정답 및 해설

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답
1	④	12	③	23	④	23	②	23	②
2	⑤	13	⑤	24	②	24	②	24	⑤
3	①	14	③	25	③	25	④	25	①
4	①	15	②	26	③	26	③	26	②
5	③	16	2	27	①	27	④	27	③
6	④	17	11	28	⑤	28	①	28	③
7	②	18	4	29	48	29	17	29	80
8	④	19	6	30	47	30	11	30	48
9	⑤	20	8						
10	②	21	24						
11	②	22	61						

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의고사

해설 작성 : *YoonSol*(윤재원)
검토자 : Evolved Slave II

본 해설지에 관한 모든 문의는 yoonsol229@gmail.com 으로 연락해주시기 바랍니다.

공통과목

1 ④

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = 4$

2 ⑤

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f(x) = x^3 - x^2 + C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(1) = 1 = 1^3 - 1^2 + C = C$

$\therefore\ f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$

3 ①

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$이다.

$\tan\theta = \frac{12}{5} \to \cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

$\therefore\ \sin\theta + \cos\theta = -\frac{12}{13} + \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{17}{13}$

4 ①

$\lim_{x\to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = 0$

$\therefore\ \lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x) = -2 + 0 = -2$

5 ③

$g(x) = (x^2+3)f(x)$

$g'(x) = 2xf(x) + (x^2+3)f'(x)$

$\therefore\ g'(1) = 2\times1\times f(1) + (1^2+3)\times f'(1) = 4 + 4 = 8$

6 ④

곡선 $y = 3x^2 - x$와 $y = 5x$가 만나는 점의 x좌표는 각각 0과 2이다.

$\therefore$ 곡선 $y = 3x^2 - x$와 직선 $y = 5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^2 |(3x^2 - x) - (5x)|dx = \int_0^2 (6x - 3x^2)dx = [3x^2 - x^3]_0^2 = 4$이다.

7 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$S_3 - S_2 = a_3 = 2 + 2d$

$a_6 = 2 + 5d$

$a_6 = 2(S_3 - S_2) \to 2 + 5d = 2(2 + 2d)$

$\therefore\ d = 2$

$\therefore\ a_n = 2n$

$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$

8 ④

함수 $f(x)$는 $x > a$, $x < a$에선 연속이므로

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x \to a-} \{f(x)\}^2 = \lim\limits_{x \to a+} \{f(x)\}^2$이며

$\lim\limits_{x \to a} \{f(x)\}^2 = \{f(a)\}^2$이어야 한다.

$(6-2a)^2 = (2a-a)^2$

$4a^2 - 24a + 36 = a^2$

$a^2 - 8a + 12 = 0$

$a = 2,\ a = 6$

$\therefore$ 모든 상수 a의 값의 합은 $2+6=8$이다.

9 ⑤

$a_{12} = \dfrac{1}{a_{11}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow a_{11} = 2$

$a_{11} = 8a_{10} = 2 \quad \rightarrow a_{10} = \dfrac{1}{4}$

$a_{10} = \dfrac{1}{a_9} = \dfrac{1}{4} \quad \rightarrow a_9 = 4$

$a_9 = 8a_8 = 4 \qquad \rightarrow a_8 = \dfrac{1}{2}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$$\therefore\ a_n = \begin{cases} 4 & (n = 4k-3) \\ \dfrac{1}{4} & (n = 4k-2) \\ 2 & (n = 4k-3) \\ \dfrac{1}{2} & (n = 4k) \end{cases}$$

$a_1 = 4,\ a_4 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a_1 + a_4 = 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{4}$

10 ②

$y = \log_n x$와 $y = -\log_n(x+3)+1$의 교점의 x좌표를 t라고 하면

$\log_n t = -\log_n(t+3)+1$

$\log_n t(t+3) = 1$

$t(t+3) = n$

$t^2 + 3t - n = 0$

$1 < t < 2 \rightarrow (1^2 + 3\times1 - n)(2^2 + 3\times2 - n) < 0$

$4 < n < 10$

$n = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

$\therefore$ 모든 n의 값의 합은 $5+6+7+8+9 = 35$

11 ②

$g(x+2) = g(x)$이므로

$$\int_{-3}^{2} g(x)dx = \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{2} g(x)dx$$

$$= 3\int_{-1}^{0} g(x)dx + 2\int_{0}^{1} g(x)dx$$

$$\int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0} \{-f(x+1)+1\}dx = 1 - \int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{5}{6}$$

$$\int_{0}^{1} g(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \int_{-3}^{2} g(x)dx = 3\int_{-1}^{0} g(x)dx + 2\int_{0}^{1} g(x)dx$$

$$= 3\times\frac{5}{6} + 2\times\frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

12 ③

$\angle\mathrm{BAC} = \theta$라 하자.

$\cos\theta = \dfrac{1}{8} \rightarrow \sin\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AB}}\times\cos\theta = 4\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}} = 1 \rightarrow \overline{\mathrm{CD}} = 5-1 = 4$

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BDA} \rightarrow$ 삼각형 BAD는 $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BD}}$인 이등변 삼각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AB}} = 4$

$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta = \overline{\mathrm{BC}}^2$

$4^2 + 5^2 - 2\times4\times5\times\dfrac{1}{8} = 36$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}} = 6$

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 BCD는 $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}}$인 이등변 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{CH}} = 3$이다.

$\overline{\mathrm{DH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{BD}}^2 - \overline{\mathrm{BH}}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{DE}}} = \sin\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{7}}{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}} = \dfrac{8}{3}$

{별해}

위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 6$을 구하는 과정까지는 동일하게 진행됩니다.

$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{DEC} = \pi - \theta$, $\angle\mathrm{DCE}$ 공통이므로 삼각형 BDC와 삼각형 DEC는 AA 닮음이다.

$\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DE}} : \overline{\mathrm{CD}} \rightarrow 4 : 6 = \overline{\mathrm{DE}} : 4$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{8}{3}$

13 ⑤

$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$, $f(x+1)=f(x)$이므로

자연수 n에 대하여 $f(\sqrt{n})$은 자연수 k에 대하여 다음과 같다.

$f(\sqrt{n})=\begin{cases} 1 & (n=k^2) \\ 3 & (n\neq k^2) \end{cases}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{20}\dfrac{k\times f(k)}{3}=\sum_{k=1}^{20}k-(1+4+9+16)+\dfrac{1}{3}(1+4+9+16)$

$=\dfrac{20\times 21}{2}-20=210-20=190$

14 ③

$f(x)=x^3-3x^2-9x-12$, $f'(x)=3x^2-6x-9=2(x+1)(x-3)$

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-9\times(-1)-12=-7$

$f(3)=3^3-3\times 3^2-9\times 3-12=-39$

(가) 조건을 해석하면 함수 $g(x)$의 식은

$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x\geq 0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$ 가 된다.

해석의 편의를 위해서 $h(x)=|f(x-p)+q|$라고 하자.

함수 $h(x)$는 함수 $f(x)$는 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동 시킨 함수에 절댓값을 씌운 함수입니다.

$g(x)=\begin{cases} h(x) & (x\geq 0) \\ -h(x) & (x<0) \end{cases}$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $h(0)=0$이다.

만약 $h'(0)\neq 0$일 경우 (해당 케이스에선 엄밀하겐 $h'(x)$가 $x=0$에서 정의되지 않지만 서술의 편의를 위해 다음과 같이 작성하였습니다.)

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{h(0+h)-h(0)}{h}=-\lim_{h\to 0-}\dfrac{h(0+h)-h(0)}{h}$ 이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분 가능합니다.

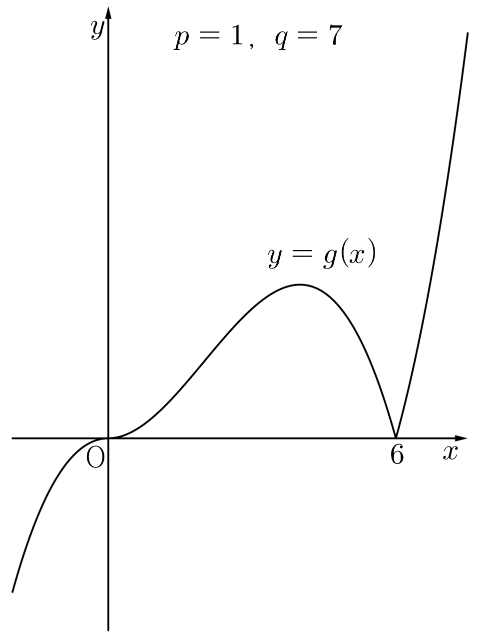
또한 $h'(0)=0$일 경우 $g'(0)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분 가능합니다.

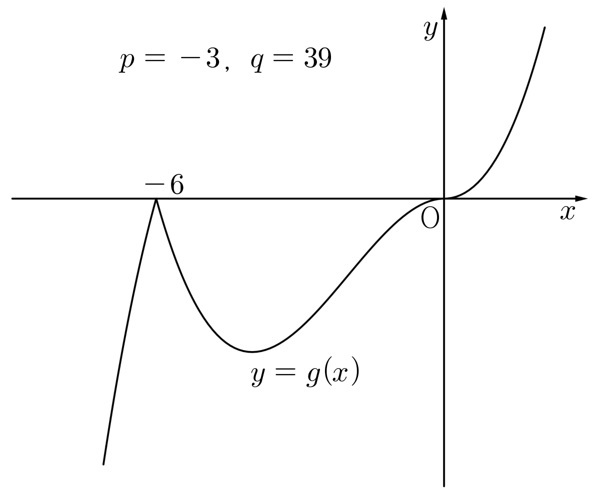
즉 함수 $g(x)$가 한 점에서 미분가능하지 않으려면 함수 $h(x)$가 $h'(0)=0$이고 $x=0$이 아닌 한 점에서 미분가능하지 않아야 합니다.

그러기 위해선 점 $(-1+p,\ -7+q)$가 원점이 되거나 점 $(3+p,\ -39+q)$가 원점이 되어야합니다.

p, q가 양수이므로 $p=1$, $q=7$이다.

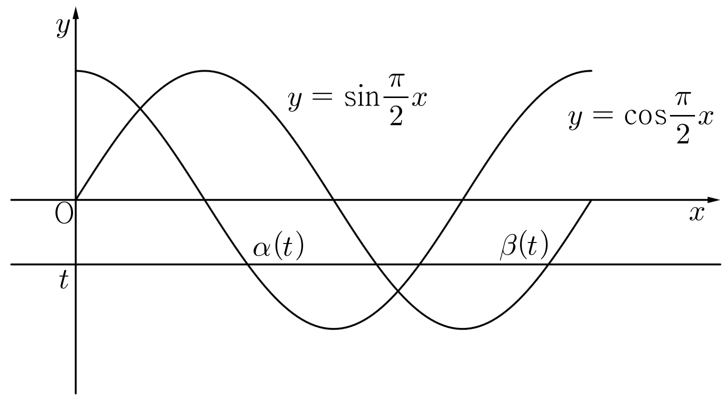
$\therefore\ p+q=1+7=8$





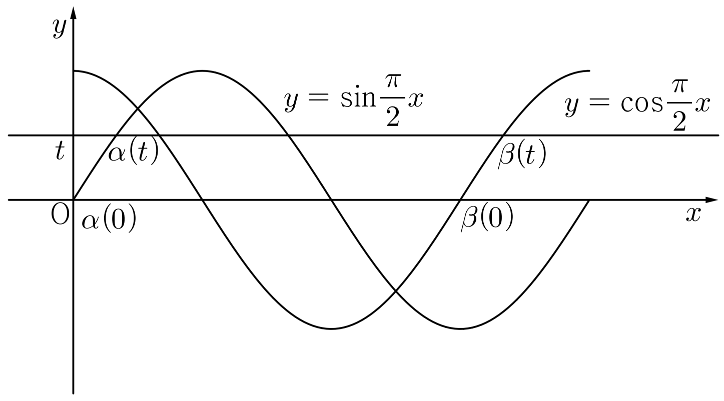
15 ②

$\alpha(t)$는 $\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-t\right)=0$의 실근 중 가장 작은 값이고 $\beta(t)$는 $\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-t\right)=0$의 실근 중 가장 큰 값이다.



$-1\leq t<0$인 실수 t에서는 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$가 $x=\dfrac{5}{2}$에 대하여 대칭인 상태이다. 따라서 $-1\leq t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

$\therefore$ ㄱ (참)



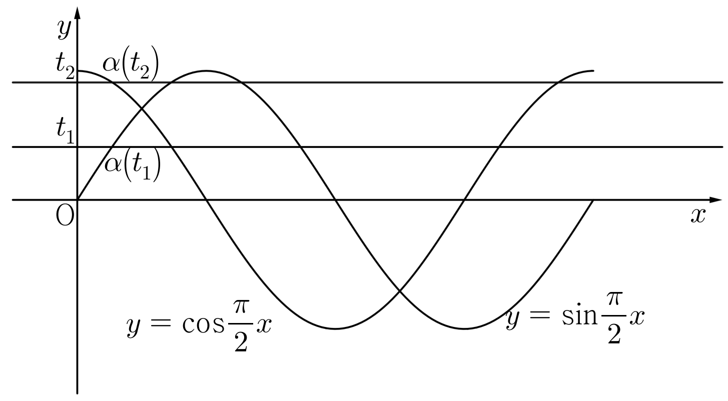
$\alpha(0)=0$, $\beta(0)=3 \to \beta(0)-\alpha(0)=3$

$-1 \le t < 0$: $\beta(t)-\alpha(t) < 3$

$0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\beta(t)-\alpha(t)=3$

$\frac{\sqrt{2}}{2} < t \le 1$: $\beta(t)-\alpha(t) > 3$

∴ ㄴ (참)



$\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이려면 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$라 하면

$t_1=\sin k$, $t_2=\cos k$ 혹은 $t_1=\cos k$, $t_2=\sin k$이다.

∴ $t_1^2+t_2^2=1$

문제 조건에 의하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이므로

$(t_2-t_1)^2=t_1^2+t_2^2-2t_1\times t_2=\frac{1}{4}$

$t_1\times t_2=\frac{3}{8}$

∴ ㄷ (거짓)

따라서 ㄱ, ㄴ이 옳은 선지이다.

16 2

$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24=\log_4\left(\frac{2}{3}\times 24\right)=\log_4 16=2$

17 11

$f(x)=x^3-3x+12$, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소를 가지므로 $a=1$이다.

$f(a)=f(1)=1^3-3\times1+12=10$

∴ $a+f(a)=1+10=11$

18 4

$a_7=\frac{1}{3}a_5=a_5\times r^2$

$r^2=\frac{1}{3}$

∴ $a_6=a_2\times r^4=36\times\frac{1}{9}=4$

19 6

$v(t)=3t^2-4t+k$

점 P 의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하자.

$x(t)=t^3-2t^2+kt+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$x(0)=0=C \to x(t)=t^3-2t^2+kt$

$x(1)=-3=1^3-2\times1^2+k\times1=k-1$

$k=-2 \to x(t)=t^3-2t^2-2t$

$x(3)=3^3-2\times3^2-2\times3=3$

∴ 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치 변화량은 $|x(3)-x(1)|=|3-(-3)|=6$이다.

20 8

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$

$f(3)=57$, $f(5)=53$

$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$=f(x)\times\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$g'(x)=f'(x)\times\int_a^x\{f(t)\}^4dt$

$\{f(x)\}^4\ge 0$ 이므로 $\int_a^x\{f(t)\}^4dt$는 $x=a$에서만 부호의 변화를 가진다.

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지기 위해선 $g'(x)$가 오직 한 점에서만 부호의 변화가 일어나야 한다.

$f'(x)$는 $x=3$과 $x=5$에서 부호의 변화가 일어나므로 함수 $g'(x)$가 오직 한 점에서만 부호의 변화가 일어나려면 $a=3$이거나 $a=5$이어야 한다.

∴ 모든 a의 값의 합은 $3+5=8$이다.

21 24

x에 대한 방정식 $(x^n-64)=0$은 n이 홀수일 경우 하나의 실근을 갖고 n이 짝수일 경우 두 개의 서로 다른 실근을 갖는다. 따라서 x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이려면 n의 짝수이고 $f(x)=0$의 두 실근과 $x^n-64=0$의 두 실근이 일치해야 한다.

i) $n=2$인 경우

$f(x)=x^2-64$, $f(x)$의 최솟값은 -64로 음의 정수이다.

ii) $n=4$인 경우

$f(x)=x^2-16$, $f(x)$의 최솟값은 -16으로 음의 정수이다.

iii) $n=6$인 경우

$f(x)=x^2-4$, $f(x)$의 최솟값은 -4로 음의 정수이다.

iv) $n=12$인 경우

$f(x)=x^2-2$, $f(x)$의 최솟값은 -2로 음의 정수이다.

∴ n의 값의 합은 $2+4+6+12=24$이다.

22 61

(가) 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 식은 다음과 같다.

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(k\neq 0,\ \alpha\neq\beta)$

(나) 조건에 의하여 방정식 $x-f(x)=\alpha,\ x-f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수의 합은 3이다.

$f(x)-(x-\alpha)=(x-\alpha)\{k(x-\alpha)(x-\beta)-1\}=0$

$f(x)-(x-\beta)=(x-\beta)\{k(x-\alpha)^2-1\}=0$

방정식 $x-f(x)=\alpha,\ x-f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수의 합은 3이려면 $k(x-\alpha)(x-\beta)-1=0,\ k(x-\alpha)^2-1=0$이 α, β이외의 실근을 단 하나만 가져야 한다.

k가 양수일 경우 방정식 $k(x-\alpha)(x-\beta)-1=0$은 α, β가 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 모순이다.

k가 음수일 경우 $k(x-\alpha)^2-1<0$이므로 방정식 $k(x-\alpha)^2-1=0$은 실근을 가지지 않는다.
즉 $k(x-\alpha)(x-\beta)-1=0$이 중근을 가져야 한다.
$k(x-\alpha)(x-\beta)-1=0$이 중근을 가지려면 함수 $y=k(x-\alpha)(x-\beta)$의 최솟값이 1이어야 하므로
$k\left\{\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right\}=-k\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=1$이 성립한다.

$f(1)=4\ \rightarrow\ k(1-\alpha)^2(1-\beta)=4$

$f'(1)=1\ \rightarrow\ k(1-\alpha)(3-\alpha-2\beta)=1$

$-k\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=1,\ k(1-\alpha)^2(1-\beta)=4,\ k(1-\alpha)(3-\alpha-2\beta)=1$

위 세 식을 연립하면 해가

① : $\alpha=-3,\ \beta=5,\ k=-\frac{1}{16}$

② : $\alpha=-\frac{31}{5},\ \beta=37,\ k=-\frac{25}{11664}$

로 나온다.

따라서 함수 $f(x)$의 식은 $f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$ ⋯ ①

혹은 $f(x)=-\frac{25}{11664}\left(x+\frac{31}{5}\right)^2(x-37)$ ⋯ ② 이다.

②의 경우 $f'(0)=\frac{3503}{3888}$으로 $f'(0)>1$이라는 조건에 위배되지만 ①의 경우 $f'(0)=\frac{21}{16}$으로 $f'(0)>1$이라는 조건을 만족합니다.

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=\frac{45}{16}\ \rightarrow\ p=16,\ q=45$

$\therefore\ p+q=16+45=61$

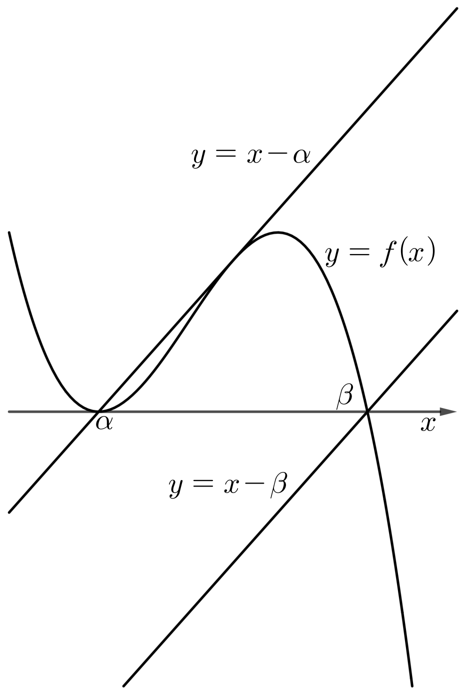
~~그냥 그래프 그려서 푸세요... 저 방정식 푸는거 너무 빡셉니다...~~

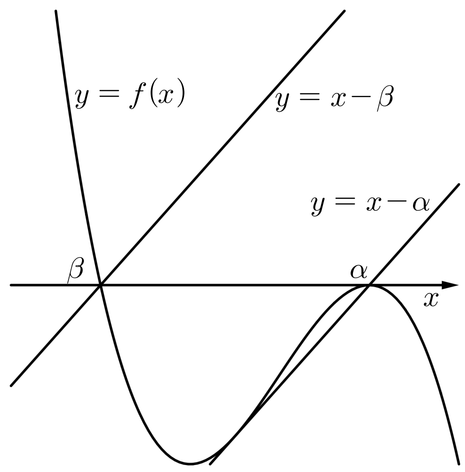
[그래프 활용 풀이]

(가) 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 식은 다음과 같다.

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(k\neq 0,\ \alpha\neq\beta)$

(나) 조건에 의하여 방정식 $x-f(x)=\alpha,\ x-f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수의 합은 3이다.
$x-f(x)=\alpha,\ x-f(x)=\beta$ 이 두 식을 조금 변형하면 방정식 $f(x)=x-\alpha,\ f(x)=x-\beta$의 서로 다른 실근의 개수의 합이 3이 되는 함수 $f(x)$를 찾으면 된다.
k가 양수일 경우 방정식 $f(x)=x-\alpha,\ f(x)=x-\beta$의 서로 다른 실근의 개수의 합은 적어도 5라서 k는 음수이다.





위 두 그래프 중에서 아래의 그래프는 $f'(1)=1$, $f(1)=4$조건을 만족시킬 수 없으므로 첫 번째 그래프의 상황이 맞는 상황입니다.

$f(x)-(x-\alpha)=k(x-\alpha)(x-1)^2$

$f(1)-(1-\alpha)=0,\ f(1)=4\ \rightarrow\ \alpha=-3$

$f(x)=(x+3)\{k(x-1)^2+1\}$

방정식 $k(x-1)^2+1=0$이 $x=-3$을 근으로 가져야 하므로

$16k+1=0\ \rightarrow\ k=-\frac{1}{16}$

$\therefore\ f(x)=(x-3)\left\{-\frac{1}{16}(x-1)^2+1\right\}$

$f(0)=3\times\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{45}{16}$ −〉 $p=16,\ q=45$

$\therefore\ p+q=16+45=61$

확률과 통계

확률과 통계 23 ④

$_5C_3(2x)^3\times1^2=80x^3$

확률과 통계 24 ②

학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 1학년인 사건을 A, 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생인 사건을 B라 하자.

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$

확률과 통계 25 ③

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수는 총 5^4개다.
이러한 자연수들 중에서 3500보다 큰 자연수는 총 $1\times1\times5^2+2\times5^3=11\times5^2$개다.

따라서 문제에서 구하고자하는 확률은 $\frac{11\times5^2}{5^4}=\frac{11}{25}$이다.

확률과 통계 26 ③

세명의 학생을 각각 A, B, C라고 하고
학생 A가 받은 빨간색 카드, 파란색 카드, 노란색 카드의 장수를 각각 R_A, B_A, Y_A
학생 B가 받은 빨간색 카드, 파란색 카드, 노란색 카드의 장수를 각각 R_B, B_B, Y_B
학생 C가 받은 빨간색 카드, 파란색 카드, 노란색 카드의 장수를 각각 R_C, B_C, Y_C라고 하자.

$R_A+R_B+R_C=4$, $B_A+B_B+B_C=2$, $Y_A+Y_B+Y_C=1$

노란색 카드는 1장밖에 없으므로 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있으려면 노란색 카드를 받은 학생은 빨간색 카드와 파란색 카드도 한 장 이상씩 받아야한다.

Cases 1) 학생 A가 노란색 카드를 받는 경우

$R_A\ge1$, $B_A\ge1$, $Y_A=1$

$R_B\ge0$, $B_B\ge0$, $Y_B=0$

$R_C\ge0$, $B_C\ge0$, $Y_C=0$

$R_A+R_B+R_C=4\ \rightarrow\ {}_3H_3={}_5C_3=10$

$B_A+B_B+B_C=2\ \rightarrow\ {}_3H_1={}_3C_1=3$

$Y_A+Y_B+Y_C=1\ \rightarrow\ 1$

$\therefore\ 10\times3\times1=30$

학생 A가 노란색 카드를 받는 경우와 학생 B가 노란색 카드를 받는 경우, 학생 C가 노란색 카드를 받는 경우의 경우의 수는 모두 같으므로 문제에서 구해야 하는 값은 $3\times30=90$이다.

확률과 통계 27 ①

앞면이 나온 동전의 개수가 1개 : ${}_4C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{36}$

앞면이 나온 동전의 개수가 2개 : ${}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{2}{36}$

앞면이 나온 동전의 개수가 3개 : ${}_4C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{2}{36}$

앞면이 나온 동전의 개수가 4개 : ${}_4C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{36}$

$\therefore\ \frac{4+12+8+3}{2^4\times36}=\frac{27}{9\times64}=\frac{3}{64}$

확률과 통계 28 ⑤

얻은 네 접수의 합이 4가 되는 경우는
3점, 1점, 0점, 0점을 얻거나
2점, 2점, 0점, 0점을 얻거나
2점, 1점, 1점, 0점을 얻거나
1점, 1점, 1점, 1점을 얻으면 된다.

$\therefore\ \frac{4!}{2!}\times3^2+\frac{4!}{2!\times2!}\times3^2+\frac{4!}{2!}\times3+\frac{4!}{4!}=108+54+36+1=199$

확률과 통계 29 48

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수 : $5!=120$
3과 4가 이웃하는 경우의 수 : $2\times4!=48$
2와 6이 이웃하는 경우의 수 : $2\times4!=48$
3과 4가 이웃하고 2와 6이 이웃하는 경우의 수 :
$2\times(2\times1\times2!+2\times2\times2!)=24$
$\therefore\ 120-(48+48-24)=48$

확률과 통계 30 47

5개의 수의 곱이 6의 배수이려면 2와 3이 각각 한 개 이상씩 나와야 한다.

2가 하나도 안나오는 경우 : $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

3이 하나도 안나오는 경우 : $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

2와 3이 하나도 안나오는 경우 : $\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$\therefore\ 1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}=1-\frac{63}{3^5}=\frac{20}{27}$

$p=27$, $q=20$

$\therefore\ p+q=27+20=47$

미적분

미적분 23 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}=2$$

미적분 24 ②

$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{\cos 0}{e^0-\sin 0}=1$$

미적분 25 ④

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선은 y축에 대하여 대칭이다.
원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$의 제 1사분면 위의 점 $(t,\ e^{|t|})$에 그은 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라고 하자.

$\tan\alpha=e^t=\frac{e^t}{t}\ \rightarrow\ t=1$, $\tan\alpha=e$

$\alpha>\frac{\pi}{4}$이므로 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각 θ는 $\theta=\pi-2\alpha$이다.

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2e}{e^2-1}$

미적분 26 ③

부채꼴 $O_1A_1B_1$은 반지름이 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴이므로 $S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$이다.
선분 O_1A_1과 O_2A_2는 서로 평행하므로

$\angle O_2A_2O_1=\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$이다.

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}\ \rightarrow\ \overline{O_2A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

부채꼴 $O_2A_2B_2$은 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴이다.

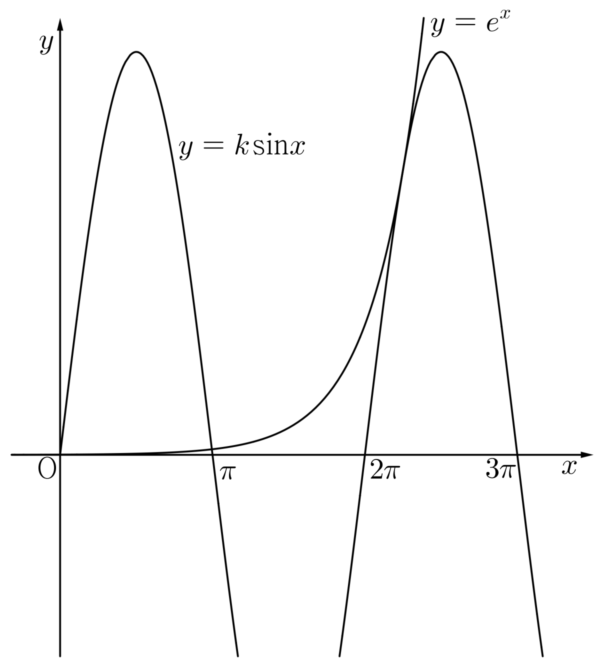
(닮음비)^2 = 넓이비, $S_2-S_1=S_1\times\frac{1}{2}$

$\therefore$ 초항이 $\frac{\pi}{8}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한 등비급수가 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 같으므로

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$

미적분 27 ④

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이 되려면 두 함수는 다음과 같이 만나야합니다.



함수 $y=k\sin x$와 $y=e^x$가 접하는 점의 x좌표를 α라고 하자.

$f(\alpha)=g(\alpha)$, $f'(\alpha)=g'(\alpha)\ \rightarrow\ e^\alpha=k\sin\alpha$, $e^\alpha=k\cos\alpha$

$2\pi<\alpha<3\pi$이므로 $\alpha=\frac{9}{4}\pi$이다.

$e^{\frac{9}{4}\pi}=k\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

미적분 28 ①

$\overline{OA}=\overline{OP}=1$, $\angle OAP=\angle OPA=\theta$, $\angle AOP=\pi-2\theta$

$\therefore\ f(\theta)=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\angle POB=2\theta\ \rightarrow\ \overline{OQ}=\sec 2\theta$, $\overline{OP}=1\ \rightarrow\ \overline{PQ}=\sec 2\theta-1$

$\angle OQB=\frac{\pi}{2}-2\theta\ \rightarrow\ \angle PQR=\frac{\pi}{4}-\theta$

$\angle QPR=\theta$, $\angle PQR=\frac{\pi}{4}-\theta\ \rightarrow\ \angle PRQ=\frac{3}{4}\pi$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{PR}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$이다.

$$\overline{PR}=\overline{PQ}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\frac{3}{4}\pi}$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\frac{3}{4}\pi}\times(\sec 2\theta-1)^2\times\sin\theta$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\frac{3}{4}\pi}\times(\sec 2\theta-1)^2\times\sin\theta}{\theta^4\times\frac{1}{2}\sin 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(\sin^2 2\theta)^2\times\sin\theta}{\theta^4\times\sin 2\theta\times(\cos^2 2\theta+\cos 2\theta)^2}$$

$$=\frac{16}{8}=2$$

미적분 29 17

$f'(x)=\dfrac{2t\ln x}{x}-2x$

$f'(g(t))=\dfrac{2t\ln g(t)}{g(t)}-2g(t)=0$

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$

위 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln g(\alpha)=\{g(\alpha)\}^2 \ \rightarrow\ 2\alpha=e^4$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{e^4}{2}$

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\ln g(t)+t\times\dfrac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)g'(t)$

위 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$\ln g(\alpha)+\alpha\times\dfrac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2g(\alpha)g'(\alpha)$

$2+\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{g'(\alpha)}{e^2}=2e^2\times g'(\alpha)$

$g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$

$\therefore\ \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{e^4}{2}\times\left(\dfrac{4}{3e^2}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$p=9,\ q=8$

$\therefore\ p+q=9+8=17$

미적분 30 11

곡선 $y=\ln\left(1+e^{2x}-e^{-2t}\right)$와 $y=x+t$는 $x=-t$인 점에서 만난다.

곡선 $y=\ln\left(1+e^{2x}-e^{-2t}\right)$와 $y=x+t$가 만나는 점 중 x좌표가 $-t$가 아닌 점의 x좌표를 $g(t)$라 하자.

$t>\dfrac{1}{2}\ln 2$이므로 $g(t)>-t$이다.

$\therefore\ f(t)=\sqrt{2}\{g(t)+t\}$

$g(t)+t=\ln\left(1+e^{2g(t)}-e^{-2t}\right)$

위의 식에 $t=\ln 2$를 대입하면

$g(\ln 2)+\ln 2=\ln\left(1+e^{2g(\ln 2)}-\dfrac{1}{4}\right)$

$2\times e^{g(\ln 2)}=e^{2g(\ln 2)}+\dfrac{3}{4}$

$g(\ln 2)=\ln\dfrac{1}{2}$ or $g(\ln 2)=\ln\dfrac{3}{2}$

$g(\ln 2)=\ln\dfrac{1}{2}$일 경우 $g(t)>-t$에 위배되므로

$g(\ln 2)=\ln\dfrac{3}{2}$이다.

$g(t)+t=\ln\left(1+e^{2g(t)}-e^{-2t}\right)$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)+1=\dfrac{e^{2g(t)}\times 2g'(t)+2e^{-2t}}{1+e^{2g(t)}-e^{-2t}}$

위의 식에 $t=\ln 2$를 대입하면

$g'(\ln 2)+1=\dfrac{e^{2g(\ln 2)}\times 2g'(\ln 2)+\dfrac{1}{2}}{e^{2g(\ln 2)}+\dfrac{3}{4}}$

$g'(\ln 2)+1=\dfrac{\dfrac{9}{2}g'(\ln 2)+\dfrac{1}{2}}{3}$

$\therefore\ g'(\ln 2)=\dfrac{5}{3}$

$f(t)=\sqrt{2}\{g(t)+t\}$

위 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)=\sqrt{2}\{g'(t)+1\}$

$f'(\ln 2)=\sqrt{2}\left(\dfrac{5}{3}+1\right)=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

$p=3,\ q=8$

$\therefore\ p+q=3+8=11$

기하

기하 23 ②

$\vec{a}=(k+3,\,3k-1)$와 $\vec{b}=(1,\,1)$가 서로 평행하려면

$k+3=3k-1$이어야 한다.

$\therefore\ k=2$

기하 24 ⑤

타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\,\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{8}+\dfrac{\sqrt{2}y}{4}=1$이다.

$\therefore$ 접선의 x절편은 4이다.

기하 25 ①

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AP}|=5$

$\therefore$ 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이다.

$\therefore$ 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $5\times2\pi=10\pi$이다.

기하 26 ②

$\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{BC}$를 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{3}{2},\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{1}{2},\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=(2,\,-\sqrt{3})$

$\therefore\ |\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

기하 27 ③

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\,k)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{4x}{a^2}-\dfrac{ky}{b^2}=1$이다.

삼각형 OQR과 SPQ는 서로 닮음이다.

선분 OR의 길이가 선분 PS의 길이의 t배라고 하면 삼각형 OQR의 넓이는 삼각형 SQP의 넓이의 t^2배이고 삼각형 SQR의 넓이는 삼각형 SQP의 t배이다.

$A_1:A_2=9:4=t^2:t+1$

$4t^2=9t+9\ \rightarrow\ t=3$

$\therefore\ \overline{OQ}:\overline{SQ}=3:1$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\,k)$에서의 접선의 x절편은 3이다. $\rightarrow\ a^2=12,\ a=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=4\sqrt{3}$이다.

기하 28 ③

원의 중심을 O, 원과 타원이 만나는 한 점을 A라고 하자.

점 A는 타원의 꼭짓점이므로 $\overline{AF}=\overline{AF'}$이다.

$\overline{AF}=\overline{AF'}$, $\overline{OA}=\overline{OF}=1$, $\angle\mathrm{OFA}$ 공통

삼각형 OFA와 삼각형 OFF′은 서로 닮음이다.

$\overline{OA}:\overline{AF}=\overline{AF}:\overline{FF'}\ \rightarrow\ 1:a:a:\overline{FF'}$

$\overline{FF'}=a^2$

선분 FF′의 중점을 C라 하자.

$\overline{FC}=\dfrac{1}{2}\overline{FF'}=\dfrac{1}{2}a^2$

타원의 장축의 길이가 $2a$이므로 $\overline{OC}=a$이다.

$\overline{OF}=\overline{OC}+\overline{CF}=a+\dfrac{1}{2}a^2=1\ \rightarrow\ a=-1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ a=\sqrt{3}-1\ (\because\ a>0)$

기하 29 80

포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$의 준선은 $x=a-2$이다.

두 점 A, B에서 직선 $x=a-2$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_A}$, $\mathrm{H_B}$라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH_A}+\overline{BH_B}=\overline{AB}$이다.

$\overline{AC}=\overline{AH_A}+\overline{CH_A}$, $\overline{BC}=\overline{BH_B}+\overline{CH_B}$

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=\overline{AH_A}+\overline{CH_A}+\overline{BH_B}+\overline{CH_B}-\overline{AB}=\overline{CH_A}+\overline{CH_B}=2a$

$\therefore\ k=2a$

포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 E, 점 E에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 F라 하자.

포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$은 포물선 $y^2=8x$을 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 $2a$만큼 평행이동 시킨 도형이므로

점 A는 점 E를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 $2a$만큼 평행이동 시킨 점이고

점 B는 점 A를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 $2a$만큼 평행이동 시킨 점이다.

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{EF}+a,\ \overline{BD}=\overline{AC}+a$

$y^2=8x,\ y=2x-4\ \rightarrow\ (2x-4)^2=8x$

$x^2-6x+4=0\ \rightarrow\ x=3\pm\sqrt{5}$

$\therefore$ 점 A의 x좌표는 $3+\sqrt{5}$이고 점 E의 x좌표는 $3-\sqrt{5}$이다.

$\overline{EF}=5-\sqrt{5}$, $\overline{AC}=5+\sqrt{5}$

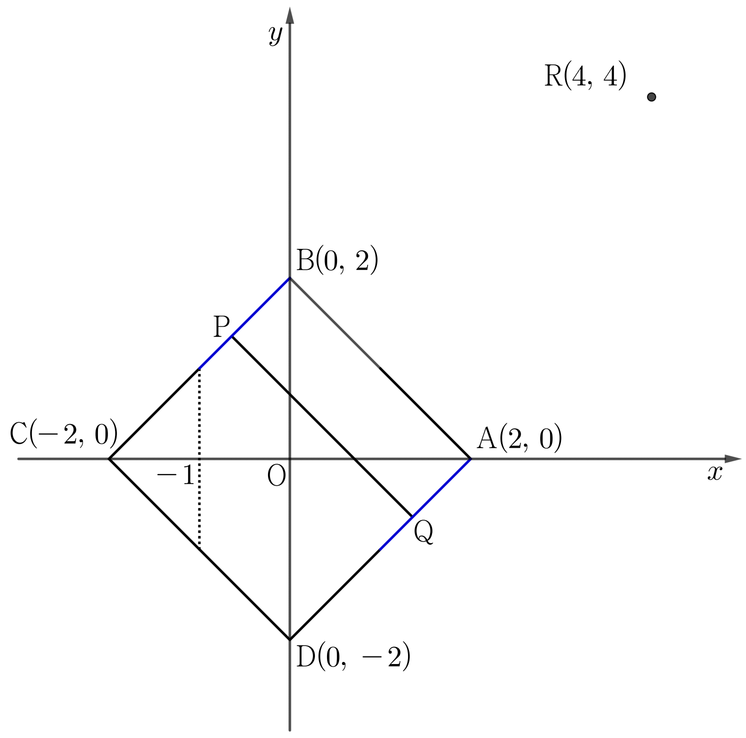
$\therefore\ a=2\sqrt{5}$

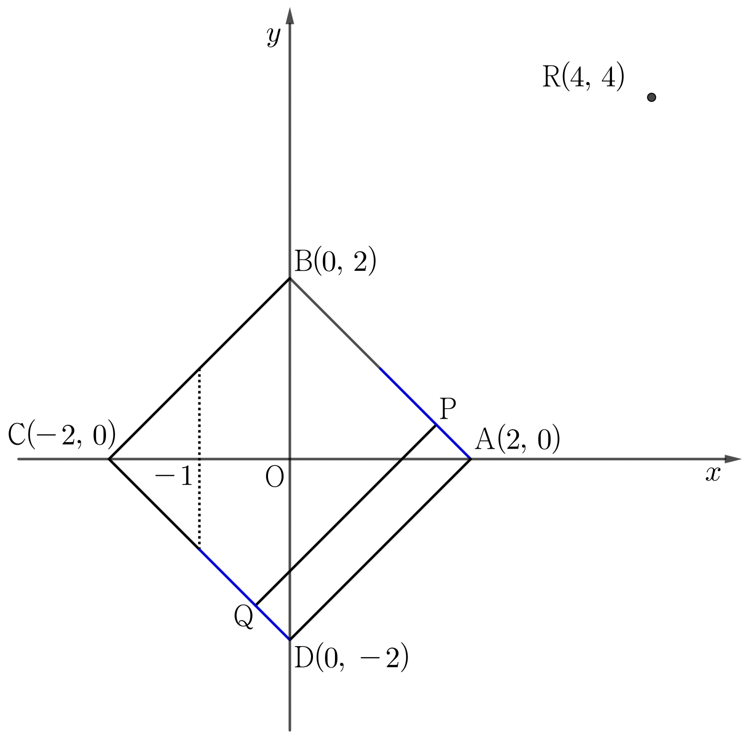
$k=2a=4\sqrt{5}$

$\therefore\ k^2=80$

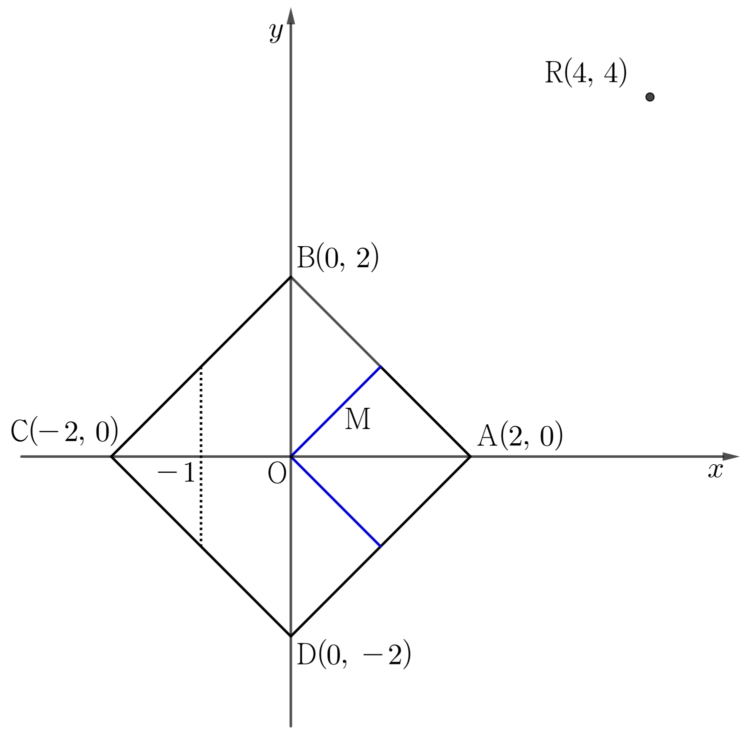
기하 30 48

(가) 조건에 의하여 선분 PQ는 선분 AB에 수직이거나 선분 AD에 수직이다.
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} \geq -2$에 의하여 점 P의 x좌표는 -1이상이고
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} \geq 0$에 의하여 점 P의 y좌표는 0이상이다.
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ} \geq -2$에 의하여 점 Q의 x좌표는 -1이상이고
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ} \leq 0$에 의하여 점 Q의 y좌표는 0이하이다.
점 P와 Q가 존재할 수 있는 위치를 각각 파란색으로 나타내면 다음과 같다.





선 PQ의 중점을 M이라 하자.
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ})=|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2=|\overrightarrow{RM}|^2-2$
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$은 $|\overrightarrow{RM}|$이 최대일 때 최댓값을 가지고
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$은 $|\overrightarrow{RM}|$이 최소일 때 최솟값을 가진다.
$|\overrightarrow{RM}|$의 최대 최소를 파악하기 위해서 점 M의 자취를 파란색으로 그리면 다음과 같다.



$|\overrightarrow{RM}|$은 M$(1, 1)$일 때 최솟값 $3\sqrt{2}$를 가지고
$|\overrightarrow{RM}|$은 M$(1, -1)$일 때 최댓값 $\sqrt{34}$를 가진다.
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=|\overrightarrow{RM}|^2-2$
$\therefore$ $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값은 $34-2=32$이고 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최솟값은 $18-2=16$이다.
$M=32$, $m=16$
$\therefore$ $M+m=32+16=48$

※ 위의 서술에는 언급되지 않았으나 점 Q가 점 A$(2, 0)$에 고정되고 점 P가 선분 AB 위에 있는 경우와 점 P가 점 A$(2, 0)$에 고정되고 점 Q가 선분 AD 위에 있는 경우도 존재합니다. 그리고 이 두 경우에는
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ})=|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2$에서의 $|\overrightarrow{MP}|$의 값이 $0 \leq |\overrightarrow{MP}| \leq \sqrt{2}$의 범위를 가지므로 $|\overrightarrow{RM}|$의 크기에 따라서 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$가 최댓값을 가지는 상황이 나올 수도 있다고 생각할 수 있습니다.
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$가 최댓값을 가지는 상황은 가능한 $|\overrightarrow{RM}|$의 크기가 큰 상황일 테니 이때의 상황은 점 P가 점 A$(2, 0)$에 고정되고 점 Q가 선분 AD 위에 있는 상황일 것입니다.
그래서 계산을 직접 진행해보기 위해서 점 M의 좌표를 상수 t를 이용하여 표현하면 M$(t, t-2)$ $(1 \leq t \leq 2)$가 됩니다.
$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2=\{(4-t)^2+(6-t)^2\}-\{(2-t)^2+(2-t)^2\}$$
$$=-12t+44$$
$\therefore$ 점 P가 점 A$(2, 0)$에 고정되고 점 Q가 선분 AD 위에 있는 상황일 때, $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$가 최댓값을 가지는 상황은 $t=1$일 때이고 그때의 값은 32이다.
이렇게 해당 문제 상황에선 점 Q가 점 A$(2, 0)$에 고정되고 점 P가 선분 AB 위에 있는 경우와 점 P가 점 A$(2, 0)$에 고정되고 점 Q가 선분 AD 위에 있는 경우에서 특수한 문제 상황이 발생하진 않았지만, 해당 부분에서 문제가 발생할 수도 있으므로 해당 케이스를 놓치지 않도록 주의해야 합니다.