# 2014학년도 대학수학능력시험 해설지

# 수학 영역(A형)

**작성자 : 이동훈**

**발표일 : 2013년 11월 13일**

## 01

[풀이]

지수법칙을 적용하면

$8^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{1}{2}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} \times 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 2^2 \times 3^1 = 12$

답 ①

## 02

[풀이]

행렬의 연산의 성질을 적용하면

$A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

행렬 $A + 2B$의 모든 성분의 합은 10이다.

답 ③

## 03

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질을 적용하면

$\lim_{n \to \infty} \frac{2 \times 3^{n+1} + 5}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \left(6 + \frac{5}{3^n}\right) = 6 + 0 = 6$

답 ⑤

## 04

[풀이]

두 꼭짓점 A, E 사이에 연결된 변의 개수는 0이므로

$a = e = 0$

두 꼭짓점 B, D 사이에 연결된 변의 개수는 1이므로

$b = d = 1$

두 꼭짓점 C, C 사이에 연결된 변의 개수는 0이므로

$c = 0$

주어진 그래프를 나타내는 행렬은

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\therefore \; a + b + c + d + e = 2$

답 ②

## 05

[풀이]

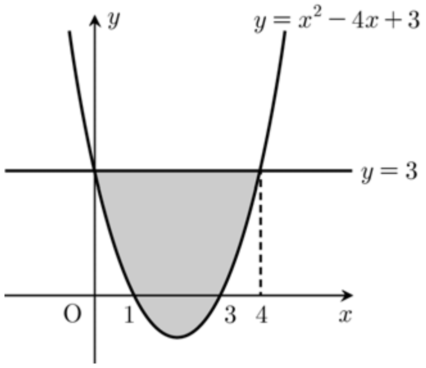
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x+a$
미분계수의 정의에서
$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=6$
$f'(1)=4+a=6$
$\therefore\ a=2$
답 ④

## 06
[풀이]
일반항 $a_n$과 합 $S_n$ 사이의 관계에서
$S_8-S_6=a_7+a_8$이므로
$\frac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=\frac{a_8-a_6}{a_7+a_8}=2$
정리하면
$a_6+2a_7+a_8=0$
등차수열의 일반항의 공식을 적용하면
$(a_1+5d)+2(a_1+6d)+(a_1+7d)=0$
정리하면
$4a_1+24d=0$
$a_1=6$을 대입하여 일차방정식을 풀면
$\therefore\ d=-1$
답 ①

## 07
[풀이]
두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$
확률의 덧셈정리를 적용하면
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$
답 ②

## 08
[풀이]




구하는 넓이를 $S$라고 하자.
두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 공식을 적용하면

$$\therefore\ S = \int_0^4 (3 - x^2 + 4x - 3)dx$$

$$= \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

답 ③

## 09

[풀이]
확률변수 $X$에 대하여
$\mathrm{E}(X) = 9p,\ \mathrm{V}(X) = 9p(1-p)$
이를 주어진 등식에 대입하면
$(9p)^2 = 9p(1-p)$
양변을 $9p(\neq 0)$로 나누면
$9p = 1 - p$
일차방정식을 풀면

$$\therefore\ p = \frac{1}{10}$$

답 ④

## 10

[풀이]
우선 상수 $k$의 값을 구하자.

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c} = 1 - k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}$$

지수법칙과 로그의 성질을 적용하면

$$2 = 1 - \frac{4}{23}k\log R$$

정리하면

$$k = -\frac{23}{4\log R} \qquad \cdots(*)$$

이제 $a$의 값을 구하자.

$$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c} = 1 - k\log\frac{R^a}{R}$$

지수법칙과 로그의 성질을 적용하면

$$3 = 1-(a-1)k\log R$$

정리하면

$$\therefore \ a = 1 - \frac{2}{k\log R}$$

$$= 1 - \frac{2}{-\frac{23}{4\log R}\log R} = \frac{31}{23} \ (\because (*))$$

답 ⑤

## 11

[풀이]

$x \to -1-0$일 때, $f(x)$는 3의 값을 가지면서 3에 수렴한다.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3$$

$x \to +0$일 때, $f(x)$는 0 보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴한다.

$$\lim_{x\to +0} f(x) = 0$$

$$\therefore \ \lim_{x\to -1-0} f(x) + \lim_{x\to +0} f(x) = 3+0 = 3$$

답 ③

## 12

[풀이]

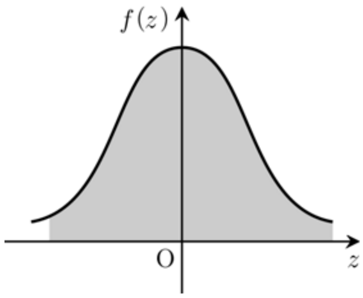
이 약품 회사가 생산하는 약품 1병의 용량을 $X$라고 하면, 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따른다.

$\sigma = 10$, $n = 25$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = m,\ \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 2$$

인 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.

$Z = \dfrac{\overline{X}-m}{2}$으로 두면, 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.



$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 2000) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{2000-m}{2}\right)$

$= 0.5 + \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{m-2000}{2}\right)$

$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

즉, $\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{m-2000}{2}\right) = 0.4772$

주어진 표준정규분포표에서

$\dfrac{m-2000}{2} = 2.0$

$\therefore\ m = 2004$

답 ②

## 13

[풀이]

$6^n$은 짝수이므로

$f(6^n) = \log_2 6^n = n\log_2 6$

$3^n$은 홀수이므로

$f(3^n) = \log_3 3^n = n$

일반항 $a_n$은

$a_n = n\log_2 6 - n(n \geq 1)$

로그의 성질을 적용하면

$a_n = n\log_2 3(n \geq 1)$

시그마의 기본 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식을 적용하면

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} n\log_2 3 = (\log_2 3) \times \sum_{n=1}^{15} n$

$= (\log_2 3) \times \dfrac{15 \times 16}{2} = 120\log_2 3$

답 ④

## 14

[풀이]

(1) $m$, $n$이 홀수인 경우

$mn$이 홀수이므로 $f(mn) = \log_3 mn$

주어진 등식은

$\log_3 mn = \log_3 m + \log_3 n$

로그의 성질을 적용하면

$\log_3 mn = \log_3 mn$

20 이하의 두 홀수 $m$, $n$에 대한 항등식이므로

$\therefore\ (m,\ n) = (1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ \cdots,\ (19,\ 19)$

(2) $m$이 홀수, $n$이 짝수인 경우

$mn$이 짝수이므로 $f(mn) = \log_2 mn$

주어진 등식은

$\log_2 mn = \log_3 m + \log_2 n$

로그의 성질을 적용하면

$\log_2 m = \log_3 m$

$m$에 대한 방정식을 풀면

$m = 1$

$\therefore\ (m,\ n) = (1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ \cdots,\ (1,\ 20)$

(3) $m$이 홀수, $n$이 짝수인 경우

(2)와 마찬가지의 방법으로

$\therefore\ (m,\ n) = (2,\ 1),\ (4,\ 1),\ (6,\ 1),\ \cdots,\ (20,\ 1)$

(4) $m$, $n$이 짝수인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

$\therefore\ (m,\ n) = (2,\ 2),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ \cdots,\ (20,\ 20)$

(1)~(4)에서 구하는 순서쌍의 개수는 220이다.

답 ①

## 15

[풀이]

주머니 A에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

주머니 A에서 흰 공을 꺼냈을 때, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5} \times \frac{3}{6}$이다.

주머니 A에서 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

주머니 A에서 검은 공을 꺼냈을 때, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}$이다.

구하는 확률을 $p$라고 하자.

확률의 덧셈정리를 적용하면

$\therefore\ p = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{10}$

답 ⑤

## 16

[풀이]

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n \log a_{n+1} = (n+1) \log a_n + 1$

이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1} = \frac{\log a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

이다. $b_n = \frac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1 = 1$이고

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \, (n \ge 2)$$

$$b_n = 2 - \frac{1}{n} \, (n \ge 1)$$

이므로

$$\log a_n = 2n - 1$$

이다. 그러므로 $a_n = 10^{2n-1}$이다.

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)}, \; g(n) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\therefore \; \frac{g(10)}{f(4)} = 38$$

답 ①

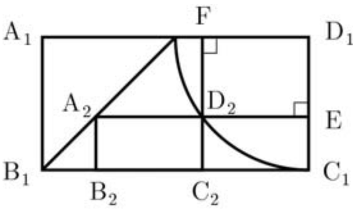
## 17

[풀이]

$S_1$=(부채꼴 $N_1M_1B_1$의 넓이)−(삼각형 $N_1M_1B_1$의 넓이)
+(부채꼴 $D_1M_1C_1$의 넓이)−(삼각형 $D_1M_1C_1$의 넓이)

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

점 $D_2$에서 두 선분 $C_1D_1$, $D_1A_1$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자.




$\overline{A_2B_2} = x$로 두자. (단, $0 < x < 1$)

$\triangle A_2B_1B_2$는 $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2A_2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_1B_2} = x$

직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 이웃한 두 변의 길이의 비가 1 : 2이므로

$\overline{B_2C_2} = 2x$

$\overline{C_2C_1} = \overline{B_1C_1} - \overline{B_1B_2} - \overline{B_2C_2} = 2 - 3x$

그런데 두 선분 $D_2E$, $C_2C_1$의 길이가 같으므로

$\overline{D_2E} = 2 - 3x$ $\cdots$ ㉠

$\overline{ED_1} = \overline{C_1D_1} - \overline{C_1E} = 1 - x$ $\cdots$ ㉡

원의 정의에서

$\overline{D_1D_2}=1$ $\cdots$ ㉢
직각삼각형 $D_1D_2E$에서 피타고라스의 정리를 적용하면
$\overline{D_1D_2}^2=\overline{D_2E}^2+\overline{ED_1}^2$
㉠, ㉡, ㉢을 대입하면
$1=(2-3x)^2+(1-x)^2$
정리하면
$5x^2-7x+2=0$
$(5x-2)(x-1)=0,\ x=\frac{2}{5}$
서로 닮음인 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$에 대하여 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 짧은 변의 길이에 대한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 짧은 변의 길이의 비는 $\frac{2}{5}$이다.
마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 서로 닮음인 두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에 대하여 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 짧은 변의 길이에 대한 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 짧은 변의 길이의 비가 $\frac{2}{5}$임을 보일 수 있다.
수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}-1$이고, 공비가 $\left(\frac{2}{5}\right)^2$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.
무한등비급수의 합의 공식을 적용하면

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

답 ③

## 18

[풀이]
3명의 학생이 나누어 받는 흰색 탁구공의 개수를 각각 $x$, $y$, $z$라고 하면
$x+y+z=8$ (단, $x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$)
$x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$으로 두면
$x'+y'+z'=5$ (단, $x'\ge0$, $y'\ge0$, $z'\ge0$)
중복조합의 수의 공식을 적용하면
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$
즉, 3명의 학생 각각이 흰색 탁구공을 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는 21이다.
마찬가지의 방법으로 3명의 학생 각각이 주황색 탁구공을 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는 $15(={}_3H_4)$이다.
곱셈법칙을 적용하면 구하는 경우의 수는 $21\times15=315$이다.
답 ⑤

## 19

[풀이]
ㄱ. (참)

행렬의 연산의 성질을 적용하면
$(A+A^2)B=E$
역행렬의 정의에서
$B^{-1}=A+A^2$
즉, $B$의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. (참)
ㄱ의 결과를 적용하면
$AB^{-1}=A(A+A^2)=A^2+A^3$
$B^{-1}A=(A+A^2)A=A^2+A^3$
즉, $AB^{-1}=B^{-1}A$
양변의 왼쪽에 행렬 $B$를 곱하면
$BAB^{-1}=BB^{-1}A$
즉, $BAB^{-1}=A$
양변의 오른쪽에 행렬 $B$를 곱하면
$BAB^{-1}B=AB$
$BA=AB$
$\therefore\ AB=BA$
ㄷ. (참)
행렬의 연산의 성질을 적용하면
$(A^3-A)^2+E$
$=(A+A^2)^2(A-E)^2+E$
$=(A+A^2)^2(-B^2)+E$
$(\because (A-E)^2+B^2=O)$
$=(B^{-1})^2(-B^2)+E(\because$ ㄱ$)$
$=-(B^{-1})^2B^2+E$
$=-(B^{-1}B)^2+E$
$=-E^2+E=-E+E=O$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

## 20

[풀이]
$\log x=f(x)+g(x)\qquad\cdots(*)$
(단, $f(x)$는 정수이고, $0\le g(x)<1$)
$f(x)-(n+1)g(x)$
$=\log x-g(x)-(n+1)g(x)$
$=\log x-(n+2)g(x)=n$
정리하면
$g(x)=\dfrac{\log x-n}{n+2}$
가수의 조건에서

$0 \le \dfrac{\log x - n}{n+2} < 1$

로그부등식에 대한 전형적인 풀이를 적용하면

$10^n \le x < 10^{2n+2}$

$n \le \log x < 2n+2$

지표의 정의에서 $f(x)$는 $n$, $n+1$, $n+2$, $\cdots$, $2n+1$을 갖는다.

$f(x) = k$(단, $n \le k \le 2n+1$)을 주어진 등식에 대입하면

$k-(n+1)g(x) = n$

정리하면

$g(x) = \dfrac{k-n}{n+1}$

$(*)$에 대입하면

$\log x = k + \dfrac{k-n}{n+1}$

로그의 정의에서

$x = 10^{\frac{n+2}{n+1}k - \frac{n}{n+1}}$

(단, $n \le k \le 2n+1$)

시그마의 기본 성질과 등차수열의 합의 공식을 적용하면

$a_n = 10^{\frac{n+2}{n+1}\sum_{k=n}^{2n+1} k - \sum_{k=n}^{2n+1}\frac{n}{n+1}}$

$= 10^{\frac{n+2}{n+1}\frac{(3n+1)(n+2)}{2} - \frac{n}{n+1}(n+2)}$

$= 10^{\frac{(n+2)(3n+2)}{2}}$

$\log a_n = \dfrac{(n+2)(3n+2)}{2}$

수열의 극한에 대한 기본 성질을 적용하면

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(3n+2)}{2n^2}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+8n+4}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$

$= \dfrac{3}{2} + 0 + 0 = \dfrac{3}{2}$

답 ②

## 21

[풀이]

조건 (가)에서

$f(1) = 1 + a + b = 2$

즉, $a + b = 1$ $\cdots$ ㉠

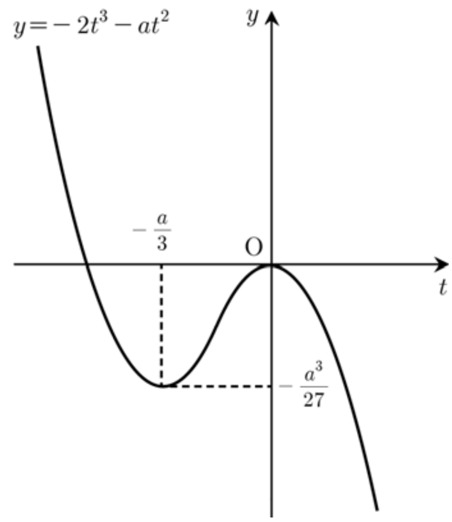
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

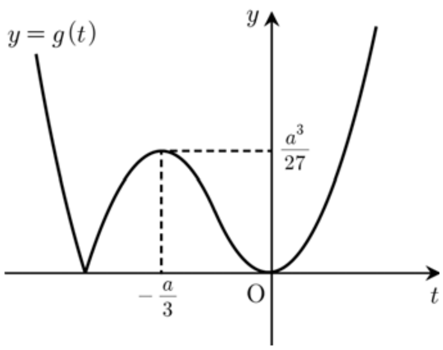
접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$
직선의 방정식에 $x=0$을 대입하면
$y=-2t^3-at^2$
함수 $g(t)$의 방정식은
$g(t)=\left|-2t^3-at^2\right|$
(1) $a>0$인 경우
우선 함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프를 그리자.
도함수는
$y'=-6t^2-2at$
$y'=-2t(3t+a)=0$에서 $t=0,\ -\dfrac{a}{3}$

| $t$ | $\cdots$ | $-\dfrac{a}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-\dfrac{a^3}{27}$ | ↗ | $0$ | ↘ |




함수 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



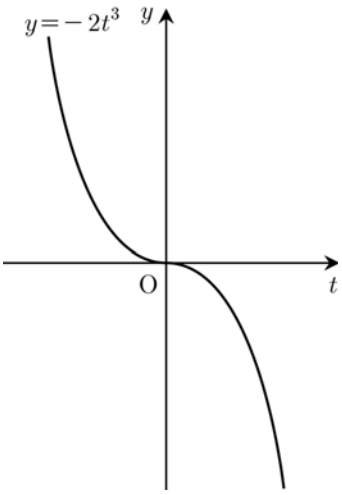

함수 $g(t)$는 한 점에서 미분가능하지 않다.
(2) $a=0$인 경우
우선 함수 $y=-2t^3$의 그래프를 그리자.

도함수는

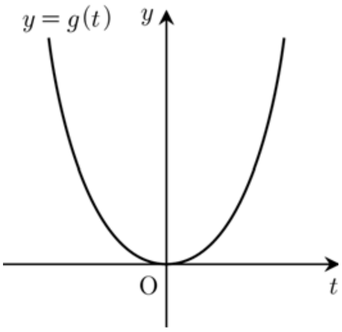
$y' = -6t^2$

$y' = -6t^2 = 0$에서 $t = 0$

| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ |




함수 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.




함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(3) $a < 0$인 경우

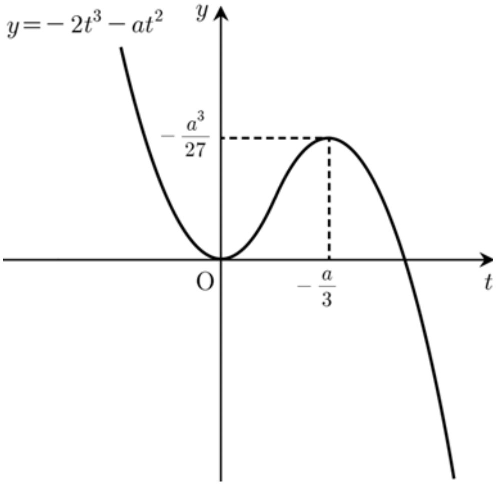
우선 함수 $y = -2t^3 - at^2$의 그래프를 그리자.

도함수는

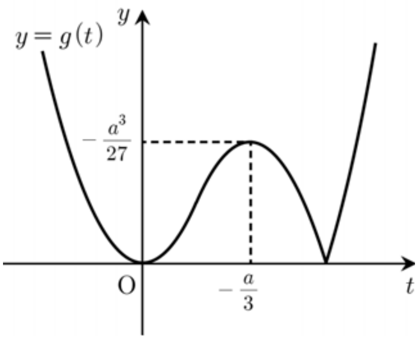
$y' = -6t^2 - 2at$

$y' = -2t(3t + a) = 0$에서 $t = 0,\ -\dfrac{a}{3}$

| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $-\dfrac{a}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $-\dfrac{a^3}{27}$ | $\searrow$ |




함수 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.




함수 $g(t)$는 한 점에서 미분가능하지 않다.
오직 (2)의 경우만이 조건 (나)를 만족시킨다.
$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3+x$
$\therefore\ f(3)=30$
답 ④

## 22

[풀이]
함수의 극한에 대한 성질을 적용하면
$\lim_{x\to 0}\sqrt{2x+9}=\sqrt{0+9}=3$
답 3

## 23

[풀이]
정적분의 기본 정리를 적용하면
$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=\left[x^3+x^2\right]_{-a}^{a}=2a^3=\frac{1}{4}$

즉, $a^3 = \frac{1}{8}$, $a = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $50a = 25$

답 25

## 24

[풀이]

조건 (나)에서

$a_2 = -2a_1$

조건 (가)에서 주어진 등식과 연립하면

$a_1 = 1$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = -2a_n (n \geq 1)$

일반항 $a_n$은

$a_n = (-2)^{n-1} (n \geq 1)$

$\therefore$ $a_9 = 256$

답 256

## 25

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 6x^2 - 24x + a$

함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 극값을 가지므로

$f'(1) = -18 + a = 0$, $a = 18$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 4$

$M = f(1) = 4$

$\therefore$ $a + M = 22$

답 22

## 26

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에서

$\begin{pmatrix} x+5y \\ 6x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

주어진 등식에 대입하면

$\begin{pmatrix} 5 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

행렬의 연산의 성질을 적용하면

$\begin{pmatrix} 4 & a-5 \\ a-6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

연립일차방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix} 4 & a-5 \\ a-6 & 2 \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않아야 한다.

$4\times 2-(a-5)(a-6)=0$

정리하면

$a^2-11a+22=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에서 구하는 값은 11이다.

답 11

## 27

[풀이]

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{0}{{}_5\mathrm{C}_2}=0$

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\dfrac{2}{5}$ | $\dfrac{3}{10}$ | $\dfrac{1}{5}$ | $\dfrac{1}{10}$ | 0 | 1 |

$\therefore\ \mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)$

$=10\left(1\times\dfrac{2}{5}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{10}+5\times 0\right)$

$=20$

답 20

## 28

[풀이]

함수 $f(x-a)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} x-a+1 & (x\le a) \\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}a+7 & (x>a) \end{cases}$$

(1) $a>0$인 경우

$f(x)f(x-a)$

$$=\begin{cases} (x+1)(x-a+1) & (x\le 0) \\ \left(-\dfrac{1}{2}x+7\right)(x-a+1) & (0<x\le a) \\ \left(-\dfrac{1}{2}x+7\right)\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}a+7\right) & (x>a) \end{cases}$$

함수의 극한에 대한 성질을 적용하면

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a)$

$\displaystyle=\lim_{x\to a+0}\left(-\dfrac{1}{2}x+7\right)\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}a+7\right)$

$=-\frac{7}{2}a+49$

$f(a)f(a-a)=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)(a-a+1)$

$=-\frac{1}{2}a+7$

$\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$이면

$-\frac{7}{2}a+49=-\frac{1}{2}a+7$ 즉, $a=14$

$a=14$일 때,

$\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a)=0$

$\lim_{x\to a-0} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x\to a+0}\left(-\frac{1}{2}x+7\right)(x-a+1)$

$=-\frac{1}{2}a+7=0$

$f(a)f(a-a)=0$

이므로

$\lim_{x\to a} f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$

즉, $a=14$일 때, 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) $a=0$인 경우

$f(x)f(x-a)$

$=\begin{cases}(x+1)^2 & (x\le 0)\\ \left(-\frac{1}{2}x+7\right)^2 & (x>0)\end{cases}$

함수의 극한에 대한 성질을 적용하면

$\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x\to a+0}\left(-\frac{1}{2}x+7\right)^2$

$=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)^2=49$

$f(a)f(a-a)=(a+1)^2=1$

$\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a)\ne f(a)f(a-a)$

이므로 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이 아니다.

(3) $a<0$인 경우

$f(x)f(x-a)$

$=\begin{cases}(x+1)(x-a+1) & (x\le a)\\ (x+1)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7\right) & (a<x\le 0)\\ \left(-\frac{1}{2}x+7\right)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7\right) & (x>0)\end{cases}$

함수의 극한에 대한 성질을 적용하면

$\lim_{x \to a+0} f(x)f(x-a)$

$= \lim_{x \to a+0} (x+1)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + 7\right)$

$= 7a + 7$

$f(a)f(a-a) = (a+1)(a-a+1)$

$= a + 1$

$\lim_{x \to a+0} f(x)f(x-a) = f(a)f(a-a)$이면

$7a + 7 = a + 1$ 즉, $a = -1$

$a = -1$일 때,

$\lim_{x \to a+0} f(x)f(x-a) = 0$

$\lim_{x \to a-0} f(x)f(x-a)$

$= \lim_{x \to a+0} (x+1)(x-a+1)$

$= a + 1 = 0$

$f(a)f(a-a) = 0$

이므로

$\lim_{x \to a} f(x)f(x-a) = f(a)f(a-a)$

즉, $a = -1$일 때, 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x = a$에서 연속이다.

(1), (2), (3)에서 $a$의 값은 14, $-1$이다.

답 13

## 29

[풀이]

정적분의 정의에서

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right) = \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)$

$= \frac{1}{3} \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3} \int_0^3 (3x^2 - ax)dx$

$= \frac{1}{3} \left[x^3 - \frac{1}{2}ax^2\right]_0^3 = 9 - \frac{3}{2}a = 3 - a = f(1)$

연립일차방정식을 풀면

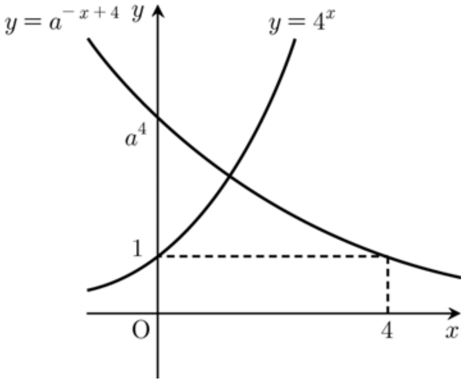
$\therefore \ a = 12$

답 12

## 30

[풀이]

함수 $y = a^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동시키고, $x$축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면 함수 $y = a^{-x+4}(= a^{-(x-4)})$의 그래프와 일치한다.




$a(>1)$의 값에 따라서 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$의 교점의 $x$좌표가 달라진다.

두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$의 교점의 $x$좌표를 $t$라 하고, 문제에서 주어진 부등식의 영역에 속하는 점 중에서 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(a)$라고 하자.

(1) $0<t\le 1$인 경우

곡선 $y=4^x$은 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 4)$를 지나고, 곡선 $y=a^{-x+4}$은 두 점 $(0,\ a^4)$, $(1,\ a^3)$을 지난다.

연립방정식

$1<a^4$, $a^3\le 4$

를 만족시키는 1 보다 큰 자연수 $a$는 없다.

즉, 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$의 교점의 $x$좌표는 1 보다 크다.

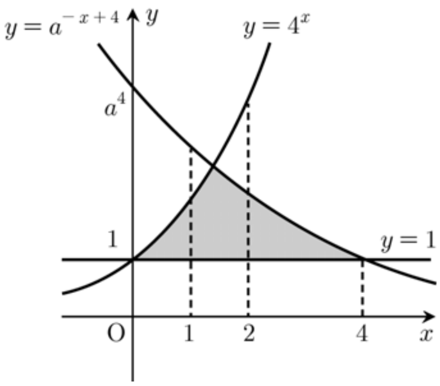
(2) $1<t\le 2$인 경우

곡선 $y=4^x$은 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ 16)$을 지나고, 곡선 $y=a^{-x+4}$은 두 점 $(1,\ a^3)$, $(2,\ a^2)$을 지난다.

연립방정식

$4<a^3$, $a^2\le 16$

를 만족시키는 1 보다 큰 자연수 $a$는 2, 3, 4이다.




$f(a)=1+4+a^2+a+1$ 즉, $f(a)=a^2+a+6$

$f(2)=12$, $f(3)=18$, $f(4)=26$

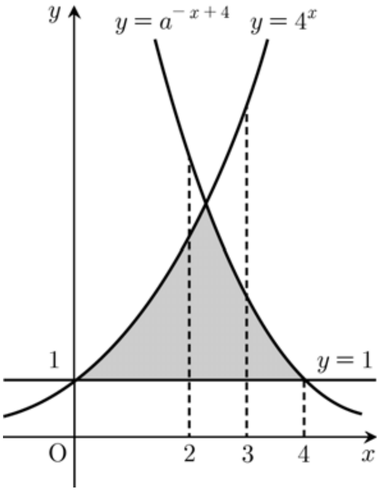
(3) $2<t\le 3$인 경우

곡선 $y=4^x$은 두 점 $(2,\ 16)$, $(3,\ 64)$를 지나고, 곡선 $y=a^{-x+4}$은 두 점 $(2,\ a^2)$, $(3,\ a)$를 지난다.

연립방정식

$16<a^2$, $a\le 64$

를 만족시키는 1 보다 큰 자연수 $a$는 5, 6, 7, ⋯, 64이다.




$f(a)=1+4+16+a+1$ 즉, $f(a)=a+22$

$f(5)=27$, $f(6)=28$, $f(7)=29$, ⋯, $f(18)=40$, $f(19)=41$, ⋯, $f(64)=86$

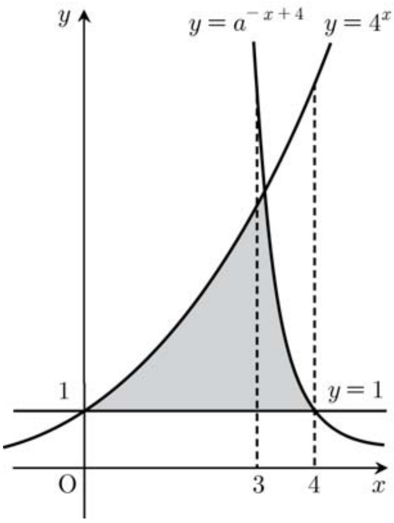
(4) $3<t<4$인 경우

곡선 $y=4^x$은 두 점 $(3,\ 64)$, $(4,\ 256)$을 지나고, 곡선 $y=a^{-x+4}$은 두 점 $(3,\ a)$, $(4,\ 1)$을 지난다.

방정식

$64<a$

를 만족시키는 1 보다 큰 자연수 $a$는 65, 66, 67, ⋯이다.




$f(a)=1+4+16+64+1$ 즉, $f(a)=86$

(1)~(4)에서 $20 \le f(a) \le 40$을 만족시키는 1 보다 큰 자연수 $a$는

∴ $a=4$, 5, 6, ⋯, 18

답 15