2014학년도 대학수학능력시험 해설지

수학 영역(B형)

작성자 : 이동훈

발표일 : 2013년 11월 13일

01

[풀이]

행렬의 합의 정의에서

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+a & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은 $2+a$이므로

$2+a=6$

$\therefore\ a=4$

답 ④

02

[풀이]

$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

삼각함수의 배각의 공식을 적용하면

$\therefore\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{2}{3}$

답 ③

03

[풀이]

내분점의 공식을 적용하면

$\left(\dfrac{3\times(-2)+2\times a}{3+2},\ \dfrac{3\times 0+2\times 5}{3+2},\ \dfrac{3\times 7+2\times 2}{3+2}\right)$

즉, $\left(\dfrac{2a-6}{5},\ 2,\ 5\right)$

$\dfrac{2a-6}{5}=0,\ 2=b$에서 $a=3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=5$

답 ⑤

04

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 두면

$a_9=2+8d,\ a_3=2+2d$

주어진 등식에 대입하면

$2+8d=3(2+2d)$

일차방정식을 풀면

$d=2$

$\therefore\ a_5=2+4d=10$

답 ①

05

[풀이]

표본공간을 S라고 하자.

확률의 덧셈정리를 적용하면

$\mathrm{P}(A^C \cup B^C) = \mathrm{P}(S) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= 1 - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4}{5}$

즉, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}$

확률의 덧셈정리를 적용하면

$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \mathrm{P}(A) - \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$

즉, $\mathrm{P}(A) = \frac{9}{20}$

여사건의 확률의 공식을 적용하면

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$

답 ②

06

[풀이]

직선 AB의 방향벡터를 $\overrightarrow{n_1}$이라고 하면

$\overrightarrow{n_1} = (5,\ 5,\ a-3)$

직선 $x = 4 - y = z - 1$의 방향벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라고 하면

$\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 1)$

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = (5,\ 5,\ a-3) \cdot (1,\ -1,\ 1) = a - 3 = 0$

$\therefore\ a = 3$

답 ①

07

[풀이]

삼각함수의 배각의 공식을 적용하면

$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = \cos 2x + k\sin 2x$

삼각함수의 합성의 공식을 적용하면

$f(x) = \sqrt{1+k^2}\sin(2x+\theta)$

(단, $\cos\theta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$)

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{1+k^2}$이므로

$\sqrt{1+k^2}=\sqrt{10}$
$\therefore\ k=3$
답 ③

08
[풀이]
포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.
포물선의 접선의 방정식의 공식을 적용하면
직선 l_1의 방정식은 $y=m_1x+\dfrac{2}{m_1}$
직선 l_2의 방정식은 $y=m_2x+\dfrac{2}{m_2}$
이차방정식의 좌변을 인수분해하면
$(2x-1)(x-1)=0$
이차방정식의 서로 다른 두 실근은 $\dfrac{1}{2}$, 1이다.
(1) $m_1=\dfrac{1}{2}$, $m_2=1$인 경우
직선 l_1의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+4$
직선 l_2의 방정식은 $y=x+2$
두 직선 l_1, l_2의 방정식을 연립하면 $x=4$
(2) $m_1=1$, $m_2=\dfrac{1}{2}$인 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로
두 직선 l_1, l_2의 방정식을 연립하면 $x=4$
(1), (2)에서 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표는 4이다.
답 ④

09
[풀이]
(1) 4를 한 개 택하는 경우
숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의 수를 구하자.
중복조합의 수의 공식을 적용하면
${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$
(2) 4를 택하지 않는 경우
숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수를 구하자.
중복조합의 수의 공식을 적용하면
${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$
(1), (2)가 동시에 발생하지 않으므로, 합의 법칙을 적용하면 구하는 경우의 수는
$15+21=36$
답 ④

10

[풀이1]

분수부등식에 대한 전형적인 풀이를 적용하면

$$\frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \le 0$$

$f(x)\{g(x)-f(x)\} \le 0,\ f(x) \ne 0$

(1) $f(x)>0$인 경우

이제 아래의 부등식을 풀면 된다.

$g(x) \le f(x),\ f(x) \ne 0$

문제에서 주어진 그림에서

$x=-4,\ 1$

(2) $f(x)<0$인 경우

이제 아래의 부등식을 풀면 된다.

$g(x) \ge f(x),\ f(x) \ne 0$

문제에서 주어진 그림에서

$x=-1,\ 3,\ 4$

(1), (2)에서 주어진 분수부등식을 만족시키는 x는

$\therefore\ x=-4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4$

답 ⑤

[풀이2]

$f(x)$를 삼차함수라고 가정하고 문제를 해결하자.

분수부등식에 대한 전형적인 풀이를 적용하면

$$\frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \le 0$$

$f(x)\{g(x)-f(x)\} \le 0,\ f(x) \ne 0 \quad \cdots (*)$

한편 방정식 $g(x)-f(x)$의 서로 다른 세 실근이 $\alpha,\ \beta,\ 2$이므로

$g(x)-f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)$(단, $k>0$)

이를 $(*)$에 대입하면

$-k(x-\alpha)(x+2)x(x-\beta)(x-2)^2 \le 0,\ x \ne -2,\ 0,\ 2$

그런데 $-k$가 음수이므로

$(x-\alpha)(x+2)x(x-\beta)(x-2)^2 \ge 0,\ x \ne -2,\ 0,\ 2$

풀면

$-4 \le x \le \alpha,\ -2<x<0,\ \beta \le x<2,\ x>2$

$\therefore\ x=-4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4$

답 ⑤

11

[풀이]

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$

이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

이다. $b_n=\dfrac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1=1$이고

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}\ (n\geq 2)$$

$$b_n=2-\frac{1}{n}\ (n\geq 1)$$

이므로

$$\log a_n=2n-1$$

이다. 그러므로 $a_n=10^{2n-1}$이다.

$$f(n)=\frac{1}{n(n+1)},\ g(n)=2-\frac{1}{n}$$

$$\therefore\ \frac{g(10)}{f(4)}=38$$

답 ①

12

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$$f(x)=x^2+ax+b$$

함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\neq 0)\\ 8x^2+8ax+8b & (x=0)\end{cases}$$

구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이므로, 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속이려면, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

연속함수의 정의에서

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이면

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 정의되고,

극한값 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)$이 존재하여

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이다.

함수의 극한에 대한 성질을 적용하면

$$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}$$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}}\times\frac{x^2+ax+b}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}}\times\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{x}$

$=1\times\lim_{x\to 0}\left(x+a+\frac{b}{x}\right)$

($\because$ 극한값 $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)$이 존재해야 하므로 $b=0$이다. 왜냐하면 $b\neq 0$이면 $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)$이 발산하기 때문이다.)

$=1\times\lim_{x\to 0}(x+a)=1\times a=a$

함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\neq 0)\\ 8x^2+8ax & (x=0)\end{cases}$$

$f(0)g(0)=0$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=a=0=f(0)g(0)$

즉, $a=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^2$

$\therefore\ f(3)=9$

답 ②

13

[풀이]

직선 l과 쌍곡선 C의 방정식을 연립하면

$x^2-2(x-1)^2=1$

정리하면

$x^2-4x+3=0,\ (x-1)(x-3)=0$

직선 l과 쌍곡선 C의 두 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$, $(3,\ 2)$이다.

구하는 부피를 V라고 하자.

회전체의 부피를 구하는 공식을 적용하면

$\therefore\ V=\pi\int_0^2(y+1)^2dy-\pi\int_0^2(1+2y^2)dy$

$=\pi\int_0^2(-y^2+2y)dy=\pi\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_0^2=\frac{4}{3}\pi$

답 ③

14

[풀이1]

쌍곡선의 방정식은

$$x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

쌍곡선의 초점의 좌표를 구하면

$$\mathrm{F}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{2}},\ 0\right) \text{ 즉, } \mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$$

행렬 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$에 의하여 직선 l이 옮겨지는 직선을 m이라고 하자.

직선 l 위의 점을 $(x,\ y)$, 직선 m 위의 점을 $(X,\ Y)$라고 하면

$$\begin{pmatrix}X \\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X \\ Y\end{pmatrix}$$

$$x=X\cos\theta+Y\sin\theta,\ y=-X\sin\theta+Y\cos\theta$$

이를 직선 l의 방정식에 대입하면

$$X\cos\theta+Y\sin\theta+X\sin\theta-Y\cos\theta-1=0$$

정리하면

$$m\ :\ (\cos\theta+\sin\theta)X+(\sin\theta-\cos\theta)Y-1=0$$

직선 m이 점 F를 지나므로

$$(\cos\theta+\sin\theta)\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+(\sin\theta-\cos\theta)\times 0-1=0$$

정리하면

$$\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)=-1$$

양변을 제곱하면

$$\frac{3}{2}(1+2\sin\theta\cos\theta)=1$$

삼각함수의 배각의 공식을 적용하면

$$\frac{3}{2}(1+\sin2\theta)=1$$

$$\therefore\ \sin2\theta=-\frac{1}{3}$$

답 ④

[풀이2]

쌍곡선의 방정식은

$$x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

쌍곡선의 초점의 좌표를 구하면

$$\mathrm{F}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{2}},\ 0\right) \text{ 즉, } \mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$$

원점을 중심으로 $-\theta$만큼 회전하는 회전변환에 의하여 쌍곡선의 초점 F는 직선 l 위의 점으로 옮겨진다. 옮겨진 점의 좌표를 $(x,\ y)$라고 두자.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta,\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta$

이를 직선 l의 방정식에 대입하면

$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta - 1 = 0$

정리하면

$\dfrac{\sqrt{6}}{2}(\cos\theta + \sin\theta) = -1$

양변을 제곱하면

$\dfrac{3}{2}(1 + 2\sin\theta\cos\theta) = 1$

삼각함수의 배각의 공식을 적용하면

$\dfrac{3}{2}(1 + \sin 2\theta) = 1$

$\therefore\ \sin 2\theta = -\dfrac{1}{3}$

답 ④

15

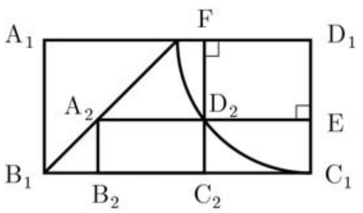
[풀이]

S_1 =(부채꼴 $N_1M_1B_1$의 넓이)−(삼각형 $N_1M_1B_1$의 넓이)

+(부채꼴 $D_1M_1C_1$의 넓이)−(삼각형 $D_1M_1C_1$의 넓이)

$= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 1$

점 D_2에서 두 선분 C_1D_1, D_1A_1에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자.



$\overline{A_2B_2} = x$로 두자. (단, $0 < x < 1$)

$\triangle A_2B_1B_2$는 $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2A_2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_1B_2} = x$

직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 이웃한 두 변의 길이의 비가 1 : 2이므로

$\overline{B_2C_2} = 2x$

$\overline{C_2C_1} = \overline{B_1C_1} - \overline{B_1B_2} - \overline{B_2C_2} = 2 - 3x$

그런데 두 선분 D_2E, C_2C_1의 길이가 같으므로

$\overline{D_2E} = 2 - 3x$ $\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{ED_1}}=\overline{\mathrm{C_1D_1}}-\overline{\mathrm{C_1E}}=1-x$ $\cdots$ ㉡

원의 정의에서

$\overline{\mathrm{D_1D_2}}=1$ $\cdots$ ㉢

직각삼각형 $\mathrm{D_1D_2E}$에서 피타고라스의 정리를 적용하면

$\overline{\mathrm{D_1D_2}}^2=\overline{\mathrm{D_2E}}^2+\overline{\mathrm{ED_1}}^2$

㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$1=(2-3x)^2+(1-x)^2$

정리하면

$5x^2-7x+2=0$

$(5x-2)(x-1)=0,\ x=\dfrac{2}{5}$

서로 닮음인 두 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$, $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 대하여 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 짧은 변의 길이에 대한 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 짧은 변의 길이의 비는 $\dfrac{2}{5}$이다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여 서로 닮음인 두 직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$에 대하여 직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 짧은 변의 길이에 대한 직사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 짧은 변의 길이의 비가 $\dfrac{2}{5}$임을 보일 수 있다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{2}-1$이고, 공비가 $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

무한등비급수의 합의 공식을 적용하면

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

답 ③

16

[풀이]

확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라고 하자.

확률밀도함수의 정의에서

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=ka^2=1$ $\cdots$ ㉠

조건 (가)에서

$\mathrm{P}(0\le X\le x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt=kx^2$

적분과 미분의 관계에서

$f(x)=2kx$

조건 (나)에서

$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\int_0^a xf(x)dx=\int_0^a 2kx^2dx$

$=\left[\dfrac{2}{3}kx^3\right]_0^a=\dfrac{2}{3}ka^3=1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 k, a에 대한 연립방정식을 풀면

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$, $k=\frac{4}{9}$

답 ②

17

[풀이]

ㄱ. (참)

행렬의 연산의 성질을 적용하면

$(A+A^2)B=E$

역행렬의 정의에서

$B^{-1}=A+A^2$

즉, B의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. (참)

ㄱ의 결과를 적용하면

$AB^{-1}=A(A+A^2)=A^2+A^3$

$B^{-1}A=(A+A^2)A=A^2+A^3$

즉, $AB^{-1}=B^{-1}A$

양변의 왼쪽에 행렬 B를 곱하면

$BAB^{-1}=BB^{-1}A$

즉, $BAB^{-1}=A$

양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$BAB^{-1}B=AB$

$BA=AB$

$\therefore\ AB=BA$

ㄷ. (참)

행렬의 연산의 성질을 적용하면

$(A^3-A)^2+E$

$=(A+A^2)^2(A-E)^2+E$

$=(A+A^2)^2(-B^2)+E$

$(\because (A-E)^2+B^2=O)$

$=(B^{-1})^2(-B^2)+E(\because$ ㄱ$)$

$=-(B^{-1})^2B^2+E$

$=-(B^{-1}B)^2+E$

$=-E^2+E=-E+E=O$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

18

[풀이]

주어진 그림에서

$a_1 = \frac{\pi}{4}$

$a_1 + \pi < a_2 < \frac{3}{2}\pi$

$a_2 + \pi < a_3 < \frac{5}{2}\pi$

$\vdots$

$a_{n-1} + \pi < a_n < \frac{2n-1}{2}\pi$

(단, $n \geq 2$)

위의 부등식을 변변히 모두 더하면 다음의 부등식을 얻는다.

$(n-1)\pi + \frac{\pi}{4} < a_n$ (단, $n \geq 2$)

방정식 $\tan x = n$의 실근 a_n은 다음의 부등식을 만족시킨다.

$(n-1)\pi + \frac{\pi}{4} < a_n < \frac{2n-1}{2}\pi$ (단, $n \geq 2$)

양변을 n으로 나누면

$\frac{4n-3}{4n}\pi < \frac{a_n}{n} < \frac{2n-1}{2n}\pi$

수열의 극한에 대한 기본 성질을 적용하면

$\lim_{n \to \infty} \frac{4n-3}{4n}\pi = \lim_{n \to \infty}\left(\pi - \frac{3}{4n}\pi\right) = \pi - 0 = \pi$

$\lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{2n}\pi = \lim_{n \to \infty}\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right) = \pi - 0 = \pi$

수열의 극한값의 대소 관계를 적용하면

$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \pi$

답 ④

19

[풀이]

구 S의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$, 반지름의 길이를 r이라고 하자.

(단, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $r > 0$)

S : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

구 S의 방정식에 $z = 0$을 대입하면

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 - c^2$ $\cdots(*)$

구 S가 x축과 y축에 각각 접하므로, 원 $(*)$도 x축과 y축에 각각 접한다.

원 $(*)$의 중심의 x좌표와 y좌표가 원 $(*)$의 반지름의 길이와 같으므로

$a = b = \sqrt{r^2 - c^2}$ $\cdots$㉠

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이므로

$\pi(\sqrt{r^2 - c^2})^2 = 64\pi$

정리하면

$r^2 - c^2 = 64$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면
$a=b=8$
구 S의 방정식은
$S:(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=r^2$
구 S의 방정식에 $x=y=0$을 대입하면
$128+(z-c)^2=r^2$
정리하면
$z^2-2cz+64=0(\because ㉡)$
이차방정식의 서로 다른 두 실근을 각각 α, $\beta(\beta>\alpha)$라고 하자.
주어진 조건에서
$\beta-\alpha=8$ $\cdots$㉢
이차방정식의 근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=2c$, $\alpha\beta=64$ $\cdots$㉣
이제 다음과 같은 등식을 생각하자.
$(\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2+4\alpha\beta$
㉢, ㉣을 대입하면
$(2c)^2=8^2+4\times64$
풀면
$c^2=80$ $\cdots$㉤
㉤을 ㉡에 대입하면
$\therefore\ r=12$
답 ②

20

[풀이]
$\log x=f(x)+g(x)$
(단, $f(x)$는 정수이고, $0\le g(x)<1$이다.)
$3f(x)+5g(x)=5\log x-2f(x)$
$5\log x-2f(x)$는 10의 배수이므로 정수이다.
그런데 $2f(x)$가 정수이므로, $5\log x$는 정수이다.
$5\log x=n$(n은 정수)로 두면 $x=10^{\frac{n}{5}}$
주어진 조건에서 $x>1$이므로 n은 자연수이다.
(1) $n=5k-4$(k는 자연수)인 경우
$x=10^{k-\frac{4}{5}}$에서 $\log x=k-1+\dfrac{1}{5}$
$f(x)=k-1$, $g(x)=\dfrac{1}{5}$
$3f(x)+5g(x)=3k-2$
k가 4, 14, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.
즉, n이 16, 66, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.
(2) $n=5k-3$(k는 자연수)인 경우

$x=10^{k-\frac{3}{5}}$에서 $\log x=k-1+\frac{2}{5}$

$f(x)=k-1,\ g(x)=\frac{2}{5}$

$3f(x)+5g(x)=3k-1$

k가 7, 17, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

즉, n이 32, 82, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

(3) $n=5k-2$(k는 자연수)인 경우

$x=10^{k-\frac{2}{5}}$에서 $\log x=k-1+\frac{3}{5}$

$f(x)=k-1,\ g(x)=\frac{3}{5}$

$3f(x)+5g(x)=3k$

k가 10, 20, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

즉, n이 48, 98, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

(4) $n=5k-1$(k는 자연수)인 경우

$x=10^{k-\frac{1}{5}}$에서 $\log x=k-1+\frac{4}{5}$

$f(x)=k-1,\ g(x)=\frac{4}{5}$

$3f(x)+5g(x)=3k+1$

k가 3, 13, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

즉, n이 14, 64, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

(5) $n=5k$(k는 자연수)인 경우

$x=10^{k}$에서 $\log x=k$

$f(x)=k,\ g(x)=0$

$3f(x)+5g(x)=3k$

k가 10, 20, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

즉, n이 50, 100, $\cdots$일 때, $3f(x)+5g(x)$는 10의 배수이다.

문제에서 주어진 조건을 만족시키는 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$x=10^{\frac{14}{5}},\ 10^{\frac{16}{5}},\ 10^{\frac{32}{5}},\ 10^{\frac{48}{5}},\ 10^{10},\ 10^{\frac{64}{5}},\ 10^{\frac{66}{5}},\ 10^{\frac{82}{5}},\ 10^{\frac{98}{5}},\ 10^{20},\ \cdots$

$a=10^{\frac{16}{5}},\ b=10^{\frac{64}{5}}$

로그의 성질을 적용하면

$\therefore\ \log ab=16$

답 ⑤

21

[풀이]

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$ $\cdots$㉠

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-1)=-f(1)=-1$

$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{0} f(t)dt=-\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1} f(t)dt=-1$

즉, $\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1} f(t)dt=1$ $\cdots$ ㉡

$\therefore\ \pi^2\int_{0}^{1} xf(x+1)dx$

$=2\pi\int_{0}^{1} xf'(x)dx$ ($\because$ ㉠)

$=2\pi[xf(x)]_0^1-2\pi\int_{0}^{1} f(x)dx$

($\because$ 부분적분법)

$=2\pi f(1)-4$ ($\because$ ㉡)

$=2(\pi-2)$

답 ①

22

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f(x)=15e^{3x-3}$

$\therefore\ f'(1)=15$

답 15

23

[풀이]

15명의 여성 회원 중에서 마라톤을 완주한 회원은 9명이다.

조건부 확률의 정의에서 구하는 확률은

$p=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ 100p=60$

답 60

24

[풀이]

무리방정식에 대한 전형적인 풀이를 적용하자.

$\sqrt{2x^2-6x}=t(>0)$로 두면 주어진 방정식은

$t=\frac{t^2}{2}-4$

정리하면

$t^2-2t-8=0$, $(t-4)(t+2)=0$, $t=4$

$\sqrt{2x^2-6x}=4$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-3x-8=0$

(판별식)$=(-3)^2-4(-8)=41>0$이므로, 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하자.
이차방정식의 근과 계수와의 관계에서
$\alpha\beta=-8$ 즉, $k=-8$
$\therefore\ \ k^2=64$
답 64

25

[풀이]
우선 상수 k의 값을 구하자.

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}$$

지수법칙과 로그의 성질을 적용하면

$$2=1-\frac{4}{23}k\log R$$

정리하면

$$k=-\frac{23}{4\log R}\qquad\cdots(*)$$

이제 a의 값을 구하자.

$$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R}$$

지수법칙과 로그의 성질을 적용하면
$3=1-(a-1)k\log R$
정리하면

$$\therefore\ \ a=1-\frac{2}{k\log R}$$

$$=1-\frac{2}{-\frac{23}{4\log R}\log R}=\frac{31}{23}\ (\because (*))$$

답 31

26

[풀이]
표본비율은 $\hat{p}=0.8$이고, n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$a=\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

$$b=\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

$$b-a=2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$$

n에 대한 방정식을 풀자.

$\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{n}}=\dfrac{0.098}{2\times1.96}=0.025$

$\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}=0.025$, $\sqrt{n}=\dfrac{0.4}{0.025}=16$

$\therefore\ n=256$

답 256

27

[풀이]

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$x=\pm5$

주어진 타원의 장축의 길이는 10이다.

타원의 정의에서

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$ $\cdots$ ㉠

두 초점 F, F′의 좌표는

F(4, 0), F′(−4, 0)

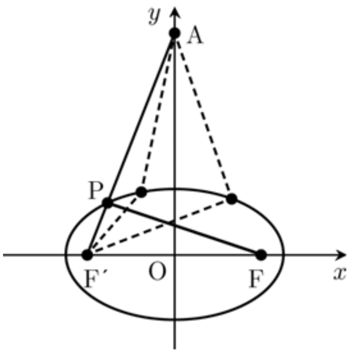
$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF'}}-(\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PF'}})$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF'}}-10$ ($\because$ ㉠)

$\geq\overline{\mathrm{AF'}}-10$

(단, 등호는 세 점 A, P, F′가 한 직선 위에 있을 때 성립한다.)



두 점 사이의 거리 공식을 적용하면

$\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{(0+4)^2+(a-0)^2}=\sqrt{16+a^2}$

이므로

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$의 최솟값은 $\sqrt{16+a^2}-10$이다.

주어진 조건에서

$\sqrt{16+a^2}-10=1$

a^2에 관한 무리방정식을 풀면

$\therefore\ a^2=105$

답 105

28

[풀이]

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직각삼각형 AHC에서

$\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\sin\frac{\theta}{2}$ 즉, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$

($\triangle$BDP의 넓이)

$=$($\triangle$ADP의 넓이)$-$($\triangle$ABP의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}\,\overline{\mathrm{AP}}\sin2\theta-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AP}}\sin2\theta$

$=\frac{2\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

함수의 극한에 대한 성질을 적용하면

$\therefore \lim_{\theta\to+0}(\theta\times S(\theta))$

$=\lim_{\theta\to+0}16\frac{\sin2\theta}{2\theta}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\left(1-2\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=16\times1\times1^2\times1=16$

답 16

29

[풀이1]

구 $x^2+y^2+z^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로, 좌표공간에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 크기의 최댓값은 4이다.

그리고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 방향은 임의이다.

시점이 원점이고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 방향이 같고, 크기가 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$인 벡터의 종점을 R이라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(ka,\ kb,\ kc)$

(단, $0<k\le4$, $a^2+b^2+c^2=1$이다.)

평면 $y=4$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$이라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(0,\ 1,\ 0)$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{n_1}$이 이루는 예각을 θ_1이라 하자.

두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식을 적용하면

$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{n_1}|}=\frac{|b|}{4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times\cos^2\theta_1$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2\times\cos^2\theta_1=\frac{k^2b^2}{16}$ $\cdots$㉠

평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ \sqrt{3})$
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 예각을 θ_2라 하자.
두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식을 적용하면
$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|b+\sqrt{3}c|}{8}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times\cos^2\theta_2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2\times\cos^2\theta_2=\frac{k^2(b+\sqrt{3}c)^2}{64}\quad\cdots ㉡$$
㉠, ㉡을 대입하면
$$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$$
$$=\frac{k^2}{64}(5b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2)$$
변수 k는 세 변수 a, b, c 각각에 독립이므로
$$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$$
$$\le\frac{1}{4}(5b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2)\quad\cdots ㉢$$
(단, 등호는 $k=4$일 때 성립한다.)
한편 $b^2+c^2=16-a^2$에서
$b=\sqrt{16-a^2}\cos\theta$, $c=\sqrt{16-a^2}\sin\theta$
(단, $0\le\theta<2\pi$이다.)
이를 ㉢에 대입하여 정리하면
$$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$$
$$\le\frac{16-a^2}{4}(4+\cos2\theta+\sqrt{3}\sin2\theta)$$
($\because$ 삼각함수의 배각의 공식)
$$\le\frac{16-a^2}{2}\left(2+\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
($\because$ 삼각함수의 합성의 공식)
$$\le\frac{3}{2}(16-a^2)$$
(단, 등호는 $\theta=\frac{\pi}{12}$, $\frac{13}{12}\pi$일 때 성립한다.)
($\because$ 두 변수 a, θ는 서로 독립이다.)
≤ 24
(단, 등호는 $a=0$일 때 성립한다.)
따라서 $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값은 24이다.
답 24

[풀이2]
두 평면 $y=4$, $y+\sqrt{3}z+8=0$이 이루는 예각을 θ라고 하자.
평면 $y=4$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$이라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(0,\ 1,\ 0)$
평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ \sqrt{3})$
두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식을 적용하면
$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{2},\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$
즉, 문제에서 주어진 두 평면이 이루는 예각은 60°이다.
두 평면 $y=4$와 $y=0$이 서로 평행하고, 두 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$과 $y+\sqrt{3}z=0$이 서로 평행하므로, 두 평면 $y=0$과 $y+\sqrt{3}z=0$이 이루는 예각은 60°이다.
한편 구 $x^2+y^2+z^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로, 좌표공간에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 크기의 최댓값은 4이다. 그리고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 방향은 임의이다.
시점이 원점이고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 방향이 같고, 크기가 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$인 벡터의 종점을 R이라고 하면, R은 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 $k(0<k\le 4)$인 구 위의 점이다.
이제 다음의 문제를 풀면 된다. (즉, 주어진 문제와 다음의 문제는 필요충분조건이다.)
“좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=k^2(0<k\le 4)$ 위를 움직이는 점 R이 있다. 점 R에서 평면 $y=0$에 내린 수선의 발을 R_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z=0$에 내린 수선의 발을 R_2라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}|^2$의 최댓값을 구하시오.”
좌표공간에서 구
$x^2+y^2+z^2=k^2(0<k\le 4)$ $\cdots$ ㉠
와 평면
$z=(\tan\theta_1)y$
(단, $0\le\theta_1<2\pi,\ \theta_1\ne\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$) $\cdots$ ㉡
가 만나서 생기는 도형(원)의 방정식을 구하자.
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+\dfrac{y^2}{\cos^2\theta_1}=k^2$
이 방정식을 매개변수 $\theta_2(0\le\theta_2<2\pi)$를 이용하여 나타내면
$x=k\cos\theta_2,\ y=k\cos\theta_1\sin\theta_2$
이를 ㉡에 대입하면
$z=k\sin\theta_1\sin\theta_2$
이제 점 R의 좌표를 다음과 같이 둘 수 있다.
$\mathrm{R}(k\cos\theta_2,\ k\cos\theta_1\sin\theta_2,\ k\sin\theta_1\sin\theta_2)$
(단, $0<k\le 4,\ 0\le\theta_1<2\pi,\ 0\le\theta_2<2\pi$)
$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}|^2$
$=$(점 R에서 평면 $y=0$에 이르는 거리$)^2$
$=$(점 R의 y좌표$)^2$
$=k^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2$ $\cdots$ ㉢
$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}|^2$

$=$(점 R에서 평면 $y+\sqrt{3}z=0$에 이르는 거리)^2

$=\dfrac{k^2\sin^2\theta_2}{4}(\cos^2\theta_1+3\sin^2\theta_1+2\sqrt{3}\sin\theta_1\cos\theta_1)$

($\because$ 점과 평면 사이의 거리 공식) $\cdots$㉣

㉢, ㉣을 대입하면

$2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}|^2$

$=\dfrac{k^2\sin^2\theta_2}{4}(4+\cos 2\theta_1+\sqrt{3}\sin 2\theta_1)$

($\because$ 삼각함수의 배각의 공식)

$=\dfrac{k^2\sin^2\theta_2}{2}\left(2+\sin\left(2\theta_1+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

($\because$ 삼각함수의 합성의 공식)

≤ 24

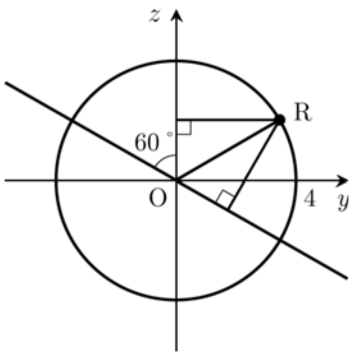
(단, 등호는 $k=4$, $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{7}{6}\pi$,

$\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi$일 때 성립한다.)

($\because$ 세 변수 k, θ_1, θ_2는 서로 독립이다.)

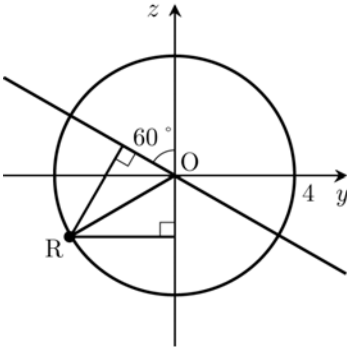
다음은 $k=4$, $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$, $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$

혹은 $k=4$, $\theta_1=\dfrac{7}{6}\pi$, $\theta_2=\dfrac{3}{2}\pi$인 경우이다.



다음은 $k=4$, $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$, $\theta_2=\dfrac{3}{2}\pi$

혹은 $k=4$, $\theta_1=\dfrac{7}{6}\pi$, $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$인 경우이다.



답 24

30

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}e^{-x}$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=\{ax^2-(4a-b)x+2a-2b+c\}e^{-x}$

조건 (가)에서

$g''(1)=(-a-b+c)e^{-1}=0$

즉, $-a-b+c=0$

$g''(4)=(2a+2b+c)e^{-4}=0$

즉, $2a+2b+c=0$

a, b, c에 대한 연립방정식을 풀면

$b=-a$, $c=0$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=a(x^2-x)e^{-x}(a\neq 0)$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-a(x^2-3x+1)e^{-x}$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(t)(x-t)+g(t)$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지난다고 하면

$k=-tg'(t)+g(t)$

이 t에 대한 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖는 k의 범위가 $-1<k<0$이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하면 조건 (나)를 만족시키는 상수 a의 값을 구하는 것이다.

이제 곡선 $y=a(t^3-2t^2)e^{-t}(=-tg'(t)+g(t))$이 직선 $y=k$와 서로 다른 세 점에서 만나는 k의 범위가 $-1<k<0$가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하자.

(1) $a>0$인 경우

함수 $y=a(t^3-2t^2)e^{-t}$의 도함수는

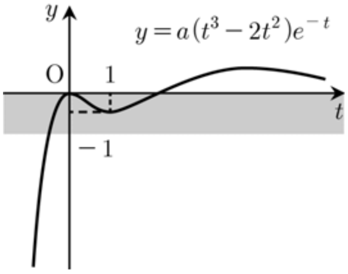
$y' = -a(t^3 - 5t^2 + 4t)e^{-t}$

$y' = -at(t-1)(t-4)e^{-t} = 0$에서 $t = 0,\ 1,\ 4$

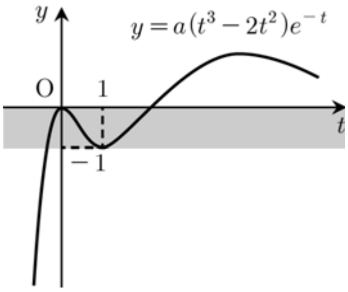
t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{a}{e}$	$\nearrow$	$\frac{32a}{e^4}$	$\searrow$

$\lim_{t\to\infty} a(t^3 - 2t^2)e^{-t} = 0,\ \lim_{t\to-\infty} a(t^3 - 2t^2)e^{-t} = -\infty$

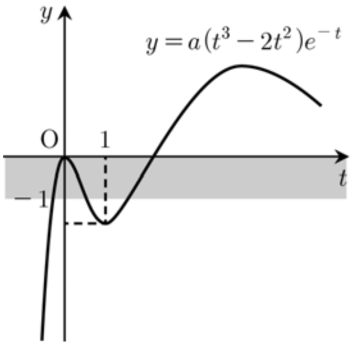
$a < e$일 때, 곡선 $y = a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$의 그래프는



$a = e$일 때, 곡선 $y = a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$의 그래프는



$a > e$일 때, 곡선 $y = a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$의 그래프는



곡선 $y = a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$이 직선 $y = k$와 서로 다른 세 점에서 만나는 k의 범위가 $-1 < k < 0$가 되도록 하는 상수 a의 값은 e이다.

(2) $a < 0$인 경우

함수 $y = a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$의 도함수는

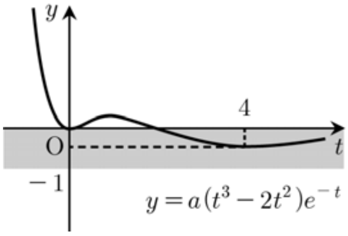
$y' = -a(t^3 - 5t^2 + 4t)e^{-t}$

$y' = -at(t-1)(t-4)e^{-t} = 0$에서 $t = 0,\ 1,\ 4$

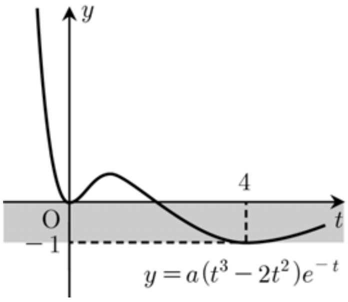
t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\dfrac{a}{e}$	$\searrow$	$\dfrac{32a}{e^4}$	$\nearrow$

$\lim\limits_{t\to\infty} a(t^3-2t^2)e^{-t}=0,\ \lim\limits_{t\to-\infty} a(t^3-2t^2)e^{-t}=\infty$

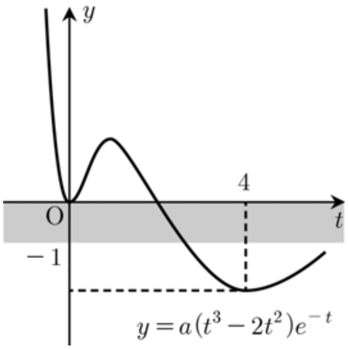
$a>-\dfrac{e^4}{32}$일 때, 곡선 $y=a(t^3-2t^2)e^{-t}$의 그래프는



$a=-\dfrac{e^4}{32}$일 때, 곡선 $y=a(t^3-2t^2)e^{-t}$의 그래프는



$a<-\dfrac{e^4}{32}$일 때, 곡선 $y=a(t^3-2t^2)e^{-t}$의 그래프는



곡선 $y=a(t^3-2t^2)e^{-t}$이 직선 $y=k$와 서로 다른 세 점에서 만나는 k의 범위가 $-1<k<0$가 되도록 하는 상수 a의 값은 없다.

(1), (2)에서 구하는 a의 값은 e이다.

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x^2-x)e^{-x+1}$

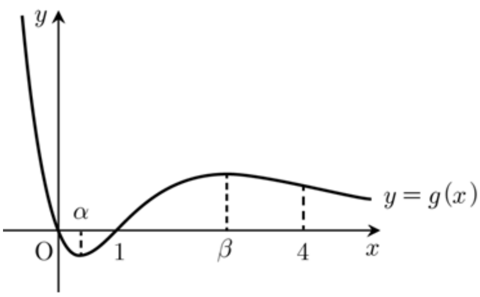
$\therefore\ g(-2)\times g(4)=72$

답 72

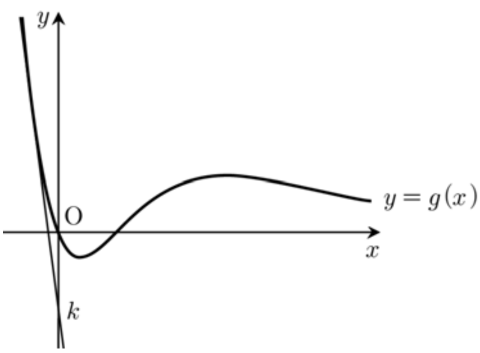
[참고]
조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=(x^2-x)e^{-x+1}$
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=-(x^2-3x+1)e^{-x+1}$
$g'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면
$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
함수 $g(x)$의 이계도함수는
$g''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x+1}$
$g''(x)=(x-1)(x-4)e^{-x+1}=0$에서 $x=1$, 4

x	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	β	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	↗	↗	극대	↘	↘	↘

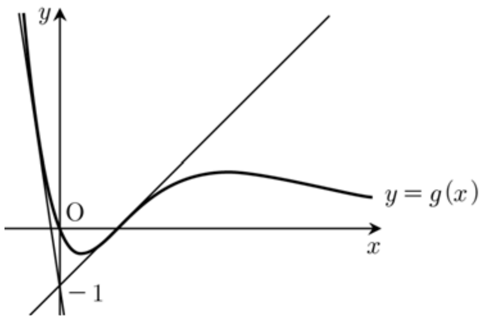
$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$
함수 $g(x)$의 그래프는



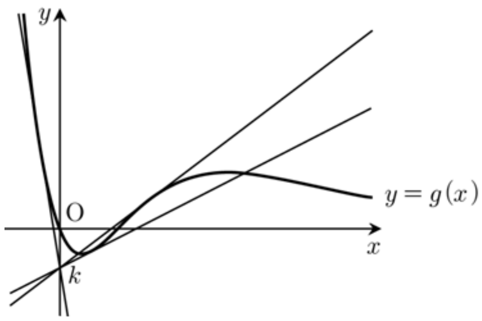
곡선 $y=g(x)$ 위의 변곡점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 1이다.
$k<-1$일 때, 접선의 개수는 1이다.



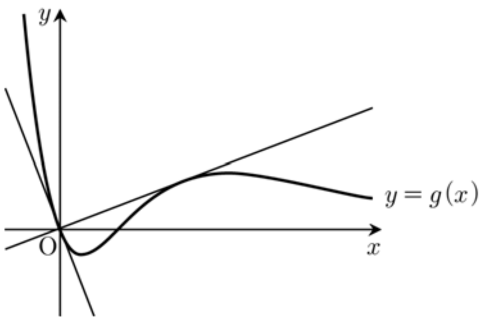
$k=-1$일 때, 접선의 개수는 2이다.



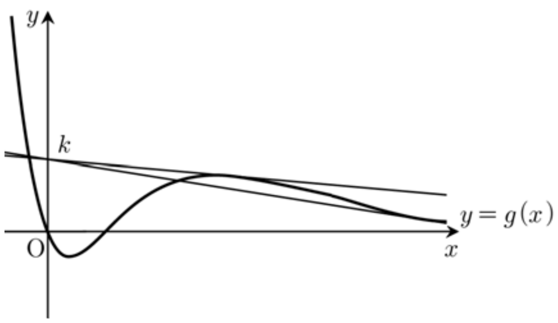
$-1 < k < 0$일 때, 접선의 개수는 3이다.



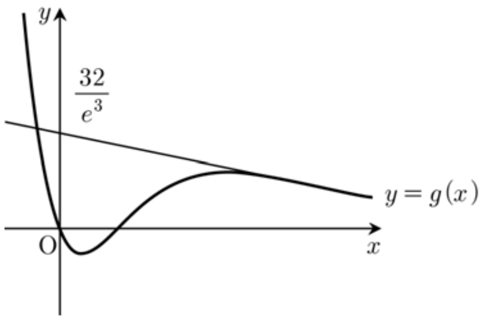
$k = 0$일 때, 접선의 개수는 2이다.



$0 < k < \dfrac{32}{e^3}$일 때, 접선의 개수는 2이다.



$k = \dfrac{32}{e^3}$일 때, 접선의 개수는 1이다.



$k>\dfrac{32}{e^3}$ 일 때, 접선의 개수는 0이다.