1. 2022학년도 랑데뷰 컨텐츠(파일 판매)
(1) 매주 모의고사 (월4회 연32회)
(2) 일일학습지 (월20회, 연160회)
(3) 수특, 수완 변형
(4) 주요모고 변형

[문의] 카톡 : hbb100

2. 2021년 랑데뷰 출간물 (ALL 오르비 출판)
(1) N제 (1월~5월)
수학I, 수학II, 확률과통계, 미적분, 기하

(2) 상수 (4월, 8월)
고등수학(상), 수학I, 수학II, 고등수학(하)

(3) 봉투모의고사 (7월~9월)
랑데뷰☆수학 모의고사
시즌1
시즌2
시즌3

네이버 검색 : 황보백

랑데뷰 출간 교재 소개

(yes24, 알라딘, 오르비 등에 주문가능)

-랑데뷰세미나- (전국 서점 판매중)

황보백 선생이 그동안 배우고 연구한 고교 입시 수학에 필요한 심화 개념 및 스킬들을 모아 놓은 교재
[고등수학] [수학I] [수학II] [미적분] [확률과통계] [기하]

순으로 현 교육과정에 맞게 정리되어 있다.
장점:고교수학의 대부분의 스킬이 담겨 있다.오르비 편집실에서 깔끔하게 편집해 주셔서 오르비에서 판매되었던 전자책보다 가독성이 좋아졌고 검토진 선생님들의 꼼꼼한 검토로 오타,오류 수정되었으며 보기 불편한 그림은 대부분 수정되어 완성도가 높아졌다.
많은 가르침을 주신 선-후배 강사분들과 특히 수강모 선생님들께 감사함을 전합니다. 입시수학을 연구하는 모든 선생님들께 이 책을 바칩니다.

-랑데뷰N제- 수학I,수학II,확통,미적분,기하

수능 대비 수학 문제집**랑데뷰N제 시리즈**는 다음과 같은 난이도 구분으로 구성됩니다. (괄호안 단어가 교재명)
1단계-쉬운3점 어려운3점(쉬삼어삼) (오르비-전자책)
⇨평가원 기출(6,9,11월)+변형 자작 문항(5:5정도)
2단계-쉬운4점 어려운4점(쉬사준킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
3단계-킬러(킬러극킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
이 판매페이지는 랑데뷰N제중[수학I]과[수학II]의2단계[쉬사준킬], 3단계[킬러극킬]에 관한 내용입니다.
(1)랑데뷰N제 수학I- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 240문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(2)랑데뷰N제 수학I- 킬러극킬
킬러급 난이도100제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.
(3)랑데뷰 N제 수학II- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 200문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(4)랑데뷰 N제 수학II- 킬러극킬
킬러급 난이도110제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.

<그외 출간물>
랑데뷰 상수 시리즈
어썸&랑데뷰 모의고사(강남구청 인강교재)
랑데뷰 모의고사 시즌1,2,3

수학 영역(해설)

랑데뷰-집필진

[강동희 강동희수학교습소 010-7292-1692]
[김권택 더블엠수학학원 010-9895-5754
[김 수 오라클수학교습소 010-5273-7632]
[김은수 샤인수학학원 010-5687-5722]
[김종렬 광릉한샘기숙학원 010-3619-7963]
[김효경 수학의 정원 010-6369-6416]
[박광식 프라하 수학학원 010-3257-5452]
[박용진 샤인수학학원 010-6512-7443]
[배용제 L&K한울학원 010-2626-2280]
[서영만 만 수학교습소 010-9244-0910]
[서태욱 태강학원 010-3022-6918
답길학원 010-3022-6918]
[오세준 오엠수학교습소 010-8858-9561]
[오은경 오은경수학 010-4534-5129]
[우성근 우성근수학 010-3040-0005]
[유승희 오름학원 010-5298-1393]
[이재호 이재호수학학원 010-4527-1703]
[이정배 김이김학원 010-9866-2508
멘토수학 010-9866-2508]
[이지웅 감수학 010-9834-0904]
[이지훈 SY영수학원 010-8598-5284]
[이태형 가토수학과학학원 gatoms@kakao.com]
[이현일 샤인수학학원 010-2681-9501]
[임성일 아인수학전문학원 010-2048-2402]
[장선정 오름수학 010-4894-1764]
[장세완 장선생수학학원 010-2568-0049]
[장정보 장정보수학교습소 010-9504-5938]
[전희종 범어수학 010-9721-9797]
[정일권 이미지매쓰학원 010-2739-6021]
[조필재 샤인수학학원 053-754-3121]
[조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
[최병길 광주과학고등학교 010-4591-0583]
[최성훈 최성훈수학교습소 010-2680-5281]
[최수영 수학만영어도학원 053-856-1158,
필즈수학학원 054-771-4301]
[최재영 셰르파수학교습소 010-2577-4221]
[최현정 MQ멘토수학 010-2655-9279]
[최혜권 수학의 궤도진입 010-3869-9602]
[한정아 한정아수학교습소 010-7220-6368]
[홍지석 홍수학 학원 010-7136-5713]
[황수영 JS수학연구소 010-6780-8242]

문항	배점	수학I	수학II
1	2	1	
2	2		3
3	3	3	
4	3		1
5	3	2	
6	3		2
7	3	3	
8	3	1	
9	4		2
10	4	2	
11	4		1
12	4		2
13	4	3	
14	4		3
15	4	1	
16	3		1
17	3		3
18	3	2	
19	3		3
20	4	3	
21	4	2	
22	4		2
문항수		11	11

문항	배점	확통	미적분	기하
23	2	3	2	1
24	3	1	1	2
25	3	2	2	1
26	3	3	1	1
27	3	2	2	3
28	4	2	3	1
29	4	1	2	2
30	4	2	3	3
문항수		8	8	8

빠른답

공통과목

1	②	2	⑤	3	①	4	④	5	①
6	③	7	①	8	①	9	①	10	⑤
11	⑤	12	②	13	①	14	④	15	②
16	3	17	7	18	2	19	12	20	68
21	131	22	225						

확률과 통계/미적분/기하

23	①	24	④	25	③	26	④	27	③
28	②	29	3	30	155				

풀이

공통과목
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

공통과목

1) 정답 ②
$\sqrt[3]{8}\times\sqrt[4]{625}=2\times5=10$

2) 정답 ⑤
$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}(ax^2)dx=\left[\frac{2}{3}ax^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a=2$
$\therefore\ a=3$

3) 정답 ①
$2\times6=3+a$
$a=9$

4) 정답 ④
$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)+\lim_{x\to3-}f(x)=0+1+2=3$

5) 정답 ①
$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면
$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$
$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

6) 정답 ③
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $f(1)=0$, $f'(1)=3$이므로
$f'(1)=4-2+a=3$
$\therefore\ a=1$
$f(x)=\int(4x^3-2x+1)dx=x^4-x^2+x+C$
$f(1)=1-1+1+C=0$에서 $C=-1$
따라서 $f(x)=x^4-x^2+x-1$
$f(2)=16-4+2-1=13$

7) 정답 ①
$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)^2=42$에서
$\sum_{k=1}^{10}\{4(a_k)^2+4a_k+1\}=42$
$4\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=42$
$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=8\ \cdots$ ㉠
또, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k-1)=12$에서
$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-a_k\}=12$
$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2-\sum_{k=1}^{10}a_k=12\ \cdots$ ㉡
㉠+㉡을 하면
$2\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=20$
따라서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=10$

8) 정답 ①
함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $f(x)=2^{x-m}$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$위에 있고, 교점 중 한 점의 x좌표가 16이므로 그 교점의 좌표는 $(16,16)$이다.
$f(16)=2^{16-m}=16$이므로 $16-m=4$
따라서 $m=12$

9) 정답 ①
등차수열은 1차식으로 나타나므로
$f(x)=(x+2)x(x-2)+ax+b$
$=x^3+(a-4)x+b$

라 둘 수 있다.
또한 $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$가 이 순서대로 공차가 2인 등차수열이므로
$-2a+b$, b, $2a+b$에서 $2a=2$
$\therefore\ a=1$이다.
따라서 $f(x)=x^3-3x+b$
$f'(x)=3x^2-3x=3(x+1)(x-1)$에서
$x=-1$에서 극댓값 3을, $x=1$에서 극솟값을
가진다.
$f(-1)=-1+3+b=3$
따라서 $b=1$
$\therefore\ f(x)=x^3-3x+1$
$f(1)=1-3+1=-1$
[랑데뷰팁]
$f(-2)=k$라면 공차가 2인 등차수열이므로
$f(0)=k+2$이다. $(-2,k)$와 $(0,k+2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{(k+2)-k}{2}=1$이므로 $a=1$임을 알 수 있다.

10) 정답 ⑤
$g(x)=-\sin^2x-\sin x+\dfrac{1}{2}$에서
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$
$y=-t^2-t+\dfrac{1}{2}=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
$-1\le t\le 1$에서 $-\dfrac{3}{2}\le y\le\dfrac{3}{4}$
$g(x)=k$라 하면
$y=(f\circ g)(x)=\cos k\ \left(-\dfrac{3}{2}\le k\le\dfrac{3}{4}\right)$
$\left|-\dfrac{3}{2}\right|>1$이므로 $y=\cos k$의 그래프의 최솟값은 $\cos\left(-\dfrac{3}{2}\right)$이다.
$\cos(-\theta)=\cos\theta$이므로 최솟값은 $\cos\dfrac{3}{2}$

11) 정답 ⑤
[그림 : 최성훈T]
곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2$위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$이라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}$의 중점을 R라 할 때 점 R의 좌표는 $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{1}{4}a^2\right)$이다.
이때, $\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기가 $\dfrac{\frac{1}{2}a^2-0}{a-0}=\dfrac{1}{2}a$이므로 $\overline{\mathrm{RQ}}$의 기울기는 $-\dfrac{2}{a}$이다.
즉, 두 점 R, Q를 지나는 직선의 방정식은
$y-\dfrac{1}{4}a^2=-\dfrac{2}{a}\left(x-\dfrac{1}{2}a\right)$
$\therefore y=-\dfrac{2}{a}x+\dfrac{1}{4}a^2+1$
따라서 점 Q의 좌표 $\mathrm{Q}(0,b)$에서
$b=\dfrac{1}{4}a^2+1$
$\therefore\ \lim\limits_{a\to 0+}b=\lim\limits_{a\to 0+}\left(\dfrac{1}{4}a^2+1\right)=1$

12) 정답 ②
함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하기 위해서는 삼차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 1을 가져야 한다. 마찬가지로 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분가능하기 위해서는 삼차함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극값 $-\dfrac{25}{2}$을 가져야 한다.
즉, $f'(-1)=f'(k)=0$, $f(-1)=1$, $f(k)=-\dfrac{25}{2}$이다.
삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는
$f'(x)=3(x+1)(x-k)$
$\quad=3\{x^2+(1-k)x-k\}$
$\quad=3x^2+3(1-k)x-3k$
라 두고 양변 적분하면
$f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}(1-k)x^2-3kx+C$ 이다.
$f(-1)=-1+\dfrac{3}{2}(1-k)+3k+C=1$
$\dfrac{3}{2}k+C=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ C=-\dfrac{3}{2}k+\dfrac{1}{2}$
$f(k)=k^3+\dfrac{3}{2}(1-k)k^2-3k^2+C=-\dfrac{25}{2}$
$k^3+\dfrac{3}{2}k^2-\dfrac{3}{2}k^3-3k^2+C=-\dfrac{25}{2}$
$-\dfrac{1}{2}k^3-\dfrac{3}{2}k^2+C=-\dfrac{25}{2}$
$C=-\dfrac{3}{2}k+\dfrac{1}{2}$을 대입하면
$-\dfrac{1}{2}k^3-\dfrac{3}{2}k^2-\dfrac{3}{2}k+13=0$
$k^3+3k^2+3k-26=0$
$(k-2)(k^2+5k+13)=0$
$\therefore\ k=2$이다.

13) 정답 ①
(i) $n=2$일 때, (좌변)$=\boxed{\dfrac{9}{4}}$이고 (우변)$=\alpha-\dfrac{1}{4}$이므로 (㉠)이 성립하기 위해서는 $\dfrac{9}{4}<\alpha-\dfrac{1}{4}$, $\alpha>\dfrac{5}{2}$이므로 자연수 α의 최솟값은 3이다.
따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^3}<3-\frac{1}{n^2}\cdots$ (㉡) 이 성립함을 보이자.
(ii) $n=m\ (m\ge 2)$일 때, (㉡)이 성립한다고 가정하면
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{k^3}<3-\frac{1}{m^2}$이다.
$n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{2}{k^3}=\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{k^3}+\boxed{\frac{2}{(m+1)^3}}<3-\frac{1}{m^2}+\boxed{\frac{2}{(m+1)^3}}$$

한편,

$$3-\frac{1}{(m+1)^2}-\left\{3-\frac{1}{m^2}+\boxed{\frac{2}{(m+1)^3}}\right\}$$

$$=\frac{-(m+1)m^2+(m+1)^3-2m^2}{m^2(m+1)^3}$$

$=\dfrac{\boxed{3m+1}}{m^2(m+1)^3}>0$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{2}{k^3}<3-\frac{1}{(m+1)^2}$ 이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $n=m+1$일 때도 (㉡)이 성립한다.
그러므로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (㉡)이 성립한다.

$a=\dfrac{9}{4}$, $f(m)=\dfrac{2}{(m+1)^3}$, $g(m)=3m+1$

$a\times f(5)\times g(5)$

$=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{2}{216}\times16$

$=\dfrac{1}{3}$

14) 정답 ④
[그림 : 이정배T]

$f(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}|v(t)|dt$이다.

ㄱ. $a>2$일 때, $v(t)=t^2-2t$이므로

$$f(a)=\int_a^{a+1}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_a^{a+1}$$

$$=\frac{1}{3}(a+1)^3-(a+1)^2-\frac{1}{3}a^3+a^2$$

$$=\frac{1}{3}(a^3+3a^2+3a+1)-a^2-2a-1-\frac{1}{3}a^3+a^2$$

$$=a^2+a+\frac{1}{3}-2a-1$$

$$=a^2-a-\frac{2}{3}$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{f(a)}{a^2}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2-a-\frac{2}{3}}{a}=1$ (참)

ㄴ. $0\le a\le 1$일 때, $|v(t)|=-t^2+2t$이므로

$$f(a)=\int_a^{a+1}(-t^2+2t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_a^{a+1}$$

$$=-\frac{1}{3}(a+1)^3+(a+1)^2+\frac{1}{3}a^3-a^2$$

$$=-\frac{1}{3}(a^3+3a^2+3a+1)+a^2+2a+1+\frac{1}{3}a^3-a^2$$

$$=-a^2-a-\frac{1}{3}+2a+1$$

$$=-a^2+a+\frac{2}{3}$$

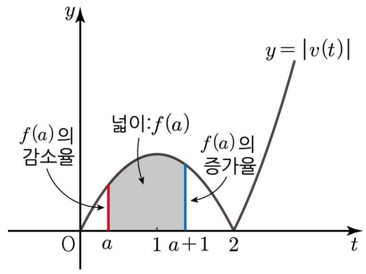
$$=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{12}$$

따라서 $f(a)$의 최댓값은 $\dfrac{11}{12}$이다. (거짓)

[다른 풀이]-ㄴ
[랑데뷰 세미나 (100) 참고]

다음 그림과 같이 $0\le a\le 1$에서 $|v(a)|$는 $\displaystyle\int_a^{a+1}|v(t)|dt$의 감소율이고 $|v(a+1)|$은 $\displaystyle\int_a^{a+1}|v(t)|dt$의 증가율이다. 두 값이 같을 때 $\displaystyle\int_a^{a+1}|v(t)|dt$은 최댓값을 갖는다. $x=a$와 $x=a+1$은 $x=1$에 대칭이므로 $\dfrac{a+(a+1)}{2}=1$에서 $2a+1=2$

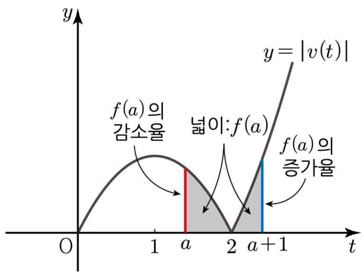
$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$



따라서 $0\le a\le 1$일 때 $f(a)$의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$일 때다.

ㄷ. ㄴ.의 [다른 풀이]와 같이

다음 그림에서 $a\ge\dfrac{1}{2}$이후 $f(a)$의 값이 감소하다 $|v(a)|=|v(a+1)|$일 때 $f(a)$의 값이 극소이면서 최소이다.



따라서 $-a^2+2a=(a+1)^2-2(a+1)$

$-a^2+2a=a^2-1$

$2a^2-2a-1=0$

$a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$a\ge0$이므로 $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

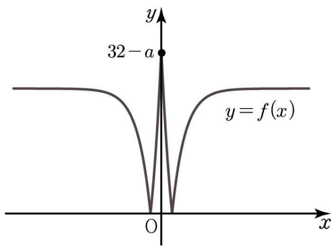
그러므로 함수 $f(a)$의 최솟값은 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$이다. (참)

15) 정답 ②
[그림 : 이정배T]

$|p-q|=|q-p|$이므로 $f(x)=\begin{cases} |2^{x+5}-a| & (x<0) \\ |2^{5-x}-a| & (x \ge 0) \end{cases}$ 이다.

$y=2^{x+5}-a$와 $y=2^{5-x}-a$는 y축에 대칭이다.

$f(0)=32-a$ $(0<a<32)$으로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서

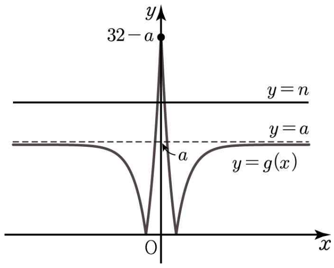
$\alpha(n)=2$이려면 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 제1사분면에서 한 점에서만 만나고 제2사분면에서 한 점에서만 만나야 된다.

그러므로

$\alpha(n)=2$이려면 $x \ge 0$에서 곡선 $y=|2^{5-x}-a|$와 직선 $y=n$이 제1사분면에서 한 점에서 만나도록 하면 된다.

$g(x)=|2^{5-x}-a|$라 하면 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $y=a$ $(\because a>0)$이고, $g(0)=|2^5-a|=|32-a|$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $32-a>a$, 즉 $a<16$일 때



$\alpha(n)=2$인 n의 개수가 2이상이고 6이하 이려면

$2 \le (31-a)-a+1 \le 6$이어야 한다.

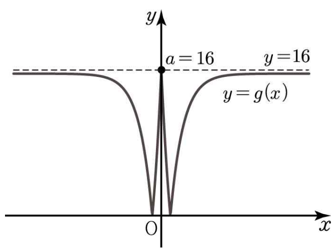
$2 \le 32-2a \le 6$

$26 \le 2a \le 30$

$13 \le a \le 15$

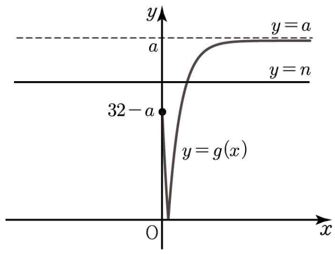
따라서 $a=13$, $a=14$, $a=15$

(ii) $32-a=a$, 즉 $a=16$일 때



위의 그림과 같이 $\alpha(n)=2$인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iii) $32-a<a$, 즉 $a>16$일 때



$\alpha(n)=2$인 n의 개수가 2이상이고 6이하이려면

$2 \le a-1-(33-a)+1 \le 6$이어야 한다.

$2 \le 2a-33 \le 6$

$35 \le 2a \le 39$

$\therefore$ $17.5 \le a \le 19.5$

따라서 $a=18$, $a=19$

(i), (ii), (iii)에서 a의 값의 범위는

$a=13$, $a=14$, $a=15$, $a=18$, $a=19$

따라서 구하는 자연수 a의 값의 합은

$(13+19)+(14+18)+15$

$=32\times 2+15=79$

16) 정답 3

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+3)}=\frac{-6}{-2}=3$$

17) 정답 7

$F(x)=\int_0^x (t^3-1)dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=x^3-1$

$\therefore$ $F'(2)=2^3-1=7$

18) 정답 2

[그림 : 이정배T]

주기가 8이므로 $\frac{2\pi}{b}=8$에서 $b=\frac{\pi}{4}$

$f(x)=a\cos\frac{\pi}{4}x$ 에서 $f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

(사각형의 넓이)$=\frac{\sqrt{2}}{2}a\times 6=6$

$\therefore$ $a=\sqrt{2}$

$a^2=2$

19) 정답 12

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}f(x)dx &= \int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx \\ &= \int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{-2}^{0}f(x+2)dx \\ &= \int_{-2}^{0}\{f(x)+f(x+2)\}dx\end{aligned}$$

$$= \int_{-2}^{0}(-4x^3+2x)dx$$

$$= \left[-x^4+x^2\right]_{-2}^{0} = -(-16+4) = 12$$

20) 정답 68

$a_{2n+1}-a_{2n-1} = \dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = p$에서

a_{2n+1}과 a_{2n-1}이 자연수이므로 두 자연수의 차인 p도 자연수이다.

$a_{2n+1}-a_{2n-1} = p$에서

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1이고 공차가 p인 등차수열이다.

$\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = p$에서

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a_2이고 공비가 p인 등비수열이다.

$a_8 = a_2 \times p^3 = 27$

에서 a_2, p가 자연수이므로

$a_2 = 1$, $p = 3$ 또는 $a_2 = 27$, $p = 1$이 가능하다.

(i) $a_2 = 1$, $p = 3$일 때,

$a_2 = 1$, $a_4 = 3$, $a_6 = 9$, $a_8 = 27$이고

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 3인 등차수열이므로

$a_9 = 27$, $a_7 = 24$, $a_5 = 21$, $a_3 = 18$, $a_1 = 15$이다.

따라서 $a_1 + a_4 = 15 + 3 = 18$

$\therefore\ \alpha = 18$

(ii) $a_2 = 27$, $p = 1$일 때,

$a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 27$이고

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 1인 등차수열이므로

$a_9 = 27$, $a_7 = 26$, $a_5 = 25$, $a_3 = 24$, $a_1 = 23$이다.

따라서 $a_1 + a_4 = 23 + 27 = 50$

$\therefore\ \alpha = 50$

(i), (ii)에서 가능한 모든 α의 합은 68이다.

21) 정답 131

[그림 : 이정배T]

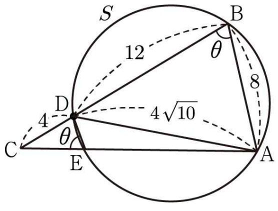
삼각형 CED와 삼각형 CBA에서

$\angle C$가 공통, $\angle \mathrm{CED} = \angle \mathrm{CBA}$

이므로 두 삼각형은 닮음이다.

$\overline{\mathrm{DE}} : \overline{\mathrm{CE}} = 1:2$이므로 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CB}} = 1:2$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{CB}} = 16$



선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점이 D이므로 $\overline{\mathrm{CD}} = 4$, $\overline{\mathrm{BD}} = 12$이다.

$\angle \mathrm{CED} = \theta$라 두면 $\angle \mathrm{ABC} = \theta$이다.

따라서 $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{AD}}^2 = 12^2 + 8^2 - 2\times 12 \times 8 \times \cos\theta$$
$$= 144 + 64 - 48$$
$$= 160$$

$\overline{\mathrm{AD}} = 4\sqrt{10}$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta} = 2R$에서

$2R = \dfrac{4\sqrt{10}}{\dfrac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{16\sqrt{10}}{\sqrt{15}}$

$R = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

따라서 원 S의 넓이는 $\pi R^2 = \dfrac{128}{3}\pi$이다.

$p = 3$, $q = 128$이므로 $p + q = 131$이다.

22) 정답 225

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 + 3x & (x < 0) \\ f_2(x) = -x^2 + 3x & (x \ge 0) \end{cases}$$ 라 하고

닫힌구간 $[t, t+1]$의 함수 $f(x)$의 최댓값 $h(t)$을 $f_1(t)$와 $f_2(t)$로 나타내어 보자.

함수 $f_1(x)$의 최솟값은 $f_1\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$이고

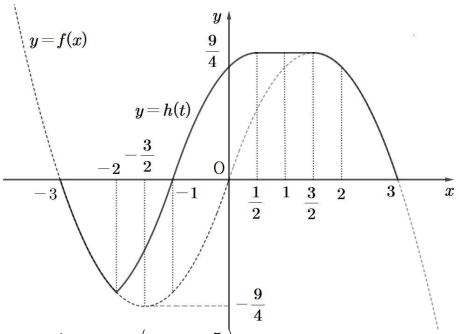
함수 $f_2(x)$의 최댓값은 $f_2\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$이다.

$$h(t) = \begin{cases} f_1(t) & (t < -2) \\ f_1(t+1) & (-2 \le t < -1) \\ f_2(t+1) & \left(-1 \le t < \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{9}{4} & \left(\dfrac{1}{2} \le t < \dfrac{3}{2}\right) \\ f_2(t) & \left(t \ge \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

따라서

$$h(t) = \begin{cases} t^2 + 3t & (t < -2) \\ t^2 + 5t + 4 & (-2 \le t < -1) \\ -t^2 + t + 2 & \left(-1 \le t < \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{9}{4} & \left(\dfrac{1}{2} \le t < \dfrac{3}{2}\right) \\ -t^2 + 3t & \left(t \ge \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

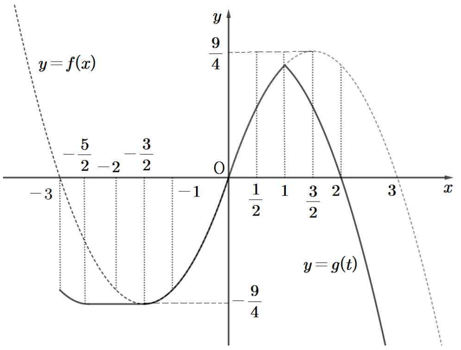
$g(t)$를 구해보면 다음과 같다.



$$g(t)=\begin{cases} f_1(t+1) & \left(t<-\dfrac{5}{2}\right) \\ -\dfrac{9}{4} & \left(-\dfrac{5}{2}\le t<-\dfrac{3}{2}\right) \\ f_1(t) & \left(-\dfrac{3}{2}\le t<0\right) \\ f_2(t) & (0\le t<1) \\ f_2(t+1) & (t\ge 1) \end{cases}$$

따라서

$$g(t)=\begin{cases} t^2+5t+4 & \left(t<-\dfrac{5}{2}\right) \\ -\dfrac{9}{4} & \left(-\dfrac{5}{2}\le t<-\dfrac{3}{2}\right) \\ t^2+3t & \left(-\dfrac{3}{2}\le t<0\right) \\ -t^2+3t & (0\le t<1) \\ -t^2+t+2 & (t\ge 1) \end{cases}$$



따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서만 미분가능하지 않으므로 $a=1$이다.

$h(1)=\dfrac{9}{4}$이므로 $100h(a)=100\times\dfrac{9}{4}=225$

확률과통계
[출제자 : 황보백 송원학원]

23) 정답 ①

$\mathrm{B}\left(9,\ \dfrac{2}{3}\right)=9\times\dfrac{2}{3}=6$

24) 정답 ④

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$의 일반항은 ${}_8\mathrm{C}_r(x^{-1})^r x^{8-r}={}_8\mathrm{C}_r x^{8-2r}$에서 $r=4$일 때, 상수항이다.

따라서 상수항은 ${}_8\mathrm{C}_4=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

25) 정답 ③

$\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{4}{7}$에서

$\dfrac{\frac{1}{4}}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{4}{7}$

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{4}=\dfrac{7}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{7}{16}=\dfrac{9}{16}$

26) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

이 고등학교 각 학생의 일주일 동안 자기 주도적 학습시간을 확률변수 X라 하자.

X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\,2^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-m}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\,1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 27)=0.0668$이고

$\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

$\dfrac{27-m}{2}=1.5$이므로 $m=24$

이 고등학교 학생 중 25명을 임의추출하여 조사한 일주일 동안 자기 주도적 학습시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$\overline{X}$의 평균과 분산은 $\mathrm{E}(\overline{X})=24$,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{2^2}{25}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(24,\,\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-24}{\frac{2}{5}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\,1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(23\le\overline{X}\le 25)=\mathrm{P}\left(\dfrac{23-24}{\frac{2}{5}}\le Z\le\dfrac{25-24}{\frac{2}{5}}\right)$

$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=2\times0.4938=0.9876$

27) 정답 ③

20번 문항에서 오답이면서 80점 이상일 확률을 a라 두면 다음 표와 같은 상황이다.

	80점미만	80점이상	계
20번 정답	$0.9-0.81$ $=0.09$	$0.1-a$	$0.19-a$
20번 오답	0.9×0.9 $=0.81$	a	$0.81+a$
계	0.9	0.1	

$\frac{a}{0.81+a}=\frac{1}{10}$에서 $10a=0.81+a$
$9a=0.81$
$\therefore\ a=0.09$
선택한 1명의 학생의 점수가 80점 이상이고 20번 문항에서 정답이었을 확률은
$0.1-0.09=0.01$이다.
따라서 $\frac{1}{100}$

28) 정답 ②
여사건의 확률을 이용하자.
1과 12사이에 홀수가 없이 나열하는 경우의 수를 구하는 방법은 다음과 같다.
(i) 1과 12를 묶는다.
(ii) (1, 12)묶음과 3, 5, 7, 9, 11을 먼저 나열한다.
$6!\times2!$
(iii) 나열한 숫자 사이에 짝수 2, 4, 6, 8, 10을 넣는다. ${}_8H_5\times5!$
따라서
$\frac{6!\times2!\times{}_8H_5\times5!}{12!}=\frac{2}{7}$
그러므로
1과 12사이에 적어도 하나의 홀수가 나열될 확률은
$1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

29) 정답 3

일곱 개의 낱말을 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!2!2!}=630$
'안경'과 '경안'을 포함하지 않기 위해서는 다음과 같이 4개의 낱말 '여','보', '보', '여'를 나열 한 후 양 끝이나 각 낱말 사이 5군데(V)에 다음 2가지의 낱말이나 문자열이 들어가야 한다.

V 여 V 보 V 여 V 보 V

① 안, 경, 안 ⇨ ${}_5C_3\times\frac{3!}{2!}=30$
② '안안', 경 ⇨ ${}_5C_2\times2!=20$

이때 '여','보', '보', '여'을 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이므로
구하는 경우의 수는
$630-6\times(30+20)$
$=630-300=330$
$a=330$이므로 $\frac{a}{110}=3$

30) 정답 155
$a\le b\le c$이므로
$|a-b|+|b-c|+|c-a|$
$=-a+b-b+c+c-a$
$=2(c-a)$
이다.
$|a-b|+|b-c|+|c-a|$이 4의 배수이고 $0\le c-a\le5$이므로
$2(c-a)=4$, $2(c-a)=8$이 가능하다.
(i) $c-a=2$인 경우
(a,b,c)의 순서쌍을 구해보면
$(1,b,3)$, $(2,b,4)$, $(3,b,5)$, $(4,b,6)$이고 각 경우 b가 될 수 있는 값이 3가지 이므로
$4\times3=12$
(ii) $c-a=4$인 경우
(a,b,c)의 순서쌍을 구해보면
$(1,b,5)$, $(2,b,6)$이고 각 경우 b가 될 수 있는 값이 5가지 이므로
$2\times5=10$
(i), (ii)에서 구하려는 확률은
$\frac{12+10}{6^3}=\frac{22}{216}=\frac{11}{108}$
$p=108$, $q=11$이므로
$p+q+36=119+36=155$이다.

미적분
[출제자 : 황보백 송원학원]

23) 정답 ①
$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x(x-2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\lim_{x\to0}\frac{2}{x-2}=1\times(-1)=-1$

24) 정답 ④
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\times\frac{3n+1}{2b_n}\right)=24$
$\frac{a_n}{n}\times\frac{3n+1}{2b_n}=c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=24$
$\frac{a_n}{b_n}=c_n\times\frac{2n}{3n+1}$ 이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(c_n\times\frac{2n}{3n+1}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}c_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}$
$=24\times\frac{2}{3}=16$

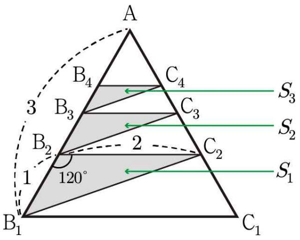
25) 정답 ③

$f(a)=0$이므로 $x \to a$일 때, $f(x) \to 0$이다.
이때 0이 아닌 극한값이 존재하므로
$\lim\limits_{x \to a}(e^{x-2}-1)=e^{a-2}-1=0$
따라서 $a=2$이고 $f(x)=\ln(5-2x)$이다.

$$\lim_{x \to a}\frac{e^{x-2}-1}{f(x)}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{e^{x-2}-1}{\ln(5-2x)} \quad (t=x-2\text{라 두면})$$
$$=\lim_{t \to 0}\frac{e^{t}-1}{\ln(1-2t)}$$
$$=\lim_{t \to 0}\left\{\frac{e^{t}-1}{t}\times\frac{-2t}{\ln(1-2t)}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$
$a \times b=-1$

26) 정답 ④
[그림 : 최성훈T]
그림과 같이 삼각형 $B_1B_2C_2$에서 $\angle B_1B_2C_2=120^{\circ}$이므로
$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{B_1B_2}\times\overline{B_2C_2}\times\sin 120^{\circ}=\frac{1}{2}\times1\times2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



삼각형 $B_1B_2C_2$와 삼각형 $B_2B_3C_3$의 닮음비는 $\overline{B_2C_2}:\overline{B_3C_3}=3:2$으로
닮음비가 $1 : \frac{2}{3}$이므로 넓이의 비는 $S_1 : S_2=1 : \frac{4}{9}$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9\sqrt{3}}{10}$$

27) 정답 ③
$g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로
$a^3+a^2+2a-1=3$에서 $a^3+a^2+2a-4=0$
$(a-1)(a^2+2a+4)=0$
이때 a가 실수이므로 $a=1$
즉, $g(3)=1$
한편 $f(x)=x^3+x^2+2x-1$에서
$f'(x)=3x^2+2x+2$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(1)}$$
$$=\frac{1}{3\times1^2+2\times1+2}$$
$$=\frac{1}{7}$$

28) 정답 ②
[그림 : 최성훈T]
곡선 $y=e^x$위의 점 $P_k\left(x_k, e^{x_k}\right)$에서의 접선의 방정식은
$y=e^{x_k}(x-x_k)+e^{x_k}=e^{x_k}x-x_ke^{x_k}+e^{x_k}$이다.
따라서 $Q_k(x_k-1, 0)$, $R_k\left(0, e^{x_k}(1-x_k)\right)$이다.
한편, 곡선 $y=e^x$위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 방정식은
$y=e(x-1)+e=ex$은 원점을 지나므로 $x_k>1$이므로 x절편은 양수이고 y절편은 음수이다.
따라서

$$S_k=\frac{1}{2}\times(x_k-1)\times e^{x_k}(x_k-1)$$
$$=\frac{1}{2}(x_k-1)^2e^{x_k}\text{이다.}$$

$x_k=1+\frac{k}{n}$이므로

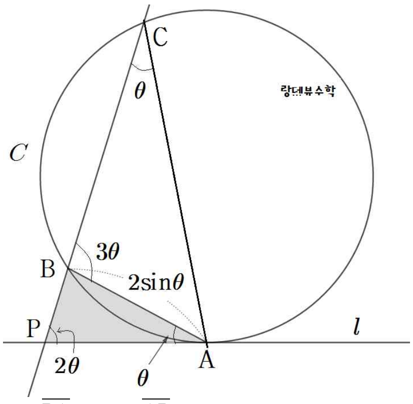
$$S_k=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2e^{1+\frac{k}{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{1+x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ xe^{x+1}-e^{x+1}\ \Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}(e^2-e^2+e)$$
$$=\frac{1}{2}e$$

29) 정답 3
[그림 : 최성훈T]

다음 그림과 같이 선분 AC를 그으면 $\angle ACB=\theta$이다.

원 C 의 반지름의 길이가 1이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면
$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2 \to \overline{AB}=2\sin\theta$
한편,
$\angle ABC=3\theta$, $\angle BAP=\theta$이므로 삼각형의 외각의 성질에 의해
$\angle APB=2\theta$이다.
따라서 삼각형 ABP에서 사인법칙을 적용하면



$$\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 2\theta}$$

$$\overline{\mathrm{PA}}=\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$$

그러므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times\frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\times\sin\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=2\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}\times\frac{\sin 3\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=2\times\frac{3}{2}=3$$

30) 정답 155
[그림 : 최성훈T]

$$\int_0^2 f(|x+a|)dx=4$$

$x+a=s$라 두면

$\int_a^{2+a} f(|s|)ds=4\cdots$㉠이다.

㉠에 $a=-1$을 대입하면 $\int_{-1}^{1} f(|s|)ds=4$이고

함수 $f(|s|)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$$\int_0^1 f(s)ds=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(|s|)ds=2$$

따라서 $\int_0^1 (4x^3+k)dx=\left[x^4+kx\right]_0^1=1+k=2$

$\therefore\ k=1$이다.

한편, ㉠의 양변을 미분하면

$f(|2+a|)-f(|a|)=0 \Rightarrow f(|a|)=f(|a+2|)$

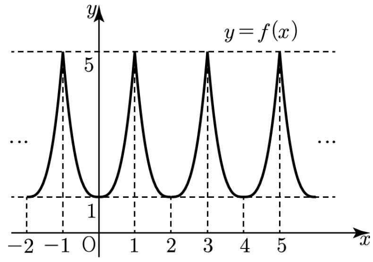
(i) $a\geq 0$일 때, $f(a)=f(a+2)$이므로 함수 $f(a)$는 주기가 2인 함수이다.

(ii) $-2\leq a<0$일 때, $f(-a)=f(a+2) \Rightarrow a=-1+x$을 대입하면 $f(1-x)=f(1+x)$이므로 함수 $f(a)$는 $a=1$에 대칭인 함수이다.

(iii) $a<-2$일 때, $f(-a)=f(-a-2) \Rightarrow a=-x-2$을 대입하면 $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $f(t)$는 주기가 2인 함수이다.

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x)=\begin{cases}4x^3+1 & (0\leq x<1)\\ 4(2-x)^3+1 & (1\leq x<2)\end{cases},\ f(x)=f(x+2)를\ 만족한다.$$



$c_n=\int_{\frac{17}{16}}^{\frac{3}{2}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$에서 $n=1$을 대입하면

$c_1=\int_{\frac{17}{16}}^{\frac{3}{2}}\frac{t}{f'(x_1)}dt$이고 $f(x_1)=t$라 두면

$f'(x_1)dx_1=dt$이고 $f(x_1)=\frac{17}{16}$을 만족하는 $x_1=\frac{1}{4}$, $f(x_1)=\frac{3}{2}$을 만족하는 $x_1=\frac{1}{2}$이므로

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x_1)dx_1$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4x_1^3+1)dx_1$$

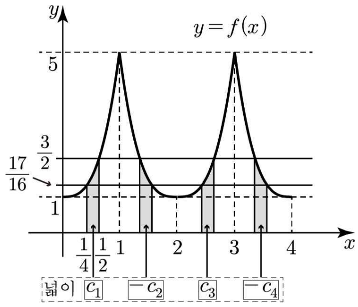
$$=\left[x_1^4+x_1\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{256}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{9}{16}-\frac{65}{256}$$

$$=\frac{144-65}{256}=\frac{79}{256}$$

$c_2=-c_1$



따라서 $c_1+c_2=0$, $c_3+c_4=0$, $\cdots$

$$\sum_{n=1}^{99} c_n=c_{99}=c_1=\frac{79}{256}$$

따라서 $p=256$, $q=79$

$p-q-22=256-79-22=155$

[보충 설명]-김종렬T

$\int_0^2 f(|x+a|)dx=\int_a^{a+2} f(|x|)dx=4$이므로 양변을 a에 관해 미분하면

$f(|a+2|)-f(|a|)=0$

$f(|a+2|)=f(|a|)$

즉, $f(|x|)$는 주기가 2인 주기함수라는 뜻이다.

[기하]
[출제자 : 황보백 송원학원]

23) 정답 ①

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=-1$의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$, $(0, -4)$이므로 주축의 길이는 8이다.

24) 정답 ④

$\vec{a}=(2x, -3)$, $\vec{b}=(2, x+2)$가 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다.

따라서

$4x-3x-6=0$에서

$x=6$

25) 정답 ③

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=16 \quad \cdots ㉠$

주축의 길이가 6이므로 $a=3$을 ㉠에 대입하여 구하면

$9+b^2=16$, $b=\sqrt{7}$

점근선 중 기울기가 양수인 점근선 l의 방정식은 $y=\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$

따라서 점 $\mathrm{F}(4, 0)$과 직선 $\sqrt{7}x-3y=0$사이의 거리는

$\dfrac{|\sqrt{7}\times 4-3\times 0|}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(-3)^2}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$

26) 정답 ④

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$이다.

점 A, B는 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 초점이므로 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=10$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{2R}+\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{2\mathrm{R}}}{\dfrac{6}{2R}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

27) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\mathrm{A}'(1, -2, -3)$, $\mathrm{B}'(0, -2, -1)$이므로 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$

두 점 A'와 B'의 z좌표가 모두 음수이고 두 점을 xy평면 위로 정사영 시킨 점을 각각 A'', B''이라 하면

$\mathrm{A}''(1, -2, 0)$, $\mathrm{B}'(0, -2, 0)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{A''B''}}=\sqrt{1+0+0}=1$

정사영의 길이 관계에서 $1=\sqrt{5}\cos\theta$에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이다.

직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$와 xy평면 이 이루는 각이 θ이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이다.

28) 정답 ②

[그림 : 이현일T]

점 $(2, \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{2x}{16}+\dfrac{\sqrt{3}y}{4}=1$

$\therefore\ l : x+2\sqrt{3}y-8=0$

초점의 x좌표를 (단, $c>0$)라고 놓으면

$c=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$

두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(2\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F}'(-2\sqrt{3}, 0)$라 하면

$\overline{\mathrm{FH_1}}=\dfrac{|2\sqrt{3}-8|}{\sqrt{1+12}}=\dfrac{8-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\overline{\mathrm{F'H_2}}=\dfrac{|-2\sqrt{3}-8|}{\sqrt{1+12}}=\dfrac{8+2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$|\overline{\mathrm{FH_1}}-\overline{\mathrm{F'H_2}}|=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, $\overline{\mathrm{F'F}}=4\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{H_1H_2}}^2=(4\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)^2=48\left(1-\dfrac{1}{13}\right)=\dfrac{576}{13}$

29) 정답 3

[그림 : 이현일T]

원 O의 반지름의 길이를 r, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각을 θ라 하면

$r^2\cos\theta=18\cdots ㉠$

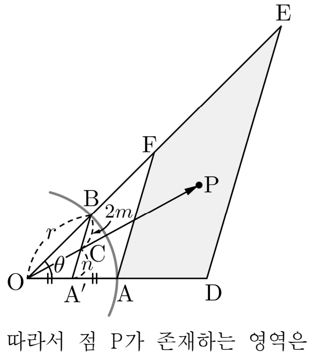
한편, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2m\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

선분 OA의 중점을 A'이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2m\overrightarrow{\mathrm{OP}'}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2m+n)\dfrac{2m\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2m+n}$

$\overline{\mathrm{BA}'}$를 $2m:n$으로 내분하는 점을 C라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2m+n)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (2<k<4)$



따라서 점 P가 존재하는 영역은 그림에서 사다리꼴 ADEF의 내부이다.

$\therefore \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 4r\cdot \sin\theta-\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2r\cdot \sin\theta=54$

$r^2\sin\theta=18\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $\tan\theta=1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4},\ r^2=18\sqrt{2}$

따라서

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2$

$=|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$

$=r^2-2\times 18+r^2$

$=36\sqrt{2}-36$

$a=36,\ b=-36$

$\frac{a-b}{24}=3$이다.

30) 정답 155

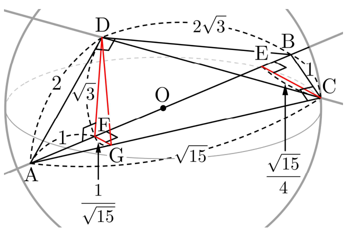
직선 AB는 구의 중심을 지나므로 $\overline{AB}$는 구의 지름이다.

따라서 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$이다. $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=4$이므로 $\overline{DB}=2\sqrt{3}$

두 삼각형 ABD와 ABC의 교선이 $\overline{AB}$이고 두 삼각형이 한 평면 위에 있지 않으므로 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 점 E, 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 점 F라 할 때 두 삼각형을 각각 포함하는 평면이 이루는 각은 $\overline{CE}$와 $\overline{DF}$가 이루는 각이다.

따라서 점 F에서 $\overline{EC}$와 평행하게 선을 그엇을 때 $\overline{AC}$와 만나는 점을 G라 하면

두 평면이 이루는 각은 $\angle DFG=\theta$이다.



직각삼각형 ADB에서 $4\times\overline{DF}=2\times 2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{DF}=\sqrt{3},\ \overline{AF}=1$

직각삼각형 ACB에서

$\overline{AB}=4,\ \overline{BC}=1$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

따라서 $4\times\overline{CE}=1\times\sqrt{15}$이 성립한다.

$\therefore\ \overline{CE}=\frac{\sqrt{15}}{4},\ \overline{AE}=\frac{15}{4}$

또한 $\triangle AFG \backsim \triangle AEC$이므로

$1:\frac{15}{4}=\overline{FG}:\frac{\sqrt{15}}{4}$에서 $\overline{FG}=\frac{1}{\sqrt{15}},\ \overline{AG}=\frac{4}{\sqrt{15}}$이다.

한편, $\triangle ACD$에서 $\overline{AD}=2,\ \overline{AC}=\sqrt{15}$이고

(나)에서 $\overline{CD}=\sqrt{11}$이므로

삼각형 ACD에서 코사인법칙을 적용하면

$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{15})^2-(\sqrt{11})^2}{2\times 2\times\sqrt{15}}=\frac{2}{\sqrt{15}}$

따라서 삼각형 DAG에서

$\overline{DG}^2=2^2+\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\right)^2-2\times 2\times\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\right)\cos A$

$=4+\frac{16}{15}-\frac{32}{15}=\frac{44}{15}$

그러므로

$\cos\theta=\frac{\overline{DF}^2+\overline{FG}^2-\overline{DG}^2}{2\times\overline{DF}\times\overline{FG}}$

$=\frac{3+\frac{1}{15}-\frac{44}{15}}{2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{15}}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{15}$

$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{5}{225}=\frac{1}{45}$

$p=45,\ q=1$

$3p+20q=135+20=155$