.

12. 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $2-3i$ 이고 다른 한 근을 α라 하자. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{1}{\alpha}=a+bi$ 일 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① $-\frac{1}{13}$ ② $-\frac{2}{13}$ ③ $-\frac{3}{13}$ ④ $-\frac{4}{13}$ ⑤ $-\frac{5}{13}$

켤레근

a, b, c 실수

$az^2+bz+c=0$ 이면

$\overline{az^2+bz+c}=\overline{0}$

$a\bar{z}^2+b\bar{z}+c=0$

$\bar{z}$도 근이다.

$\alpha=\overline{2-3i}=2+3i$

$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{4+9}$

$=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$

기본적인 태도 ① 차수를 낮추자
② 미지수를 줄이자
* 근은 대입.

13. 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프와 만나고, 이차함수 $y=x^2-5x+15$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

① $x^2-2x+4=x+k$ 의 판별식 ≥ 0

$x^2-3x+4-k=0$

$D_1=9-4(4-k)$

$=4k-7 \geq 0 \quad k\geq\frac{7}{4}$

② $x^2-5x+15=x+k$ 의 판별식 <0

$x^2-6x+15-k=0$

$D_2/4=9-(15-k)<0, \quad k<6$

$\therefore \frac{7}{4}\leq k<6, \quad k=2,3,4,5$

14. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha^2+3\alpha+3}+\dfrac{1}{\beta^2+3\beta+3}$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ -1

α 근이므로 $\alpha^2+2\alpha+3=0$

$\alpha^2+3\alpha+3=\alpha$

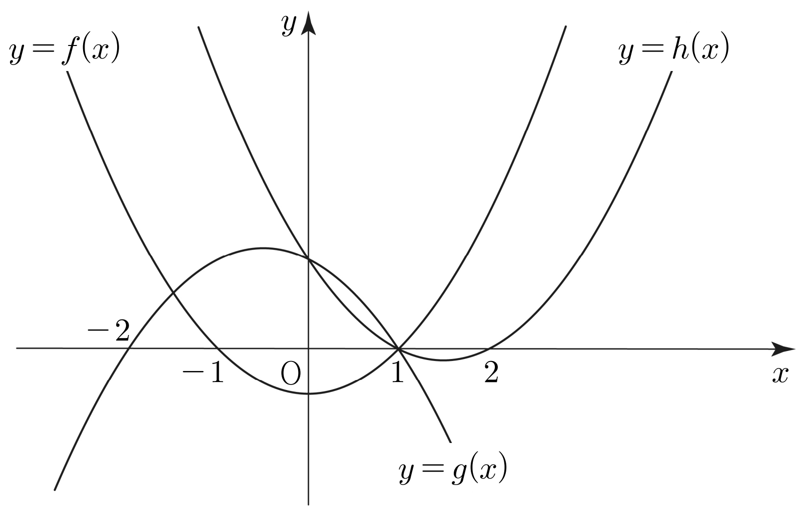
마찬가지 $\beta^2+3\beta+3=\beta$

$\dfrac{1}{\alpha^2+3\alpha+3}+\dfrac{1}{\beta^2+3\beta+3}$

$=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-2}{3}$

그래프 위의 점
→ 미지수 잡고 좌표 놓기

15. 그림과 같이 최고차항의 계수의 절댓값이 같은 세 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프가 있다. 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$ 의 모든 근의 합은? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x) = a(x+1)(x-1)$ 공통 $(a>0)$

$g(x) = -a(x+2)(x-1)$

$h(x) = a(x-1)(x-2)$

$f(x)+g(x)+h(x) = a(x-1)\{(x+1)-(x+2)+(x-2)\}$

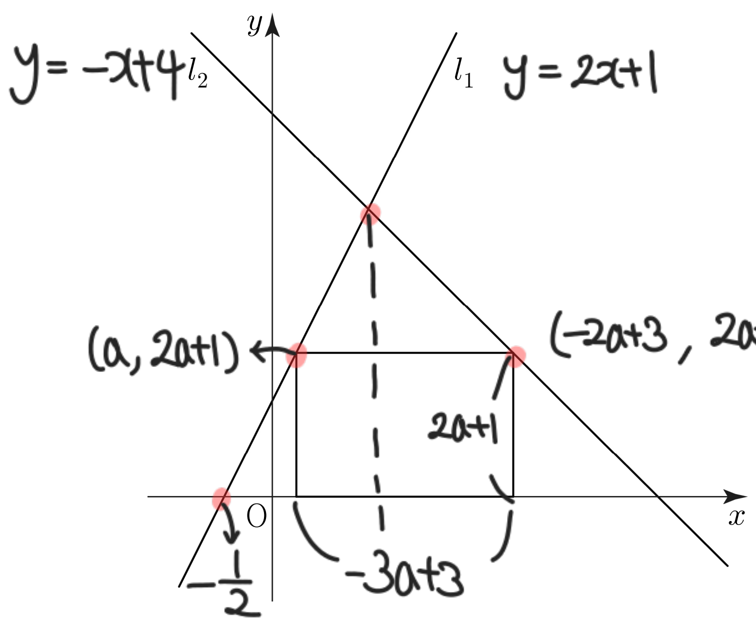
$= a(x-1)(x-3)$

$\rightarrow x=1$ 또는 $x=3.$

16. 그림과 같이 두 직선

$l_1 : 2x-y+1=0$
$l_2 : x+y-4=0$ $\Rightarrow x=1,\ y=3$

과 x축으로 둘러싸인 부분에 직사각형이 있다. 이 직사각형의 한 변은 x축 위에 있고 두 꼭짓점은 각각 직선 l_1, l_2 위에 있을 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은? [4점]

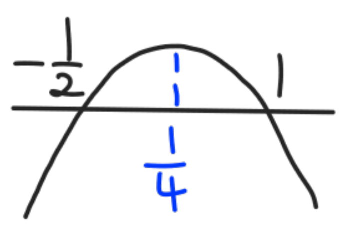


$-\frac{1}{2}<a<1$

① $\frac{23}{8}$ ② 3 ③ $\frac{25}{8}$ ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{27}{8}$

$S=(-3a+3)(2a+1)$

$\rightarrow a=1,\ a=-\frac{1}{2}$



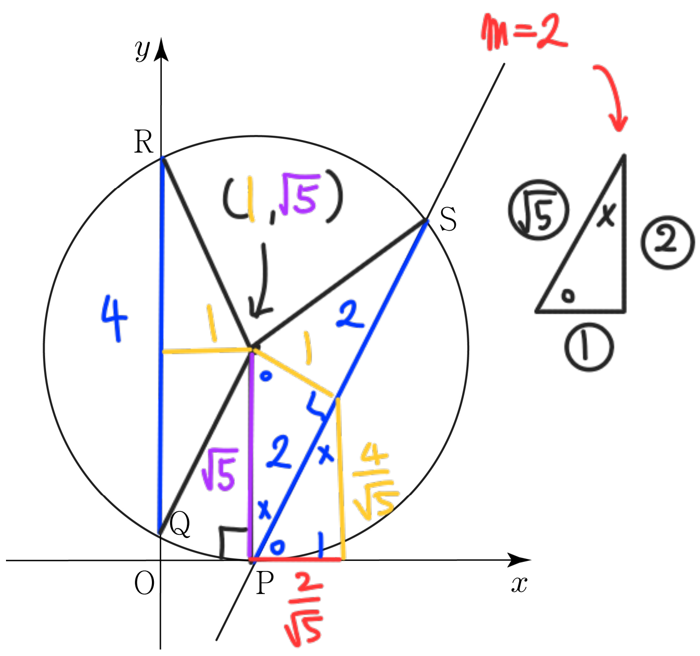
$a=\frac{1}{4}$ 일때 최댓값

$S=\frac{9}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{27}{8}$

① 직각 나오면 o, x 표시 → 닮음 찾기
② 직선 기울기 이용한 삼각비

그래프 교점은 연립방정식

17. 그림과 같이 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 점 P에서 접하며 y축과 두 점 Q, R에서 만나는 원이 있다. 점 P를 지나고 기울기가 2인 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 S라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PS}}=4$를 만족시킨다. 원점 O와 원의 중심 사이의 거리는? [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$$\begin{cases} y = -(n+1)x + 1 \\ y = -\frac{1}{n+1}x + \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

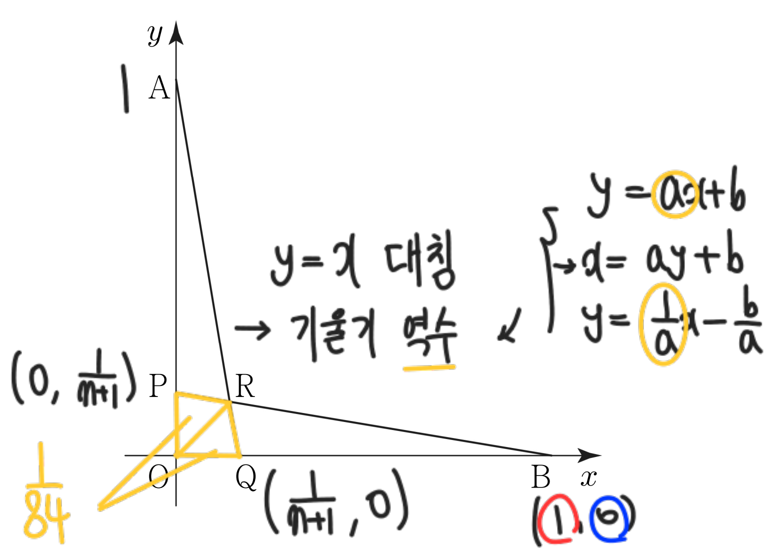
$-(n+1)^2x + n+1 = -x + 1$

$(n^2+2n)x = n$

$x = \frac{1}{n+2}$

$g(n) = \frac{1}{n+2}$

18. 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 A(0, 1), B(1, 0)이 있다. 양수 n과 원점 O에 대하여 선분 OA를 $1:n$으로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 $1:n$으로 내분하는 점을 Q, 선분 AQ와 선분 BP가 만나는 점을 R라 하자. 다음은 사각형 POQR의 넓이가 $\frac{1}{42}$일 때, n의 값을 구하는 과정이다.



점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$,

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{n+1}, 0\right)$이다.

직선 AQ의 방정식은 $y = -(n+1)x + 1$,

직선 BP의 방정식은 $y = \boxed{(가)} \times x + \frac{1}{n+1}$이다.

두 직선 AQ, BP가 만나는 점 R의 x좌표는 $\boxed{(나)}$이고

삼각형 POR의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \times \boxed{(나)}$이다.

두 삼각형 POR와 삼각형 QOR에서

선분 OR가 공통이고 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OQ}}$, $\angle\mathrm{POR} = \angle\mathrm{QOR}$이므로

삼각형 POR와 삼각형 QOR는 합동이다.

따라서 사각형 POQR의 넓이는 삼각형 POR의 넓이의

2배이므로 $n = \boxed{(다)}$이다.

역수, $f(n) = -\frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{84}$, → $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{84}$

$(n+1)(n+2) = 42$

$n^2+3n-40=0$

$n=-8$, $n=5$

→ $k=5$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $\frac{g(k)}{f(k)}$의 값은? [4점]

① $-\frac{5}{7}$ ② $-\frac{6}{7}$ ③ -1 ④ $-\frac{8}{7}$ ⑤ $-\frac{9}{7}$

$$\frac{g(5)}{f(5)} = \frac{\frac{1}{7}}{-\frac{1}{6}} = -\frac{6}{7}$$

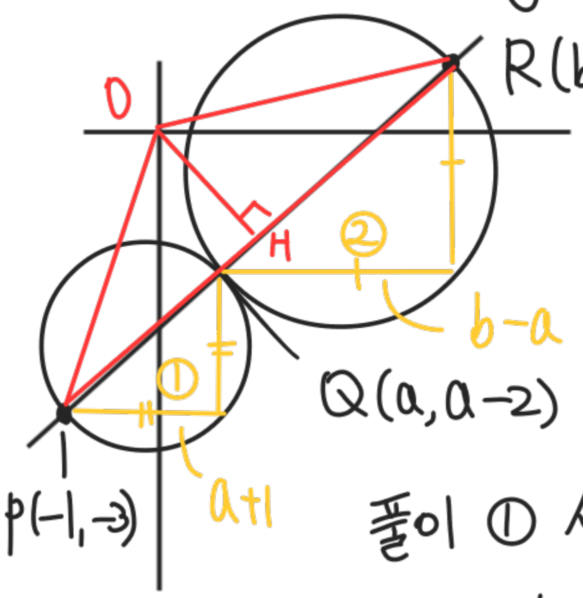
사선공식/신발끈 공식 풀이도 알아두기

19. $-1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y=x-2$ 위에 세 점 $P(-1,\ -3)$, $Q(a,\ a-2)$, $R(b,\ b-2)$가 있다. 선분 PQ를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 QR를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자. 삼각형 OPR와 두 원 C_1, C_2가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) 삼각형 OPR의 넓이는 $3\sqrt{2}$이다.
(나) 원 C_1과 원 C_2의 넓이의 비는 $1:4$이다. → 1:2 닮음

① $4\sqrt{2}+2$ ② $4\sqrt{2}+1$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}-1$ ⑤ $4\sqrt{2}-2$

$y=x-2$



$2(a+1)=b-a$

$a=\dfrac{b-2}{3}$

풀이 ① 사선공식(신발끈공식)

$\triangle OPR=\dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix}0 & -1 & b & 0\\ 0 & -3 & b-2 & 0\end{matrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|\{0\cdot(-3)-1\cdot(b-2)+b\cdot 0\}-\{0\cdot(-1)-3\cdot b+(b-2)\cdot 0\}\right|$

$=b+1=3\sqrt{2}$

$b=3\sqrt{2}-1$

$a+b=\dfrac{4}{3}b-\dfrac{2}{3}$

$=4\sqrt{2}-2$

풀이② 정석대로

(0,0)에서 $y=x-2$까지 거리

$\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{OH}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(b+1)\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$=b+1=3\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}-1$

$x^3=1$의 허근 ω의 기본적 성질 알아두기

20. 복소수 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $z^3=1$
ㄴ. $z^4+z^5=-1$
ㄷ. $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n의 개수는 66이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

㉠ 직접 세제곱해도 되지만 익숙한 수

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

의 허근이 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로 $z^3=1$, $z^2+z+1=0$

㉡ $z^3=1$을 이용하여 차수 down!

$z^4+z^5=z^3\cdot z+z^3\cdot z^2=\underline{z+z^2=-1}$

~~ㄷ~~. 1, 2, 3, 4, … 대입하며 관찰

$n=1$: $z+z^2+z^3+z^4+z^5=\underbrace{z+z^2}_{-1}+1+\underbrace{z+z^2}_{-1}=-1$

$n=2$: $z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}=\underline{z^2+z}+1+\underline{z^2+z}=-1$

~~$n=3$~~: $z^3+z^6+z^9+z^{12}+z^{15}=1+1+1+1+1\neq-1$

$n=4$: $z^4+z^8+z^{12}+z^{16}+z^{20}=z+z^2+1+z+z^2=-1$

↳ $n=1$인 경우와 같고 반복될 것임을 알 수 있다

① ② ~~3~~
④ ⑤ ~~6~~
⋮
97 98 ~~99~~
} 2개 × 33줄 = 66

100) 1개

∴ 66+1 = 67개

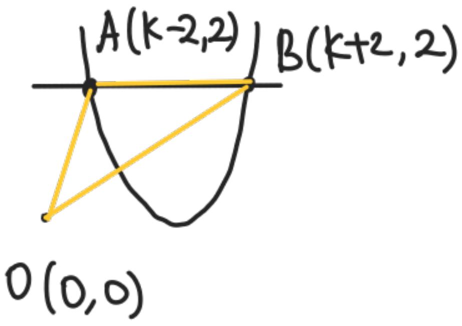
나머지 정리

21. 실수 k에 대하여 이차함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되도록 하는 서로 다른 k의 개수를 n, k의 최댓값을 M이라 하자. $n+M$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $7+\sqrt{3}$ ② $7+2\sqrt{3}$ ③ $7+3\sqrt{3}$
④ $9+2\sqrt{3}$ ⑤ $9+3\sqrt{3}$

△AOB 이등변 → ① $\overline{OA}=\overline{OB}$ ② $\overline{AB}=\overline{OA}$ ③ $\overline{AB}=\overline{OB}$

$(x-k)^2-2=2$, $(x-k)^2=4$, $x=k\pm2$



$\overline{OA}^2=(k-2)^2+4$
$\overline{OB}^2=(k+2)^2+4$
$\overline{AB}^2=16$

① $\overline{OA}=\overline{OB}$

$(k-2)^2+\cancel{4}=(k+2)^2+\cancel{4}$, $k=0$,

② $\overline{AB}=\overline{OA}$

$(k-2)^2+4=16$, $(k-2)^2=12$, $k=2\pm2\sqrt{3}$

③ $\overline{AB}=\overline{OB}$

$(k+2)^2+4=16$, $(k+2)^2=12$, $k=-2\pm2\sqrt{3}$

k는 $n=5$ 개,
최댓값 $M=2+2\sqrt{3}$

단답형

22. 다항식 x^3+2x^2-x+2를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

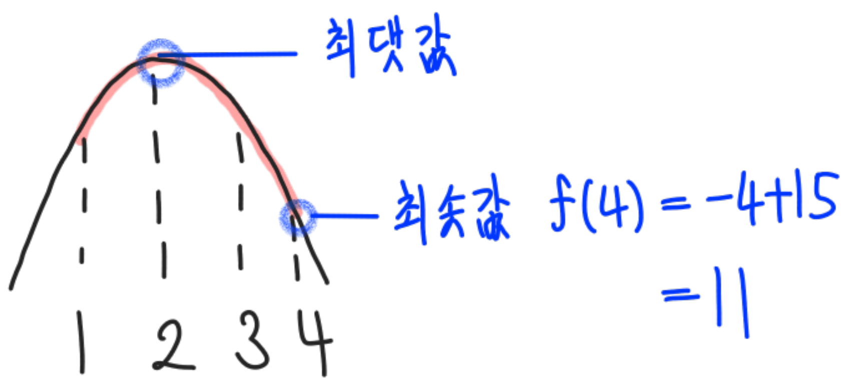
$x^3+2x^2-x+2=(x-2)Q(x)+R$

$x=2$, $2^3+2\cdot2^2-2+2=0\cdot Q(2)+R$

$16=R$

$\boxed{16}$

23. $1\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+15$의 최솟값을 구하시오. [3점]



$\boxed{11}$

짝수 판별식 알아두기

중심 $(-1, -2)$, 반지름 길이 3

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2-24=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$D = 4(k-2)^2-4(k^2-24) > 0$

$\frac{D}{4} = (k-2)^2-(k^2-24)$

$= -4k+28 > 0$

$k < 7$

$k=1, 2, 3, \cdots, 6$ $\boxed{6}$

25. 점 $(2,\ 5)$를 지나고 직선 $3x+2y-4=0$에 수직인 직선의 방정식이 $2x+ay+b=0$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

$y=-\frac{3}{2}x+2$

기울기 $-\frac{3}{2}$

수직이므로 기울기 곱 -1

$y=\frac{2}{3}(x-2)+5$

$3y=2(x-2)+15$

$2x-3y+11=0$

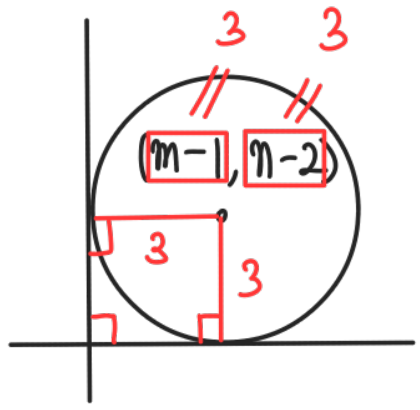
$a=-3,\ b=11$

$\boxed{8}$

26. 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C라 하자. 원 C가 다음 조건을 만족시킬 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.) [4점]

(가) 원 C의 중심은 제1사분면 위에 있다. (나) 원 C는 x축과 y축에 동시에 접한다.

원 C 중심 $(m-1, n-2)$, 반지름 길이 3



$m=4$

$n=5$

$\boxed{9}$

27. x에 대한 연립이차부등식

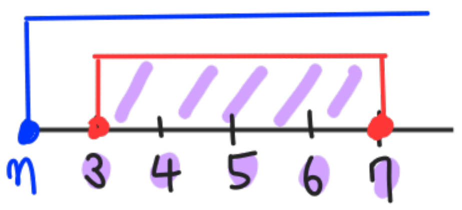
$$\begin{cases} x^2-10x+21 \le 0 \\ x^2-2(n-1)x+n^2-2n \ge 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$(x-3)(x-7) \le 0$. $\quad 3 \le x \le 7$

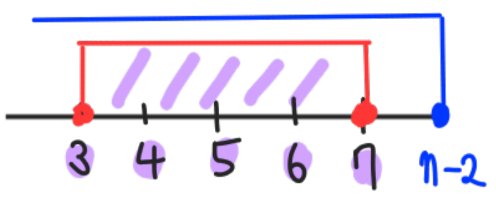
$(x-n)(x-(n-2)) \ge 0 \quad$ $x \le n-2$ 또는 $x \ge n$

$n \le 3$ 이면



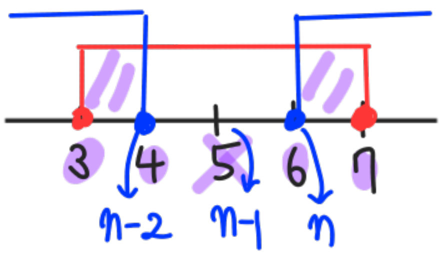
5개

$n \ge 9$이면



5개

$4 \le n \le 8$ 이면
3부터 7까지 중
$n-1$ 제외 4개

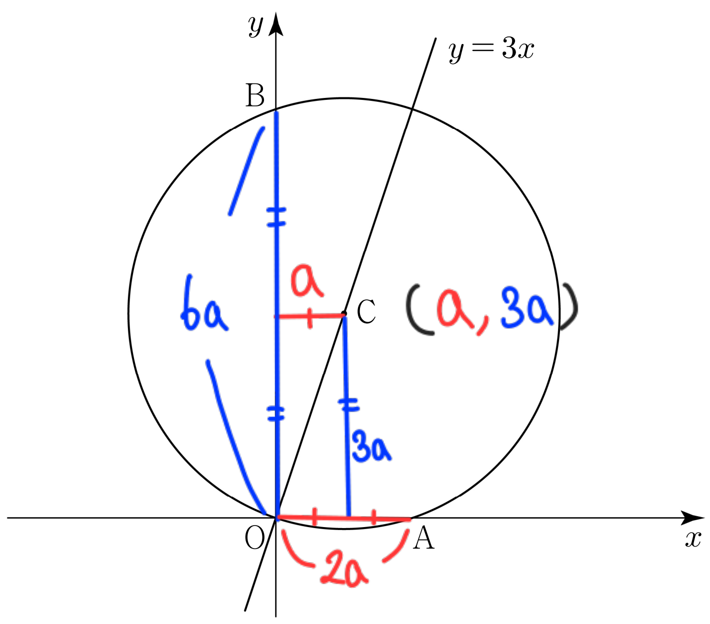


4개

따라서 4, 5, 6, 7, 8 $\quad \boxed{30}$

28. 그림과 같이 원의 중심 C$(a,\ b)$가 제1사분면 위에 있고, 반지름의 길이가 r이며 원점 O를 지나는 원이 있다. 원과 x축, y축이 만나는 점 중 O가 아닌 점을 각각 A, B라 하자. 네 점 O, A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+r^2$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}=4$
(나) 두 점 O, C를 지나는 직선의 방정식은 $y=3x$이다.



$\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}} = 6a-2a = 4a = 4$

$a=1,\ b=3$

$C(1,3),\ r=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\boxed{14}$

항등식 → 무언가 0 되는 값 대입해보기

교점 개수 세기
→ 경계점, 접선 중요

29. 다항식 $P(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $Q(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$x=0, 1$ 대입하면 0

$$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=(x^2-x)P(x)$$

를 만족시킨다. $P(x)$를 $Q(x)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(3)$의 값을 구하시오. (단, 다항식 $Q(x)$의 계수는 실수이다.) [4점]

$x=0$ $\quad Q(1)^2+Q(0)^2=0$, $\quad Q(1)=Q(0)=0$

$x=1$ $\quad Q(2)^2+Q(1)^2=0$, $\quad Q(2)=Q(1)=0$

$Q(x)=x(x-1)(x-2)$

$Q(x+1)=(x+1)\cdot x(x-1)$

$Q(x+1)^2+Q(x)^2=x^2(x-1)^2(x-2)^2+(x+1)^2x^2(x-1)^2$

$=x^2(x-1)^2\{(x-2)^2+(x+1)^2\}$

$=x(x-1)P(x)$

$P(x)=x(x-1)(2x^2-2x+5)$

$=x(x-1)((x-2)(2x+2)+9)$

$=x(x-1)(x-2)\underbrace{(2x+2)}_{\text{몫}}+\underbrace{9x(x-1)}_{\text{나머지 } R(x)}$

$R(3)=27\times 2=54$

$\boxed{54}$

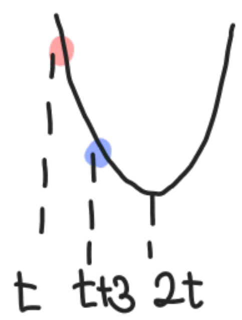
30. $t\geq 0$인 실수 t에 대하여 $t\leq x\leq t+3$에서 이차함수 $f(x)=x^2-4tx+10t$의 최댓값과 최솟값의 합을 $g(t)$라 하자. t에 대한 방정식 $g(t)=-4t+a$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $p<a<q$이다. $4p+7q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 상수이다.) [4점]

$g(x)=-4x+a$

$g(x)+4x=a$

$f(x)=(x-2t)^2-4t^2+10t$

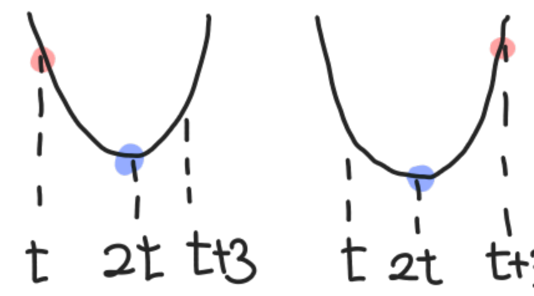
① $t+3\leq 2t\ (t\geq 3)$일 때



최댓값 $f(t)=-3t^2+10t$

최솟값 $f(t+3)=-3t^2+4t+9$

② $t+3>2t\ (0\leq t<3)$일 때

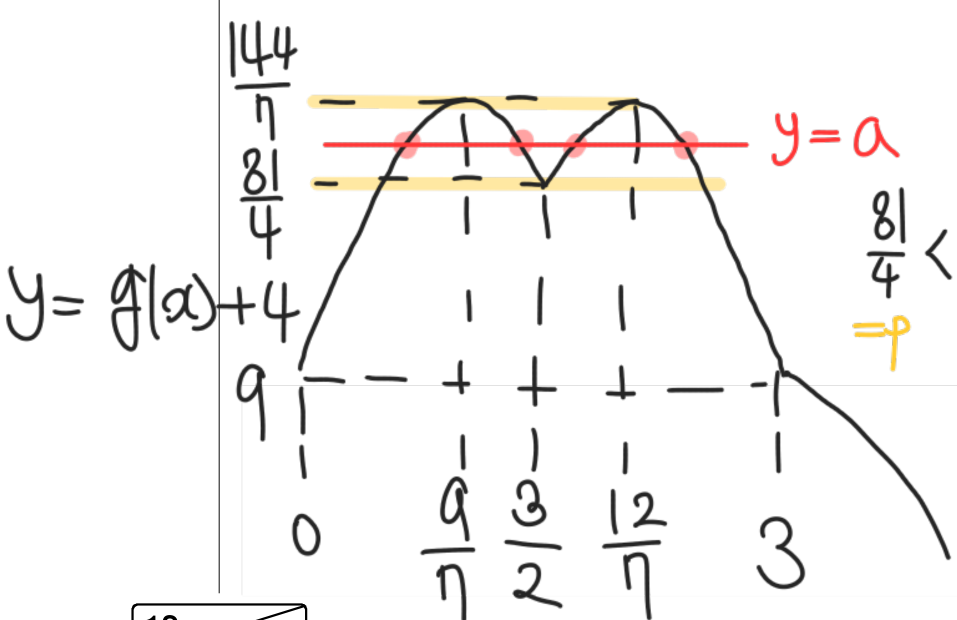


최댓값 $\begin{cases} f(t) & (\frac{3}{2}\leq t<3) \\ f(t+3) & (0\leq t<\frac{3}{2}) \end{cases}$

최솟값 $f(2t)=-4t^2+10t$

$g(t)=-4t+a \Leftrightarrow g(t)+4t=a$

$$g(x)+4x=\begin{cases} -7x^2+18x+9 & (0\leq x<\frac{3}{2}) \\ -7x^2+24x & (\frac{3}{2}\leq x<3) \\ -6x^2+18x+9 & (x\geq 3) \end{cases}$$



$\underbrace{\frac{81}{4}}_{=p}<a<\underbrace{\frac{144}{7}}_{=q}$

$4p+7q$

$=81+144$

$=225$

$\boxed{225}$