

지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00037927032>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/8588>

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex 공통

1. 두 양수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a \sin b \pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{b}$)이

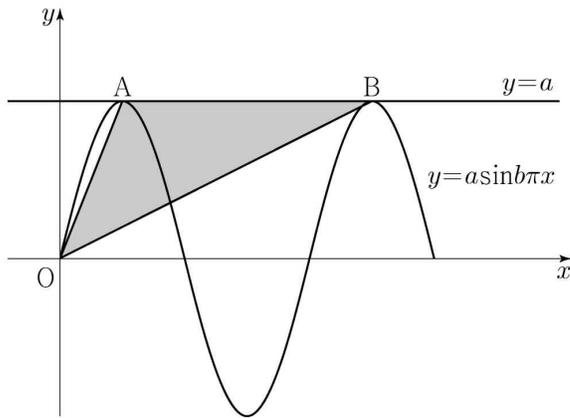
직선 $y = a$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.

삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와

직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

(단, O는 원점이다.) [2022학년도 9월 10]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

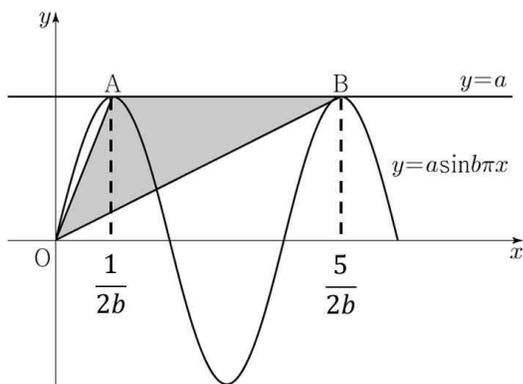


1. 정답 ③ [2022학년도 9월 10]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

a, b 가 양수인데 $y = a \sin b\pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{b}$)이 $y = a$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B입니다. 일단 $y = a$ 는 $y = a \sin b\pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{b}$)의 최댓값이죠? 그림에도 나와 있구요. 이때 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 OA의 기울기와 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 이라네요. $a + b$ 를 구하래요. 천천히 가보면 되겠네요.

일단 함수가 있으니까 관찰부터 해봅시다. 아까 살펴본대로 최댓값은 a 이고 주기는 $\frac{2}{b}$ 인 함수입니다. 그러면



이렇게 되겠죠? 값을 집어 넣으면 되겠어요.

일단 삼각형 OAB의 넓이가 5였잖아요? 밑변은 $\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} = \frac{2}{b}$ 이고 높이는 a 입니다. 따라서

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{2}{b} = \frac{a}{b} = 5 \text{이네요. } a = 5b \text{입니다.}$$

그리고 OA의 기울기와 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 입니다. 그림을 보면 OA의 기울기는 $\frac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$ 이고 OB의

기울기는 $\frac{a}{\frac{5}{2b}} = \frac{2ab}{5}$ 이네요. 곱하면 $\frac{4}{5}a^2b^2 = 20b^4 = \frac{5}{4}$ 입니다. $b^4 = \frac{1}{16}$ 이고 $b^2 = \frac{1}{4}$ 인데 b 는 양수니까

$b = \frac{1}{2}$ 이네요. $a = \frac{5}{2}$ 입니다. $a + b = 3$ 이네요. 답은 ③번입니다.

2. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t)dt$ 일 때, $a + f(3)$ 의 값은?

(단, a 는 상수이다.) [2022학년도 9월 11]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. 정답 ④ [2022학년도 9월 11]

1) 항등식은 수치대입, 계수비교, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt$ 입니다. 일단 이 식은

항등식이예요. 모든 실수 x 에 대하여 양변이 같으니까요. 그렇다는 건 어떤 x 값을 넣어도 양변이 같아야 한다는 거죠. 거기에 좌변은 $xf(x)$ 입니다. 항상 의심을 해야 해요. 왜 하필 $xf(x)$ 일까요? 뭔가 $x=0$ 을 넣어서 양변을

0으로 만들어보고 싶어지지 않나요? $x=0$ 을 넣으면 $0 = 3a + \int_1^0 f(t)dt$ 입니다.

$\int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(t)dt$ 이니까 결국 $\int_0^1 f(t)dt = 3a$ 이네요.

그리고 우변에는 $\int_1^x f(t)dt$ 가 있어요. 이것도 의심을 해보자면 $x=1$ 을 넣어 0으로 만들어보고 싶어지지

않나요? 넣어보면 $f(1) = 4a + 2$ 입니다.

그리고 미분도 해보면 $xf'(x) + f(x) = 6x^2 + 2ax + f(x)$ 이고 $xf'(x) = 6x^2 + 2ax$ 이니까

$f'(x) = 6x + 2a$ 입니다.

이때 $f(1) = \int_0^1 f(t)dt$ 이라네요. 다 나왔네요! $3a = 4a + 2$ 이고 $a = -2$ 입니다. 이제 $a + f(3)$ 를 구해야 해요.

그러면 우리가 구한 $f'(x) = 6x + 2a$ 를 적분해서 구해야겠네요. $f(x) = 3x^2 - 4x + C$ 인데

$f(1) = 4a + 2 = -6$ 이니까 $C = -5$ 이고 $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ 입니다. $f(3) = 10$ 이니까

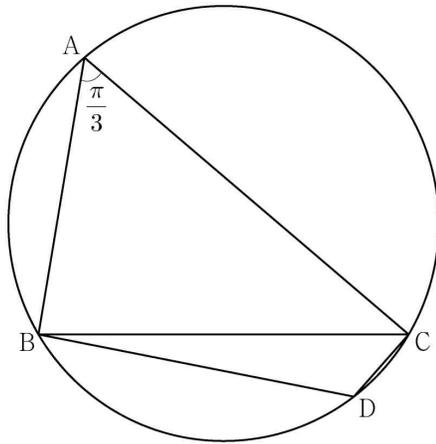
$a + f(3) = -2 + 10 = 8$ 입니다. 답은 ④번이네요.

3. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 인

삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$ 의 값은?

[2022학년도 9월 12]

- ① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



3. 정답 ② [2022학년도 9월 12]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 외부

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC이 있습니다. $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 는 그림에 표시되어 있네요. 이때 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때 $\overline{BD} + \overline{CD}$ 를 구하라네요.

일단 원에 내접하고 있는 걸 보자마자 사인법칙을 사용할 준비는 하고 있어야겠죠? 사인법칙을 사용하면 \overline{BC} 는 구할 수 있겠어요. 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2r = 4\sqrt{7}$ 인데 $\sin A = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이니까 $\overline{BC} = 2\sqrt{21}$ 입니다.

근데 사인법칙을 또다시 사용해서 \overline{BD} 를 구할 수 있네요. 삼각형 BCD 또한 원에 내접하고 있으니까요. 거기에 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 라는 사인값도 줬잖아요. 따라서 $\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2r = 4\sqrt{7}$ 이고 $\overline{BD} = 8$ 입니다.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

이렇게 되면 삼각형 BCD는 결정되었습니다. $\overline{BC} = 2\sqrt{21}$ 와 $\overline{BD} = 8$ 를 알고 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 를 아니까 두 변의 길이와 한 각이 나왔죠. 그러면 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이인 \overline{CD} 를 구할 수 있겠어요.

일단 코사인값부터 구해야겠죠? $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 와 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 를 이용해서 $\cos(\angle BCD)$ 를 구해봅시다. $\cos^2(\angle BCD) = \frac{3}{7}$ 인데 $\angle BCD$ 는 그림에서 예각이므로 $\cos(\angle BCD) = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 입니다.

그러면 코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle BCD) = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{(2\sqrt{21})^2 + \overline{CD}^2 - 8^2}{2 \times 2\sqrt{21} \times \overline{CD}}$ 입니다. $\overline{CD} = k$ 라 하면

$12\overline{CD} = \frac{20 + \overline{CD}^2}{k^2} k^2 - 12k + 20 = (k-2)(k-10) = 0$ 인 거예요. 그림에서 \overline{CD} 는 \overline{BD} 보다 작으므로

$\overline{CD} = 2$ 이네요. 따라서 $\overline{BD} + \overline{CD} = 10$ 입니다. 답은 ②번이네요.

4. 첫째항이 -45 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d 의 값의 합은?
[2022학년도 9월 13]

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$ 인 자연수 m 이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k > -100$ 이다.

- ① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

4. 정답 ② [2022학년도 9월 13]

1) 등차수열 $a_n = a + (n-1)d$ (a 는 첫항, d 는 공차)로 놓기, 조건해석

첫째항이 -45 이고 공차가 d 인 등차수열이 있습니다. 구하라는 게 자연수 d 이니까 d 는 자연수여야 하네요. 그럼 바로 $a_n = -45 + d(n-1)$ (d 는 자연수)라고 할게요.

이때 (가)조건에서 $|a_m| = |a_{m+3}|$ 인 자연수 m 이 존재한답니다. 일단 지금 구조가 -45 부터 시작해서 n 이 증가할수록 점점 a_n 의 값이 증가하는 형태잖아요? 그러면 언젠가는 양수가 되는 지점도 있겠죠. a_m 과 a_{m+3} 이 모두 양수라고 생각해보세요. 무조건 a_m 은 a_{m+3} 보다 작아요. 왜냐면 공차가 자연수라 n 이 증가할수록 a_n 의 값이 커지니까요. a_m 과 a_{m+3} 이 양수라면 $a_m = a_{m+3}$ 은 절대로 성립할 수 없어요. 이 둘이 모두 음수인 경우도 마찬가지죠.

따라서 a_m 은 음수여야 하고 a_{m+3} 은 양수여야 합니다. 따라서 $-a_m = a_{m+3}$ 이어야 하네요. 수를 넣어서 정리해보면 $45 - d(m-1) = -45 + d(m+2)$ 이고 $90 = d(2m+1)$ 입니다. d 는 자연수죠? m 도 자연수이구요. 그러면 자연수×자연수가 90 이 되려면 $1 \times 90, 2 \times 45, 3 \times 30, 5 \times 18, 6 \times 15, 9 \times 10$ 중 하나여야 하겠네요. 그런데 $2m+1$ 은 3 이상의 홀수니까 가능한 경우는 d 와 $2m+1$ 순서대로 $(2, 45), (6, 15), (10, 9), (18, 5), (30, 3)$ 만 가능하네요.

(나)조건에서 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k > -100$ 입니다. 그러니까 $\sum_{k=1}^n a_k$ 이 아무리 작아도 -100 보다는 커야 한다는 거죠?

생각해봅시다. $\sum_{k=1}^n a_k$ 이 가장 작아지는 부분이 어디일까요? 마지막으로 음수가 되고 다음 항은 양수로 바뀌는 부분에서 $\sum_{k=1}^n a_k$ 이 가장 작아질 거예요. 음수를 더하면 가장 작아지는데 양수를 더하면 커지니까요. 그런데 아까 a_m 이 음수이고 a_{m+3} 이 양수라고 했었잖아요? 그러면 최소가 되는 부분은 m 과 $m+2$ 사이에 있겠네요.

여기까지 생각하고 아까 구해놓은 케이스 별로 나눠서 해봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) (2, 45)일 때

$d = 2$ 이고 $m = 22$ 이네요. 근데 이걸 딱 봐도 아닐 것 같지 않나요? 시작이 -45 인데 공차가 2면 a_3 까지만 와도 더하면 벌써 값이 -100 이 넘는데요?

2-2) (6, 15)일 때

$d = 6$, $m = 7$ 입니다. 이것도 뭔가... $a_1 = -45$, $a_2 = -39$, $a_3 = -36$ 를 더하면 -100 이 넘네요.

2-3) (10, 9)일 때

$d = 10$, $m = 4$ 입니다. 이걸 확인해봐야겠네요. $a_1 = -45$, $a_2 = -35$, $a_3 = -25$ 를 더하면 -100 이 넘네요.

2-4) (18, 5)일 때

$d = 18$, $m = 2$ 입니다. 이걸 되겠네요. $a_1 = -45$, $a_2 = -27$, $a_3 = -9$, $a_4 = 9$ 이니까 아무리 작아도 -81 이네요. 이걸 됩니다! $d = 18$ 하나 있네요.

2-5) (30, 3)일 때

$d = 30$, $m = 1$ 입니다. $a_1 = -45$, $a_2 = -15$, $a_3 = 15$ 이니까 아무리 작아도 -60 이죠. 되네요. $d = 30$ 도 됩니다.

따라서 모든 자연수 d 의 합은 $18 + 30 = 48$ 입니다. 답은 ②번이네요.

5. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 p 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \leq 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
[2022학년도 9월 14]

<보 기>

- ㄱ. $p=1$ 일 때, $g'(1)=0$
 ㄴ. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p 의 개수는 1이다.
 ㄷ. $p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^1 g(x)dx \geq 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 정답 ⑤ [2022학년도 9월 14]

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 p 가 있는데

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \leq 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases} \quad \text{라고 합니다. 일단 형태부터 관찰해볼까요?}$$

최고차항의 계수가 1로 양수인 삼차함수가 $f'(0)=f'(2)=0$ 이니까 $x=0$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소입니다.

그런데 $x \leq 0$ 에서 $g(x)=f(x)-f(0)$ 이잖아요? $x=0$ 에서 극대였던 함수를 $-f(0)$ 만큼 움직이니까 $x=0$ 에서 접하는 그래프겠네요.

$x > 0$ 에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$ 도 관찰해봅시다. 이거는 일단 $f(x)$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동한 함수네요. 이때 p 는 양수니까 무조건 왼쪽으로 움직여야 합니다. 그런데 이건 특이하게 $-f(-p)$ 만큼 움직인 게 아니라 $f(p)$ 만큼 움직인 함수예요. 그리고 $x=0$ 을 넣으면 $f(p)-f(p)=0$ 이 되니까 결국 해석해보면 $f(x)$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동한 후 원점을 지나도록 움직인 함수네요. 거기에 $g(x)$ 는 연속이구요.

ㄱ에서 $p=1$ 일 때 $g'(1)=0$ 이냐고 물어보네요. $p=1$ 이면 $x > 0$ 에서 $g(x)=f(x+1)-f(1)$ 이고 미분하면 $g'(x)=f'(x+1)$ 입니다. $g'(1)=f'(2)$ 인데 아까 $f'(2)=0$ 이라고 했었죠? 맞네요. ㄱ은 맞습니다.

2) 미분가능은 연속 확인 + 미분계수 확인

ㄴ에서 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p 의 개수는 1냐고 묻고 있어요. 일단 $x < 0$ 과 $x > 0$ 에서는 $g(x)$ 가 다항함수니까 무조건 미분가능합니다. 그 말은 $x=0$ 에서 미분가능한지만 확인해보면 된다는 거죠.

먼저 $x=0$ 에서 좌미분계수는 0입니다. $f(x)-f(0)$ 인데 $f'(0)=0$ 이니까요. 미분가능하기 위해서는 우미분계수도 0이어야 합니다. $g(x)=f(x+p)-f(p)$ 를 미분하면 $g'(x)=f'(x+p)$ 인데 우미분계수는 $g'(0)=f'(p)$ 이네요. 이게 0이어야 합니다.

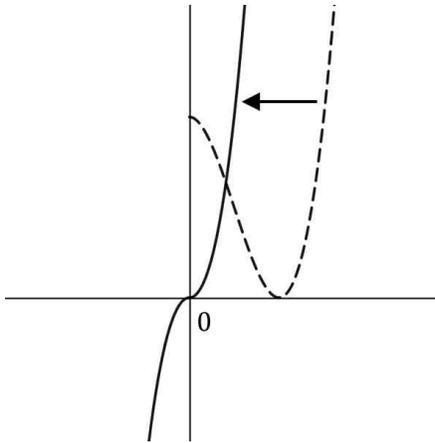
그런데 여러분 생각해 보세요. $f'(0)=f'(2)=0$ 입니다. 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수인 $f'(x)$ 는 이차함수예요. $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 2개를 넘을 수 없어요. 그 말은 $g'(0)=f'(p)=0$ 이 되기 위해서는 $p=0$ 혹은 $p=2$ 여야 한다는 거죠. 그런데 $p > 0$ 이니까 $p=2$ 입니다. 1개 맞네요. ㄴ은 맞습니다.

그래프로 해석할 수도 있어요. 제가 아까 $g(x)=f(x+p)-f(p)$ 는 $f(x)$ 의 그래프를 왼쪽으로 평행이동시킨

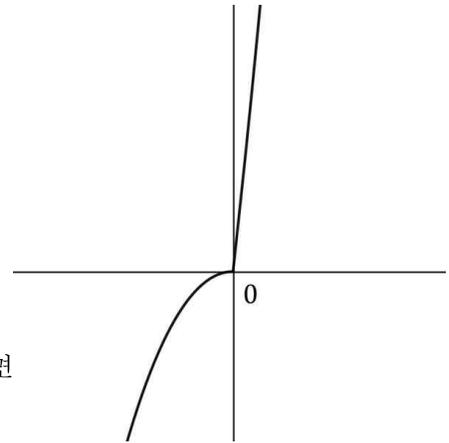
그래프라고 했습니다.(물론 $-f(p)$ 때문에 위아래로 움직일 수는 있어요.) $f(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서만 미분계수가 0이에요. $f(x)$ 를 왼쪽으로 움직여서 $x=0$ 에서 미분계수가 0이 되도록 하기 위해서는 $x=2$ 를 $x=0$ 쪽으로 옮겨와야 하죠. 따라서 2만큼 움직여야 하니까 $p=2$ 입니다.

3) ㄱㄴㄷ 유기성

ㄷ에서 $p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^1 g(x)dx \geq 0$ 이냐고 묻네요. 방금 $p=2$ 에 대하여 확인했었죠? $g(x)$ 가 미분가능하도록 하는 유일한 양수예요. 그러니까 $p=2$ 일 때를 그래프를 대충 그려보면

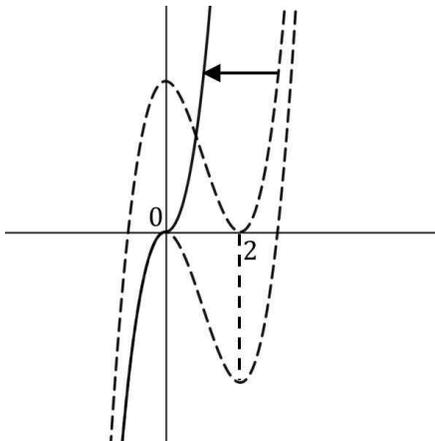


이렇게 될 텐데 만약 $p > 2$ 가 되면



이렇게 되겠네요.

잘 생각해 보세요. $p=2$ 일 때 원점을 기준으로 $g(x)$ 의 좌우는 완벽한 점 대칭이에요. 왜냐하면 $x \leq 0$ 에서는 $x \leq 0$ 부분의 $f(x)$ 를 잘라서 넣고 $x > 0$ 에서는 $x > 2$ 부분의 $f(x)$ 를 잘라서 넣었는데 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소일 때 $x=1$ 에서 변곡점을 가지잖아요. $(1, f(1))$ 에 대하여 대칭이 되니까 $x < 0$ 부분과 $x > 2$ 부분은 점 대칭이죠. 그걸 이어붙이면 당연히 이어붙인 점에 대하여 대칭입니다. 그림으로 살펴보면



이렇게 되는 거죠. 점 대칭인 함수를 $-k$ 부터 k 까지 적분하면 값은

0입니다. $\int_{-k}^k g(x)dx=0$ 인 거죠. 따라서 $\int_{-1}^1 g(x)dx=0$ 입니다.

그런데 $p > 2$ 일 때는 그래프가 더 왼쪽으로 평행이동되죠. 그림에서도 나와 있듯이 기울기가 더욱 가팔라져요.

그러면 $\int_0^1 g(x)dx$ 의 값이 $\int_{-1}^0 g(x)dx$ 값보다 더욱 커지겠죠? $p = 2$ 일 때 $\int_{-1}^0 g(x)dx = -\int_0^1 g(x)dx$ 이었는데

$p > 2$ 가 되면서 $\int_{-1}^0 g(x)dx$ 는 그대로인데 $\int_0^1 g(x)dx$ 의 값이 더 커지니까요. 양수 부분이 더 커지니까 더한

값은 당연히 0보다 크거나 같겠네요. ㄷ은 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

6. 수열 $\{a_n\}$ 은 $|a_1| \leq 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$ 이고 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [2022학년도 9월 15]

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

6. 정답 ① [2022학년도 9월 15]

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

$$|a_1| \leq 1, \text{ 즉 } -1 \leq a_1 \leq 1 \text{이고 모든 자연수 } n \text{에 대하여 } a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases} \text{입니다.}$$

숫자 넣을 준비를 해야겠죠?

그리고는 $a_5 + a_6 = 0$ 이고 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하합니다.

일단 단계가 3개가 있네요. a_5 를 저 식에 넣으면 a_6 이 나오죠. a_5 는 어느 곳에 속할까요? 그에 따라서 a_6 의 값이 달라지겠네요. 그리고 $a_5 + a_6 = 0$ 에 넣으면 각각의 값이 나올 거구요.

2) 케이스분류

2-1) $-1 \leq a_5 < -\frac{1}{2}$ 일 때

그러면 $a_6 = -2a_5 - 2$ 입니다. 이걸 $a_5 + a_6 = 0$ 에 넣으면 $a_5 - 2a_5 - 2 = 0$ 이고 $a_5 = -2$ 입니다. 범위에 맞지 않는데요?

2-2) $-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2}$ 일 때

그러면 $a_6 = 2a_5$ 입니다. $a_5 + a_6 = 0$ 에 넣으면 $a_5 = 0$ 이네요. 되네요!

2-3) $\frac{1}{2} < a_5 \leq 1$ 일 때

이러면 $a_6 = -2a_5 + 2$ 입니다. $a_5 + a_6 = 0$ 에 넣으면 $a_5 - 2a_5 + 2 = 0$ 이고 $a_5 = 2$ 입니다. 이것도 범위에 맞지 않네요. 따라서 $a_5 = 0$ 입니다.

그 이후에는 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 가 되도록 만들어야겠죠? 그러면 거꾸로 가야겠어요.

$$\text{저 위의 식에 } n=4 \text{를 넣으면 } a_5=0 = \begin{cases} -2a_4-2 & \left(-1 \leq a_4 < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_4 & \left(-\frac{1}{2} \leq a_4 \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_4+2 & \left(\frac{1}{2} < a_4 \leq 1\right) \end{cases} \text{가 나옵니다. 이러면 케이스가 또}$$

나뉘죠. 3개 각각의 경우에 대하여 $a_4 = -1$, $a_4 = 0$, $a_4 = 1$ 이 가능하네요. 그리고 여기에 대하여 각각 또 가능하니까..... 경우가 엄청 많네요.

근데 생각 한 번만 해볼게요. 만약 $a_4 = -1$ 이라면 $a_3 = -\frac{1}{2}$ 만 가능합니다. 그러면 $a_2 = -\frac{3}{4}$ 이거나

$a_2 = -\frac{1}{4}$ 이구요. $a_2 = -\frac{3}{4}$ 이라면 $a_1 = -\frac{5}{8}$ 이거나 $a_1 = -\frac{3}{8}$ 이고 $a_2 = -\frac{1}{4}$ 이라면 $a_1 = -\frac{7}{8}$ 이거나

$a_1 = -\frac{1}{8}$ 입니다. 모두 더하면 무조건 음수가 되죠? $a_4 = -1$ 일 수는 없어요.

그러면 $a_4 = 0$ 이거나 $a_4 = 1$ 이예요. 그런데 $a_4 = 0$ 이면 또다시 $a_3 = -1$, $a_3 = 0$, $a_3 = 1$ 일텐데 $a_3 = -1$ 은 안 되겠죠? 양상이 $a_4 = -1$ 일 때와 같을 테니까요. 이걸 케이스를 나눠볼게요.

3) 케이스분류

3-1) $a_4 = 0$ 일 때

3-1-1) $a_3 = 0$ 일 때

이것도 또다시 $a_2 = -1$, $a_2 = 0$, $a_2 = 1$ 로 나뉩니다. 아까와 마찬가지로 이유로 $a_2 = -1$ 은 안 됩니다.

3-1-1-1) $a_2 = 0$ 일 때

$a_1 = -1$, $a_1 = 0$, $a_1 = 1$ 이렇게 가능한데 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 이라면 무조건 $a_1 = 1$ 이어야 하네요. $-1 \leq a_1 \leq 1$ 이고

$\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 도 맞습니다. $a_1 = 1$ 은 되네요.

3-1-1-2) $a_2 = 1$ 일 때

$a_1 = \frac{1}{2}$ 이네요. $-1 \leq a_1 \leq 1$ 에도 맞구요. $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 도 맞습니다.

3-1-2) $a_3 = 1$ 일 때

$a_2 = \frac{1}{2}$ 입니다. 이러면 $a_1 = \frac{1}{4}$ 이거나 $a_1 = \frac{3}{4}$ 인데 둘 다 $-1 \leq a_1 \leq 1$ 이고 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 맞죠? 둘 다 됩니다.

3-2) $a_4 = 1$ 일 때

$a_3 = \frac{1}{2}$ 입니다. 이러면 $a_2 = \frac{1}{4}$ 이거나 $a_2 = \frac{3}{4}$ 이네요. 이걸 둘 다 케이스를 나눠야겠어요.

3-2-1) $a_2 = \frac{1}{4}$ 일 때

$a_1 = \frac{1}{8}$ 이거나 $a_1 = \frac{7}{8}$ 입니다. 둘 다 $-1 \leq a_1 \leq 1$ 이고 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 이네요.

3-2-2) $a_2 = \frac{3}{4}$ 일 때

$a_1 = \frac{3}{8}$ 이거나 $a_1 = \frac{5}{8}$ 입니다. 둘 다 조건을 만족합니다!

따라서 모든 a_1 의 값의 합은 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2}$ 입니다. 답은 ①번이네요.

7. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10x$ 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$f(x) + |f(x) + x| = 6x + k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오. [2022학년도 9월 20]

7. 정답 21 [2022학년도 9월 20]

1) 절댓값 풀기, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

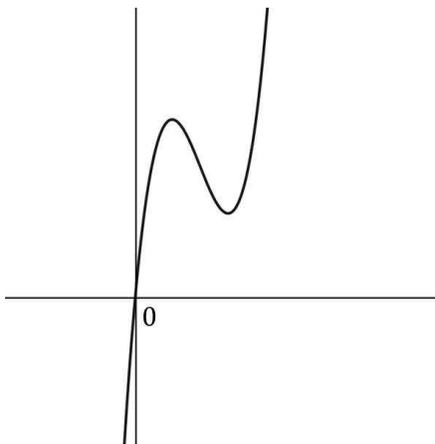
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10x$ 가 있는데 $f(x) + |f(x) + x| = 6x + k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 정수 k 의 값의 합을 구합니다.

일단 식에 절댓값이 있으니까 풀어봅시다. $f(x) + x \geq 0$ 이라면 $2f(x) = 5x + k$ 이고 $f(x) + x < 0$ 이라면 $-x = 6x + k$ 인데 이걸 $x = -\frac{k}{7}$ 이라는 실근이 하나 있네요. 그러면 나머지 3개는 $f(x) + x \geq 0$ 인 경우에서 살펴보면 되겠어요.

일단 $f(x) + x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 11x$ 입니다. 관찰부터 해볼게요. 인수분해부터 해보면 $\frac{x}{2}(x^2 - 9x + 22)$ 인데 $x^2 - 9x + 22$ 는 편하게는 안 되네요. 혹시 모르니까 판별식을 써봅시다. $9^2 - 88 = -7$ 로 0보다 작네요. 아예 근을 갖지 않네요.

대충 그래프를 그려볼까요? 미분하면 $\frac{3}{2}x^2 - 9x + 11 = \frac{1}{2}(3x^2 - 18x + 22)$ 인데 근의 공식을 사용하면

$$\frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 66}}{3} = \frac{9 \pm \sqrt{15}}{3} \text{입니다. 대충 그려보면}$$



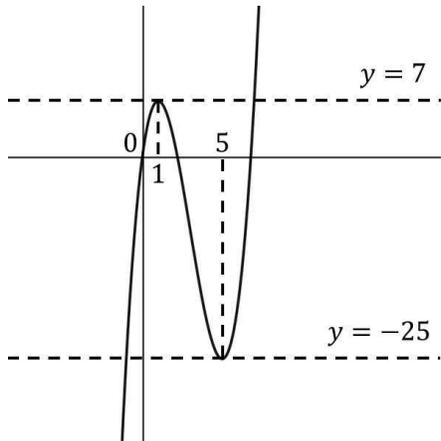
이렇게 되네요. $f(x) + x \geq 0$ 가 되는 부분은 $x \geq 0$ 입니다. 어쨌든

$x \geq 0$ 에서 $2f(x) = 5x + k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되면 되는 거예요.

2) 미지수 넘기기, 정수 보이면 숫자 넣기

일단 미지수만 오른쪽에 두고 다 왼쪽으로 넘겨서 정리해봅시다. $x^3 - 9x^2 + 15x = k$ 입니다. 이게 3개의 실근을 가져야 한다는 건 다르게 말하면 $y = x^3 - 9x^2 + 15x$ 와 $y = k$ 가 3개의 점에서 만나야 한다는 거죠. 그래프 그려서 확인해봅시다. $x^3 - 9x^2 + 15x = x(x^2 - 9x + 15)$ 인데 편하게 되지는 않네요. 미분하면

$3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-1)(x-5)$ 이니까 $x=1$ 에서 극대, $x=5$ 에서 극소입니다. 극댓값은 7이고 극솟값은 -25 입니다. 그래프를 그려보면



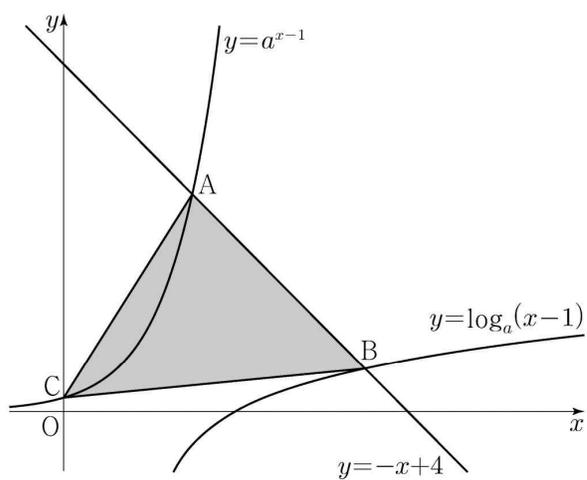
이렇게 됩니다. $x \geq 0$ 에서 $y = k$ 와 3개의 점에서 만나는데 k 가 0부터

6까지 가능하네요. 다만 $k=0$ 이라면 아까 $x = -\frac{k}{7}$ 랑 하나가 겹치지 않나요? 그러면 실근의 개수가 3개가 돼요. 따라서 1부터 6까지 가능하고 다 더하면 21입니다.

8. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 직선 $y = -x + 4$ 가 두 곡선

$$y = a^{x-1}, \quad y = \log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y = a^{x-1}$ 이 y 축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S 이다. $50 \times S$ 의 값을 구하시오. [2022학년도 9월 21]



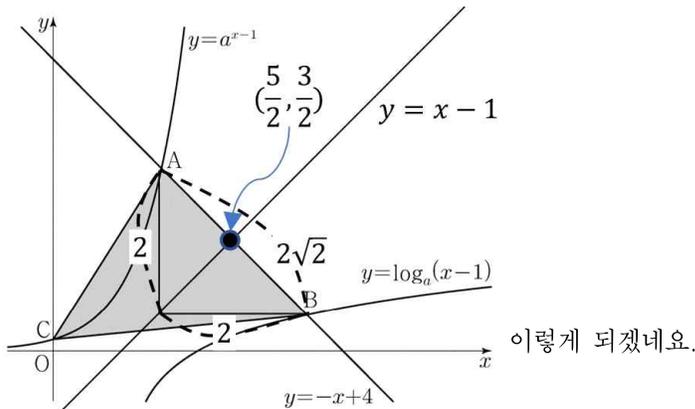
8. 정답 192 [2022학년도 9월 21]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

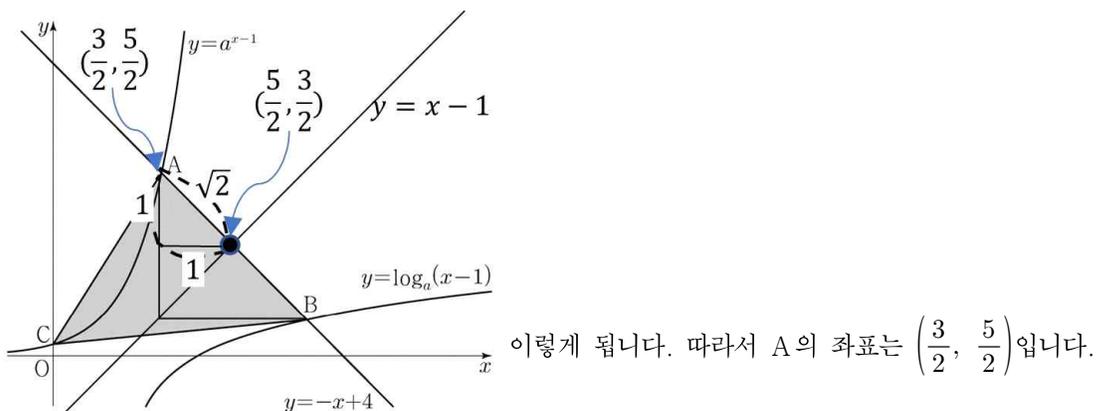
$a > 1$ 인데 $y = -x + 4$ 가 $y = a^{x-1}$, $y = \log_a(x-1)$ 과 만나는 점을 각각 A, B라고 한답니다. 그림에 표시되어 있죠?

이거 함수를 보면 대칭 관계라는 걸 확인할 수 있네요. $y = a^x$ 와 $y = \log_a x$ 는 서로 $y = x$ 축 대칭 관계잖아요? 그런데 이 두 함수 모두 x 자리에 $x-1$ 이 들어가 있으니깐 $y = a^{x-1}$, $y = \log_a(x-1)$ 는 $y = x-1$ 축 대칭이죠. 그러면 $y = x-1$ 과 $y = -x+4$ 가 만나는 점은 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 겠네요.

거기에 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 랍니다. 지금 $y = -x+4$ 의 기울기는 -1 이잖아요? 그러면



그런데 여기서 A, B 역시 $y = x-1$ 축에 대하여 대칭이니까 $y = x-1$, $y = -x+4$ 가 만나는 점과 A와의 거리는 $y = x-1$, $y = -x+4$ 가 만나는 점과 B와의 거리와 같죠. $\sqrt{2}$ 입니다. 그럼 이것도 마찬가지로



$y = a^{x-1}$ 이 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 를 지나니까 $a^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$ 이고 $a = \frac{25}{4}$ 이네요.

이제 삼각형 ABC의 넓이를 구해야 해요. 이거는 밑변을 \overline{AB} 를 고정시킨 후에 기울기가 1이고 점 C를 지나는 직선이 $y = -x + 4$ 와 만나는 점과 C와의 거리를 높이로 해서 구하면 되겠죠?

일단 C의 좌표는 $y = \left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$ 가 y 축과 만나는 점이니까 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$ 입니다. 기울기가 1이고 점 C를 지나는

직선은 $y = x + \frac{4}{25}$ 이구요. $y = -x + 4$ 와 만나는 점은 $\left(\frac{48}{25}, \frac{52}{25}\right)$ 입니다. $\left(\frac{48}{25}, \frac{52}{25}\right)$ 과 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$ 의 거리는

$\frac{48\sqrt{2}}{25}$ 이죠. 아까 기울기가 1일 때는 x 값(혹은 y 값)의 차이에 $\sqrt{2}$ 를 곱했잖아요. 따라서

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} = \frac{96}{25} = S \text{입니다. } 50S = 192 \text{이네요.}$$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오.

[2022학년도 9월 22]

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$ 은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 를
갖고 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7$ 이다.

9. 정답 108 [2022학년도 9월 22]

1) 문제해석

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 있는데 $g(x) = f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$ 랍니다.

어후;: 뭔가 숨이 턱 막히네요. 천천히 해석을 해봅시다.

일단 $g(x)$ 라는 함수가 있는데 $f(x-3)$ 라는 $f(x)$ 를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 함수와

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$ 라는 함수를 곱한 함수예요. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$ 를 해석해야겠죠?

일단 $F(x) = |f(x)|$ 라는 함수가 있다고 해봅시다. 그러면 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{h}$ 이죠? 자주 나오는

패턴이에요. $F(x)$ 를 더하고 빼면 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x) - (F(x-h) - F(x))}{h}$ 입니다. 분리하면

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x-h) - F(x)}{h}$ 이네요. 왼쪽에 있는 식은 $F'(x+)$ 입니다. $F(x) = |f(x)|$ 의

x 보다 큰 부분에서의 미분계수이죠. 오른쪽에 있는 식은 변형이 필요하겠어요. $h = -t$ 라고 할게요. 그러면

$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(x+t) - F(x)}{-t} = -F'(x-)$ 입니다. 이거는 $F(x) = |f(x)|$ 의 x 보다 작은 부분에서의 미분계수입니다.

결국 $g(x) = f(x-3) \times (F'(x+) + F'(x-))$ 이네요. 이런 요상한 함수가 있어요.

2) 조건해석, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 절댓값 함수

(가)조건에서 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이랍니다. 아까 우리가 파악한 함수를 보세요.

$g(x) = f(x-3) \times (F'(x+) + F'(x-))$ 인데 $F(x) = |f(x)|$ 는 $f(x)$ 에 절댓값을 씌운 형태예요. $F'(x+)$ 는 $F(x) = |f(x)|$ 의 x 보다 큰 부분에서의 미분계수였고, $F'(x-)$ 는 $F(x) = |f(x)|$ 의 x 보다 작은 부분에서의 미분계수였구요.

일반적인 다항함수라면 x 보다 큰 부분에서의 미분계수와 x 보다 작은 부분에서의 미분계수가 일치하지 않나요? 매끄럽게 이어지니까요. 그런데 아까 말했듯이 $F(x) = |f(x)|$ 는 $f(x)$ 에 절댓값을 씌운 형태예요. 두 개가 일치하지 않는 경우가 발생하죠. x 축과 접하지 않고 만나면 꺾이면서 미분불가능이 되잖아요. 그 경우만 왼쪽과 오른쪽의 미분계수의 부호가 정확히 반대가 됩니다.

그 말은 결국 $F(x) = |f(x)|$ 의 함숫값이 0이 아니라면 무조건 $F'(x+) = F'(x-) = k$ 가 되어

$g(x) = 2kf(x-3)$ 가 된다는 거예요. 또한 $f'(x) = 0$ 이라면 그 또한 $F'(x+) = F'(x-) = k = 0$ 가 되어

$g(x) = 2kf(x-3) = 0$ 이 됩니다.

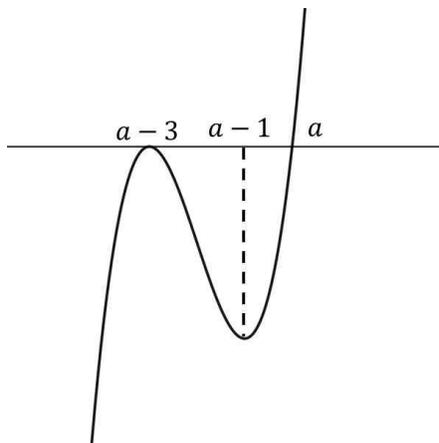
그 이외의 경우, 즉 $F(x) = |f(x)|$ 의 함숫값이 0이지만 $f(x) = 0$ 이지만 $f'(x) \neq 0$ 인 경우, 즉 x 축에 접하지는 않는 경우에는 미분계수의 부호가 반대가 됩니다. $F'(x+) + F'(x-) = 0$ 이고 $g(x) = 0$ 이 됩니다.

그러면 $g(x)$ 가 바뀌는 경계는 $f(x)$ 의 함숫값이 0이지만 x 축에 접하지는 않는 부분과 $f'(x) = 0$ 인 부분이네요. 그 때는 $g(x) = 0$ 이 되고, 그 이외의 경우에는 $g(x) = 2kf(x-3)$ 이 되니까요. 이게 값이 같아야 해요. 따라서 $f(x) = 0, f'(x) \neq 0$ 일 때는 $2kf(x-3) = 0$, 즉 $f(x-3) = 0$ 이어야 합니다.

이제 최고차항의 계수가 양수이고 삼차함수인 $f(x)$ 의 그래프를 생각해 보세요. $f(x)$ 가 x 축과 단 한 번만 만날 때는 $f(x) = 0, f(x-3) = 0$ 을 동시에 만족시킬 수 없죠?

$f(x)$ 가 x 축과 세 번 만날 때는 x 축과 만나는 모든 x 가 $f(x) = 0, f'(x) \neq 0$ 를 만족시킵니다. 그래프 생각해 보세요. x 축과 만나지만 접하진 않고 그냥 뚫고 지나가잖아요. 3개의 실근 모두가요. 그런데 x 축과 만나는 가장 작은 x 값에 대하여는 $f(x) = 0, f(x-3) = 0$ 가 성립할 수 없습니다. 예를 들어 가장 작은 값이 a 이면 $f(a) = 0$ 인데 어떻게 $f(a-3) = 0$ 가 되어서 가장 작은 값이 $a-3$ 가 됩니까.

따라서 $f(x)$ 의 그래프는 한 점에서는 그냥 x 축과 만나고 한 점에서는 접하는 그래프가 되어야 합니다. 물론 두 점의 x 값의 차이는 3이어야겠죠? 그리고 그냥 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 a 라 하면 접하는 점에서의 x 좌표는 $a-3$ 이 되어야 합니다.



이렇게 말이죠.

(나)조건에서 $g(x) = 0$ 의 네 실근의 합은 7이 되어야 한답니다. 일단 $g(x) = 0$ 이 되려면 어떻게 해야 하나요? 두 경우로 나눠서 생각해봅시다. $f(x)$ 의 함숫값이 0이지만 x 축에 접하지는 않는다면 $g(x) = 0$ 입니다. 이건 그냥 되네요. 위의 그림에서 $x = a$ 가 가능하죠? 일단 하나 나왔어요. 또한 $f'(x) = 0$ 이어도 $g(x) = 0$ 이죠?

그림에서 $a-3$, $a-1$ 이 있네요.

그리고 그 이외의 경우에는 $g(x)=2kf(x-3)$ 입니다. 이게 0이려면 $k=0$ 이거나 $f(x-3)=0$ 이어야 합니다. $k=0$ 은 곧 $f'(x)=0$ 이라는 거잖아요? 아까 했네요. 그리고 $f(x-3)=0$ 이려면 $x=a$, $a+3$ 이어야 하죠. 그런데 $x=a$ 는 아까 경우랑 겹치니까 빼면 $a-3$, $a-1$, a , $a+3$ 으로 총 4개네요. 모두 더하면 $4a-1$ 인데 이게 7이니까 $a=2$ 입니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

그림을 보면 $x=a-3=-1$ 에서 x 축과 접하고 $x=2$ 에서 그냥 만나네요. 인수정리에 의하여

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$ 입니다. $f(5)=108$ 이네요.

아드레날린 ex
확통

10. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수는? [2022학년도 9월 확통 28]

- (가) $f(3) + f(4)$ 는 5의 배수이다.
(나) $f(1) < f(3)$ 이고 $f(2) < f(3)$ 이다.
(다) $f(4) < f(5)$ 이고 $f(4) < f(6)$ 이다.

- ① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

10. 정답 ④ [2022학년도 9월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 인데 $f: X \rightarrow X$ 를 구합니다. (가)조건에서 $f(3)+f(4)$ 가 5의 배수이고, (나)조건에서 $f(1) < f(3)$ 이고 $f(2) < f(3)$ 이며 (다)조건에서 $f(4) < f(5)$ 이고 $f(4) < f(6)$ 이어야 합니다. 이 모든 조건을 충족시켜야 해요.

(가)조건의 $f(3)$ 이 (나)조건에 있구요, (가)조건의 $f(4)$ 이 (다)조건에 있습니다. 애네 둘을 기준으로 분류를 해야겠죠?

일단 $f(3)+f(4)$ 가 5의 배수려면 $f(3)+f(4)=5$ 이거나 $f(3)+f(4)=10$ 이어야 합니다. 각각 나눠서 생각해 보면 되겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $f(3)+f(4)=5$ 일 때

$f(3)+f(4)=5$ 이라면 가능한 경우는 $f(3), f(4)$ 순서대로 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)이 가능합니다. 그런데 (1, 4)는 불가능합니다. $f(1) < f(3)$ 이고 $f(2) < f(3)$ 이어야 하는데 $f(3)=1$ 이면 이것보다 작은 수는 없잖아요.

(2, 3)이면 $f(3)=2, f(4)=3$ 입니다. $f(1), f(2) < 2$ 이어야 하므로 $f(1)=f(2)=1$ 이네요. 또한 $3 < f(5), f(6)$ 이므로 $f(5), f(6)$ 은 4, 5, 6 중에 하나 선택하면 됩니다. 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 이네요.

(3, 2)이면 $f(3)=3, f(4)=2$ 입니다. $f(1), f(2) < 3$ 이어야 하므로 $f(1), f(2)$ 은 1, 2 중에서 선택하면 됩니다. $2 \times 2 = 4$ 이구요, $2 < f(5), f(6)$ 이므로 $f(5), f(6)$ 은 3, 4, 5, 6 중에서 하나 선택하면 됩니다. $4 \times 4 = 16$ 이네요. 총 $4 \times 16 = 64$ 입니다.

(4, 1)이면 $f(3)=4, f(4)=1$ 입니다. $f(1), f(2) < 4$ 이니 $f(1), f(2)$ 은 1, 2, 3 중에서 선택하면 되구요, $1 < f(5), f(6)$ 이므로 $f(5), f(6)$ 은 2, 3, 4, 5, 6 중에서 하나 선택하면 됩니다. 총 $3 \times 3 \times 5 \times 5 = 225$ 이네요.

2-2) $f(3)+f(4)=10$ 일 때

이러면 (4, 6), (5, 5), (6, 4)이 가능합니다. 그런데 (4, 6)은 불가능하죠. $6 < f(5), f(6)$ 인데 6보다 큰 수는 없잖아요.

(5, 5)이면 $f(3)=5$, $f(4)=5$ 입니다. $f(1), f(2)<5$ 이므로 $f(1), f(2)$ 은 1, 2, 3, 4 중에서 하나, $5 < f(5), f(6)$ 이므로 $f(5)=f(6)=6$ 입니다. 총 $4 \times 4 = 16$ 이네요.

(6, 4)이면 $f(3)=6$, $f(4)=4$ 입니다. $f(1), f(2)<6$ 이므로 $f(1), f(2)$ 은 1, 2, 3, 4, 5 중에서 하나, $4 < f(5), f(6)$ 이므로 $f(5), f(6)$ 는 5, 6 중에서 하나 고르면 됩니다. 총 $5 \times 5 \times 2 \times 2 = 100$ 이네요.

따라서 총 $9 + 64 + 225 + 16 + 100 = 414$ 입니다. 답은 ④번이네요.

11. 두 이산확률변수 X, Y 의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$P(Y=y)$	$a + \frac{1}{20}$	b	$c - \frac{1}{10}$	b	$a + \frac{1}{20}$	1

$V(X) = \frac{31}{5}$ 일 때, $10 \times V(Y)$ 의 값의 구하시오.

[2022학년도 9월 확통 29]

11. 정답 78 [2022학년도 9월 확통 29]

1) 확률의 총합은 1이다

표가 있네요. 일단 확률의 총합은 1이니까 $2a + 2b + c = 1$ 입니다.

그리고 형태를 잘 보세요. $X = 5$ 를 기준으로 좌우가 대칭이죠? 이럴 때 평균은 5가 됩니다. 수식으로 해보면 $E(X) = a + 3b + 5c + 7b + 9a = 10a + 10b + 5c = 5(2a + 2b + c) = 5$ 이네요.

그리고 Y 가 있어요. 이것도 확률의 총합은 1이니까 $2a + 2b + c = 1$ 입니다. 애도 마찬가지로 $Y = 5$ 를 기준으로 좌우가 대칭이네요? 마찬가지로 평균은 5입니다.

$$a + \frac{1}{20} + 3b + 5\left(c - \frac{1}{10}\right) + 7b + 9\left(a + \frac{1}{20}\right) = 10a + 10b + 5c = 5(2a + 2b + c) = 5 \text{이죠.}$$

이때 $V(X) = \frac{31}{5}$ 이라네요. $E(X^2) - E(X)^2$ 으로 구해도 되고, $\sum (X - m)^2 \times P(X)$ 로 구해도 될 것 같아요.

$E(X^2) - E(X)^2$ 로 구해보면

$$E(X^2) = a + 9b + 25c + 49b + 81a = 82a + 58b + 25c = 32a + 8b + 25(2a + 2b + c) = 32a + 8b + 25 \text{입니다.}$$

$$E(X) = 5 \text{였으니까 } V(X) = 32a + 8b = \frac{31}{5} \text{입니다.}$$

이제 $V(Y)$ 을 구해봅시다. 마찬가지로 구해보면 되겠죠? $E(Y^2) - E(Y)^2$ 로 같게요.

$$E(Y^2) = a + \frac{1}{20} + 9b + 25c - \frac{25}{10} + 49b + 81a + \frac{81}{20} = 82a + 58b + 25c + \frac{8}{5} \text{입니다. 여기서 아까}$$

$$82a + 58b + 25c = 32a + 8b + 25(2a + 2b + c) = 32a + 8b + 25 \text{인데 } V(X) = 32a + 8b = \frac{31}{5} \text{이었으니까}$$

$$25 + \frac{39}{5} \text{이네요. } E(Y)^2 = 25 \text{이므로 } V(Y) = \frac{39}{5} \text{입니다. } 10V(Y) = 78 \text{이네요.}$$

12. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를
다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
[2022학년도 9월 확통 30]

- | |
|---|
| <p>(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.</p> |
|---|

12. 정답 218 [2022학년도 9월 확통 30]

1) 조건해석, 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

학생 A, B, C, D이 있는데 같은 종류의 사인펜 14개를 남김없이 나누어준답니다. 다른 상자에 같은 공을 넣는 경우죠?

(가)조건에서 각 학생은 적어도 1개의 사인펜은 받아야 한다고 하네요. 자연수 조건이에요.

(나)조건에서 각 학생이 받는 사인펜은 9개 이하라고 합니다. 그러니까 1개 이상 9개 이하네요.

(다)조건에서 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다고 합니다. 이거는... 여사건으로 가는 게 맞겠죠?

그러면 (가)조건과 (나)조건은 기본으로 깔아서 전체 경우의 수로 설정하고 (가), (나)조건은 만족시키면서 (다)조건을 만족시키지 않는 경우를 빼면 되겠어요.

일단 전체 경우의 수부터 구해봅시다. 일단 모두 1개 이상 받는 경우에서 한 명이 10개 이상 받는 경우를 빼면 되겠죠? 모두 1개 이상 받는 경우는 사실상 $a+b+c+d=10$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)와 같아요.

선택종류 4개 선택횟수 10번해서 ${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = \frac{13 \times 12 \times 11}{6} = 286$ 입니다.

한 명이 10개 이상 받는 경우를 해보죠. 먼저 받는 사람을 설정합니다. 4명 중 1명을 고르면 되니까 4이네요.

이러면 사실상 $a+b+c+d=1$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)인 경우와 같습니다. 따라서

${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$ 입니다. 총 $4 \times 4 = 16$ 이네요. 전체 경우의 수는 $286 - 16 = 270$ 입니다.

이제 (다)조건을 만족시키지 않는 경우를 구해봅시다.

(다)조건을 만족시키지 않는다는 건 모든 학생이 홀수 개의 사인펜을 갖는다는 거죠. 그러면

$a = 2a' + 1, b = 2b' + 1, c = 2c' + 1, d = 2d' + 1$ (a', b', c', d' 는 음이 아닌 정수)이라고 할 수 있어요.

$a+b+c+d=14$ 에 넣으면 $a'+b'+c'+d'=5$ 입니다. 선택종류 4개에 선택횟수 5번으로

${}_4H_5 = {}_8C_5 = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$ 입니다. 그런데 여기서 문제가 있죠. 홀수는 11까지 가능합니다. 3명의 학생이

1개씩 받으면 남는 건 11이니깐요. 이걸 빼줘야 합니다. 4명 중에서 받을 사람만 정하면 되니까 경우의 수는 4네요. 따라서 $56 - 4 = 52$ 입니다.

이걸 전체 경우의 수에서 빼주면 $270 - 52 = 218$ 이네요.

