해 설 지

출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	①	12	③	23	④	23	④	23	⑤
2	④	13	①	24	①	24	③	24	②
3	⑤	14	②	25	⑤	25	①	25	④
4	①	15	④	26	③	26	②	26	③
5	⑤	16	24	27	④	27	①	27	①
6	②	17	10	28	②	28	⑤	28	②
7	②	18	17	29	16	29	8	29	26
8	③	19	40	30	108	30	10	30	384
9	⑤	20	8						
10	⑤	21	16						
11	①	22	22						

공통과목

1. 정답) ① [수학Ⅰ 삼각함수]

해설 : $\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 정답) ④ [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{\lim_{x\to2}(x+2)}{\lim_{x\to2}(x-1)}=4$$

3. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 등차수열]

해설 : 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$(a_1+2d)+(a_1+4d)=(a_1+5d)-(a_1+d)$,

$2a_1+6d=4d$,

$d=-a_1$

이고, $a_3=1$이므로

$a_1+2d=1$에서

$a_1=-1,\ d=1$이다.

따라서 $a_8=a_1+7d=(-1)+7\times1=6$이다.

4. 정답) ① [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x\to1-}f(x)=-1$이고,

$t=-x$라 하면, $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=-1$이다. 따라서

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(-x)=(-1)+(-1)=-2$이다.

5. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $2^x=t$라 하면, t에 대한 이차방정식

$t^2-2^a\times t+b=0$의 두 근은 $t=2^0=1,\ t=2^2=4$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$2^a=1+4=5,\ b=1\times4=4$이다.

따라서 $b^a=4^a=2^{2a}=(2^a)^2=5^2=25$이다.

6. 정답) ② [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : $2x^2+4x=-x^2+10x$,

$3x^2-6x=0$,

$3x(x-2)=0$에서

두 곡선 $y=2x^2+4x$, $y=-x^2+10x$의 교점의 x좌표는

$x=0$ 또는 $x=2$이다.

열린구간 $(0,\ 2)$에서 $3x(x-2)<0$이므로

$2x^2+4x<-x^2+10x$이고, 따라서 두 곡선

$y=2x^2+4x$, $y=-x^2+10x$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2 \{(-x^2+10x)-(2x^2+4x)\}dx$

$=\int_0^2 (-3x^2+6x)dx=\Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2=(-8)+12=4$이다.

7. 정답) ② [수학Ⅰ 수열의 합]

해설 : $n\ge 2$일 때,

$na_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$

$=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=(n^2-n)-(n^2-3n+2)=2(n-1)$이므로,

$a_n=\dfrac{2(n-1)}{n}$이다. 따라서

$a_2\times a_3\times\cdots\times a_8$

$=2^7\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\cdots\times\dfrac{7}{8}\right)=2^7\times\dfrac{1}{8}$

$=2^4=16$이다.

8. 정답) ③ [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면,

$v(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)=3t^2-12t+4$,

$a(t)=\dfrac{d}{dt}v(t)=6t-12$이다.

$a(t)=6t-12=0$,

$6t=12$,

$t=2$

에서 점 P의 가속도가 0이므로 이 시각에서의 점 P의 속도는

$v(2)=3\times 2^2-12\times 2+4=-8$이다.

9. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 정적분]

해설 : 주어진 조건에 $n=0$, $n=1$을 각각 대입하면,

$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=3$

이고, 함수 $f(x)$는 이차함수이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여

대칭인 그래프임을 알 수 있다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-1)^2+k=x^2-2x+(k+1)$이라 하면,

$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=3$에서

$\int_0^1 \{x^2-2x+(k+1)\}dx=3$,

$\left[\dfrac{1}{3}x^3-x^2+(k+1)x\right]_0^1=3$,

$\dfrac{1}{3}-1+(k+1)=\dfrac{1}{3}+k=3$,

$k=\dfrac{8}{3}$

이므로 $f(x)=(x-1)^2+\dfrac{8}{3}$이고, 따라서

$f(2)=1^2+\dfrac{8}{3}=1+\dfrac{8}{3}=\dfrac{11}{3}$이다.

※ 별해

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면,

$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=3$에서

$F(1)-F(0)=F(2)-F(1)=3$,

$F(1)=F(0)+3$, $F(2)=F(1)+3=F(0)+6$

이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프 위의 세 점

$(0,\ F(0))$, $(1,\ F(1))$, $(2,\ F(2))$는

직선 $y=3x+F(0)$을 지남을 알 수 있다.

함수 $F(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{3}$인 삼차함수이므로

$F(x)=\dfrac{1}{3}x(x-1)(x-2)+3x+F(0)$

$=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+\dfrac{11}{3}x+F(0)$이다. 따라서

$f(x)=F'(x)=x^2-2x+\dfrac{11}{3}$이므로

$f(2)=2^2-2\times 2+\dfrac{11}{3}=\dfrac{11}{3}$이다.

10. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : (ⅰ) $\sin\frac{3}{2}x \ge 0$일 때,

$2\sin^2\frac{3}{2}x + \sin\frac{3}{2}x - 1 = 0$,

$\left(2\sin\frac{3}{2}x - 1\right)\left(\sin\frac{3}{2}x + 1\right) = 0$,

$\sin\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$ $\left(\because\ \sin\frac{3}{2}x \ge 0\right)$

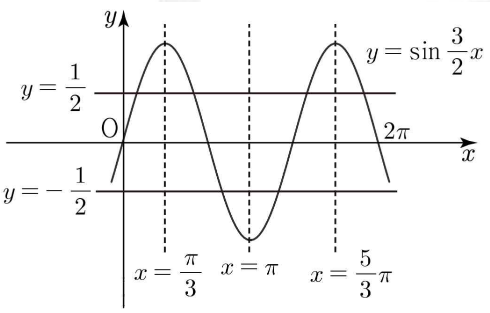
(ⅱ) $\sin\frac{3}{2}x < 0$일 때,

$2\sin^2\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x - 1 = 0$,

$\left(2\sin\frac{3}{2}x + 1\right)\left(\sin\frac{3}{2}x - 1\right) = 0$,

$\sin\frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$ $\left(\because\ \sin\frac{3}{2}x < 0\right)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해, 주어진 방정식의 해는 $0 < x < 2\pi$에서 $\sin\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin\frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$을 만족시킴을 알 수 있다.



그래프를 그려 확인하면 함수 $y = \sin\frac{3}{2}x$의 그래프의 주기는 $\frac{4}{3}\pi$이므로, $0 < x < 2\pi$일 때, 두 직선 $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$과 함수 $y = \sin\frac{3}{2}x$의 그래프의 교점은 각각 4개, 2개이고, $y = \sin\frac{3}{2}x$의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$에 대하여 대칭인 그래프이므로 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 $2\times\left(\frac{\pi}{3} + \pi + \frac{5}{3}\pi\right) = 2\times 3\pi = 6\pi$이다.

11. 정답) ① [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : $f(-1) = -a-2$이므로 $\mathrm{A}(-1,\ -a-2)$이고,

$f'(x) = 3x^2 - 2x + a$에서 $f'(-1) = a+5$이다.

따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ -a-2)$에서의 접선은

$y = (a+5)(x+1) - (a+2) = (a+5)x + 3$이고,

점 B의 x좌표는 방정식

$x^3 - x^2 + ax = (a+5)x + 3$,

$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$,

$(x+1)^2(x-3) = 0$

의 해 중에서 $x = -1$이 아닌 해이므로 $\mathrm{B}(3,\ 3a+18)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = 5 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{AB}}^2 = 25$이므로,

$(3-(-1))^2 + \{(3a+18)-(-a-2)\}^2 = 25$,

$16 + (4a+20)^2 = 25$,

$16(a+5)^2 - 9 = 0$,

$16a^2 + 160a + 391 = 0$

이고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면, 가능한 모든 실수 a의 값의 합은 -10이다.

12. 정답) ③ [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 정적분]

해설 : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$이므로

$S_1 = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{4}{3}$이다.

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = (3x-2)(x-2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x = \frac{2}{3}$에서 극대, $x = 2$에서 극소이고,

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$, $f(2) = 0$이다.

$S_2 = \frac{1}{2}\times 2\times|f(a)| = |f(a)|$이므로,

$S_1 = kS_2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = k\times|f(a)| \Leftrightarrow \frac{4}{3k} = |f(a)|$

를 만족시키는 실수 a의 개수가 3이 될 때는 $\frac{4}{3k}$의 값이 함수 $f(x)$의 극댓값과 같을 때이다. 따라서

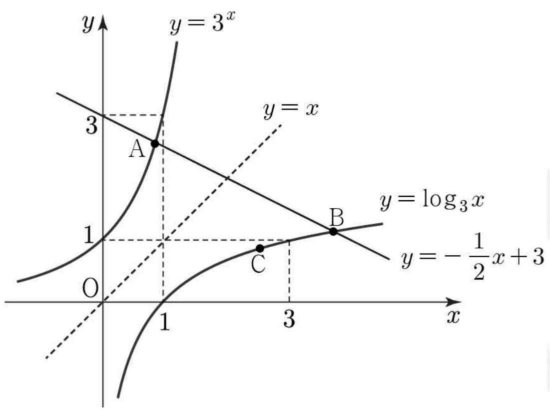
$\frac{4}{3k} = \frac{32}{27}$,

$k = \frac{9}{8}$

이다.

13. 정답) ① [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 두 곡선 $y=3^x$과 $y=\log_3 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{C}(y_1, x_1)$이라하면, 점 C는 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점이다.



ㄱ.

직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$는 두 점 $(0, 3)$, $\left(1, \frac{5}{2}\right)$를 지나고,

곡선 $y=3^x$는 점 $(1, 3)$을 지나므로

$0<x_1<1$, $\frac{5}{2}<y_1<3$이다.

또, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$는 두 점 $\left(3, \frac{3}{2}\right)$, $(4, 1)$을 지나고,

곡선 $y=\log_3 x$는 점 $(3, 1)$을 지나므로

$3<x_2<4$, $1<y_2<\log_3 4$이다.

따라서 $y_1<x_2$이고 $x_1<y_2$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2}<\sqrt{(x_2)^2+(y_2)^2}=\overline{\mathrm{OB}}$이다.

(참)

ㄴ.

두 점 $(1, 0)$, $(3, 1)$을 지나는 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 대하여

점 C는 이 직선 위에, 점 B는 이 직선 아래에 있으므로

점 $(1, 0)$과 점 $\mathrm{C}(y_1, x_1)$을 지나는 직선의 기울기는

점 $(1, 0)$과 점 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 기울기보다 크다.

$$\frac{x_1}{y_1-1}>\frac{y_2}{x_2-1}$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_2-1)>y_2(y_1-1) \quad (\because x_2>1, y_1>1)$$

(거짓)

ㄷ.

선분 AB는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$에 포함되므로

삼각비를 이용하면,

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}\times(y_1-y_2)$$

이다. 원점 O와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3 \Leftrightarrow 2x+y-6=0$

사이의 거리를 d라 하면,

$$d=\frac{|-6|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

이므로 삼각형 OAB의 넓이 k는

$$k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times d$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}(y_1-y_2)\times\frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$=3(y_1-y_2)$$

인데, ㄱ에서 $x_2>3$임을 확인했으므로

$$(y_1-y_2)x_2>3(y_1-y_2)=k$$

이다.

(거짓)

14. 정답) ② [수학Ⅱ 미분계수와 도함수]

해설 : $h(x)=|x^2-2x-8|=|(x+2)(x-4)|$에서

$h(-2)=h(4)=0$이다.

$$\lim_{x\to-2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2-}\frac{|(x+2)(x-4)|}{x+2}=-6,$$

$$\lim_{x\to-2+}\frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\frac{|(x+2)(x-4)|}{x+2}=6,$$

$$\lim_{x\to4-}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{|(x+2)(x-4)|}{x-4}=-6,$$

$$\lim_{x\to4+}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=\lim_{x\to4+}\frac{|(x+2)(x-4)|}{x-4}=6$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=-2$, $x=4$에서 미분가능하지 않고,

$x\neq-2$이고 $x\neq4$인 모든 실수 x에 대해서 미분가능하다.

$\{f(x)-g(x)\}h(x)=F(x)$라 하면

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다항함수이고,

함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은

$x=-2$, $x=4$에서 미분가능해야 한다.

$h(-2)=h(4)=0$이므로 $F(-2)=F(4)=0$이다.

$x=-2$에서 함수 $F(x)$의 미분계수를 확인하자.

$$\lim_{x\to -2-}\frac{F(x)-F(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2-}\frac{F(x)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2-}\{f(x)-g(x)\}\times\lim_{x\to -2-}\frac{|(x+2)(x-4)|}{x+2}$$
$$=-6\lim_{x\to -2}\{f(x)-g(x)\},$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{F(x)-F(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2+}\frac{F(x)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2+}\{f(x)-g(x)\}\times\lim_{x\to -2+}\frac{|(x+2)(x-4)|}{x+2}$$
$$=6\lim_{x\to -2+}\{f(x)-g(x)\}$$

이고 함수 $F(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하므로

$$F'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{F(x)-F(-2)}{x-(-2)}$$

이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로

$$-6\lim_{x\to -2}\{f(x)-g(x)\}=6\lim_{x\to -2+}\{f(x)-g(x)\}$$

이다. 따라서

$$f(-2)-g(-2)=0$$
$$\Leftrightarrow f(-2)=g(-2)\ \cdots\ ㉠$$

이고,

같은 방법으로 $x=4$에서 함수 $F(x)$의 미분계수를 확인하면

$$f(4)-g(4)=0$$
$$\Leftrightarrow f(4)=g(4)\ \cdots\ ㉡$$

이다.

다항함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $k\ (k>0)$라 하고,

다음과 같이 경우를 나누어 생각해보자.

(i) $f(x)=k$, $g(x)=\frac{1}{k}(x-1)^2(x-2)^2$일 때,

㉠에 의해 $k^2=144$이고,

㉡에 의해 $k^2=36$이므로 모순이다.

(ii) $f(x)=k(x-1)$, $g(x)=\frac{1}{k}(x-1)(x-2)^2$일 때,

㉠에 의해 $k^2=16$이고,

㉡에 의해 $k^2=4$이므로 모순이다.

(iii) $f(x)=k(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{k}(x-1)^2(x-2)$일 때,

㉠에 의해 $k^2=9$이고,

㉡에 의해 $k^2=9$이므로 $k=3$이다. ($\because\ k>0$)

따라서

$$f(x)=3(x-2),\ g(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-2)$$

이고,

$$f(4)+g(4)=6+6=12$$

이다.

(iv) $f(x)=k(x-1)(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{k}(x-1)(x-2)$일 때,

㉠에 의해 $k^2=1$이고,

㉡에 의해 $k^2=1$이므로 $k=1$이어야 하는데, $k=1$이면

$f(x)=g(x)$이므로 서로 다른 두 함수라는 조건에 모순이다.

(v) $f(x)=k(x-1)^2$, $g(x)=\frac{1}{k}(x-2)^2$일 때,

㉠에 의해 $k^2=\frac{16}{9}$이고,

㉡에 의해 $k^2=\frac{4}{9}$이므로 모순이다.

(같은 방법으로 $f(x)=k(x-2)^2$일 때에도 모순이다.)

$f(x)$의 차수가 $g(x)$의 차수보다 높은 경우는 위의 경우

(i), (ii), (iii)과 같은 방법으로 해결할 수 있고,

이때 가능한 두 함수는

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-2),\ g(x)=3(x-2)$$

이고,

$$f(4)+g(4)=6+6=12$$

이다. 따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 서로 다른

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 항상

$$f(4)+g(4)=12$$

이다.

15. 정답) ④ [수학Ⅰ 수열의 귀납적 정의]

해설 : $a_1 = 3$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 1$의 교점의 개수는 2이다.

따라서 $b_1 = 2$이다.

조건 (나)에서 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$을

여섯 번째 항까지 나열하면 아래와 같다.

$b_3 = b_2 + b_1 - 2 = 3 + 2 - 2 = 3$,

$b_4 = b_3 + b_2 - 3 = 3 + 3 - 3 = 3$,

$b_5 = b_4 + b_3 - 4 = 3 + 3 - 4 = 2$,

$b_6 = b_5 + b_4 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$

$b_6 = 0$이므로 구간 $[0,\ 12]$에서

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 6$의 교점의 개수가 0이다.

따라서 6 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n < 6$이다.

$a_1 = b_2 = 3$이므로 구간 $[0,\ 4]$에서

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 2$의 교점의 개수가 3인데,

구간 $[0,\ 2]$에서의 교점의 개수는 2이므로,

구간 $(2,\ 4]$에서의 교점의 개수는 1이다.

따라서 $a_2 = 2$이다.

$b_3 = 3$이고, 구간 $[0,\ 4]$에서

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 3$의 교점의 개수가 1이므로

구간 $(4,\ 6]$에서 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 3$의 교점의

개수는 2이다. 따라서 $3 < a_3 < 6$이고,

조건 (가)에 의해 a_3는 자연수이므로

$a_3 = 4$ 또는 $a_3 = 5$이다.

(ⅰ) $a_3 = 4$일 때,

$b_4 = 3$이므로, 구간 $[0,\ 8]$에서

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 4$의 교점의 개수가 3인데,

구간 $[0,\ 6]$에서의 교점의 개수는 1이므로,

구간 $(6,\ 8]$에서의 교점의 개수는 2이다.

따라서 $4 < a_4 < 6$이므로 $a_4 = 5$이다.

(ⅱ) $a_3 = 5$일 때,

$b_4 = 3$이므로, 구간 $[0,\ 8]$에서

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 4$의 교점의 개수가 3인데,

구간 $[0,\ 6]$에서 교점의 개수는 2이므로,

구간 $(6,\ 8]$에서의 교점의 개수는 1이다.

따라서 $a_4 = 4$이다.

$b_5 = 2$이므로, 구간 $[0,\ 10]$에서

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 5$의 교점의 개수가 2인데,

위의 두 경우 (ⅰ), (ⅱ)에서

구간 $[0,\ 8]$에서 교점의 개수는 모두 1이므로,

구간 $(8,\ 10]$에서의 교점의 개수는 1이다.

따라서 $a_5 = 5$이다.

위의 두 경우 (ⅰ), (ⅱ)에서 항상 $\sum_{n=1}^{5} a_n = 19$이고,

$b_6 = 0$이므로 $1 \le a_6 \le 5$이다. 따라서

$a_6 = 5$일 때, $\sum_{n=1}^{6} a_n$은 최댓값을 가지고

$M = 19 + 5 = 24$,

$a_6 = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{6} a_n$은 최솟값을 가지고

$m = 19 + 1 = 20$

이다. 따라서 $M + m = 24 + 20 = 44$이다.

16. 정답) 24 [수학Ⅱ 정적분]

해설 : $\int_{-2}^{2}(x^3 + 3x^2 + 2)dx = 2\int_{0}^{2}(3x^2 + 2)dx$

$= 2 \times \left[\ x^3 + 2x\ \right]_0^2 = 2 \times (2^3 + 2 \times 2) = 24$

17. 정답) 10 [수학Ⅰ 삼각함수]

해설 : $r \times \frac{\pi}{5} = 2\pi$이므로 $r = 10$이다.

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{\pi}{5} = 10\pi$

이므로 $k = 10$이다.

18. 정답) 17 [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=3$에서 극한값이 존재하므로

함수 $f(x)-2x^3$는 이차이하의 다항함수이다.

$f(x)-2x^3=ax^2+bx+c$라 하자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1}=3$$

이므로 $a=3$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2+bx+c}{x^2}=3$에서

극한값이 존재하므로 다항식 $3x^2+bx+c$는

x^2을 인수로 가져야 한다. 따라서 $b=0$, $c=0$이다.

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2$이고, $f'(x)=6x^2+6x$이므로

$$f(1)+f'(1)=5+12=17$$

이다.

19. 정답) 40 [수학Ⅰ 등비수열]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r\neq1)$이라 하면,

$$\frac{S_6}{S_2}=\frac{\frac{\frac{1}{3}(r^6-1)}{r-1}}{\frac{\frac{1}{3}(r^2-1)}{r-1}}=1+r^2+r^4,$$

$$a_2+a_4+a_6=\frac{1}{3}r+\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{3}r^5$$

이므로

$$1+r^2+r^4=\frac{1}{3}r+\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{3}r^5$$

$$=\frac{1}{3}r(1+r^2+r^4)$$

에서 $r=3$이다. 따라서

$$3S_4=3\times\frac{\frac{1}{3}(3^4-1)}{3-1}=\frac{80}{2}=40$$

이다.

20. 정답) 8 [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 조건 (나)에 의해 $\mathrm{A}(a^2,2)$, $\mathrm{B}(a^8,8)$이고,

선분 AB를 지름으로 하는 원을 C,

원 C의 중심을 점 C라 하자.

점 C는 선분 AB의 중점이므로

점 C의 y좌표는 $\frac{2+8}{2}=5$인데,

조건 (가)에서 원 C가 x축에 접하므로

원 C의 반지름의 길이는 원 C의 중심의 y좌표와 같고

따라서 원 C의 반지름의 길이는 5이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=10$이고,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(a^8-a^2)^2+36=100$$

에서

$$(a^8-a^2)^2=64,$$

$$a^8-a^2=8\ (\because\ a>1\text{이므로 } a^8>a^2)$$

이다. 이때 $k=a^2$이므로 $k^4-k=a^8-a^2=8$이다.

21. 정답) 16 [수학Ⅰ 삼각함수의 활용]

해설 : 조건 (가), (나)에서

삼각형 OAB, OBC에서 각각 사인법칙을 이용하면

$$\sin(\angle\mathrm{OAB}):\sin(\angle\mathrm{OBA})=\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OA}}=2:\sqrt{7}$$

이고,

$$\sin(\angle\mathrm{OCB}):\sin(\angle\mathrm{OBC})=\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OC}}=2:1$$

이다. 따라서 양수 k에 대하여 $\overline{\mathrm{OC}}=k$라 하면,

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{7}k,\ \overline{\mathrm{OB}}=2k$$

이다. $\angle\mathrm{BOC}=\frac{2}{3}\pi$이므로 삼각형 OBC에서 코사인법칙을 이용하면

$$28=k^2+4k^2-2\times k\times2k\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7k^2,$$

$$k=2\,(k>0)$$

이다.

점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면,

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AH}}$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 선분 AH의 길이가 최대일 때

최대이고, 선분 OA의 길이가 $\sqrt{7}k=2\sqrt{7}$로 일정하므로

선분 AH 위에 점 O가 있을 때 최댓값을 가진다.

삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때 세 삼각형

OAB, OBC, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3라 하면,

$$S_2=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3},$$

$$S_1+S_3=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AH}}-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{OH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\left(\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{OH}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times 2\sqrt{7}=14$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$$S_1+S_2+S_3=14+2\sqrt{3}$$

이다. 따라서 $a+b=14+2=16$이다.

22. 정답) 22 [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : $f'(x)=3x^2-3(t+1)x+3t+1$이므로

방정식 $f'(x)=1$의 해를 구하면,

$3x^2-3(t+1)x+3t+1=1,$

$x^2-(t+1)x+t=0,$

$(x-1)(x-t)=0$

에서 $x=1$ 또는 $x=t$이므로

$f'(1)=1,\ f'(t)=1$

이다.

따라서 l_1을 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선,

l_2를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이라 하자.

$l_1 : y=(x-1)+f(1)$

$l_2 : y=(x-t)+f(t)$

이고,

직선 $y=x$와 l_1 사이의 거리를 $d_1(t)$,

직선 $y=x$와 l_2 사이의 거리를 $d_2(t)$

라 하면, 각각 원점과 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리와 같으므로

$$d_1(t)=\frac{|f(1)-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\right|,$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}|3t-1|$$

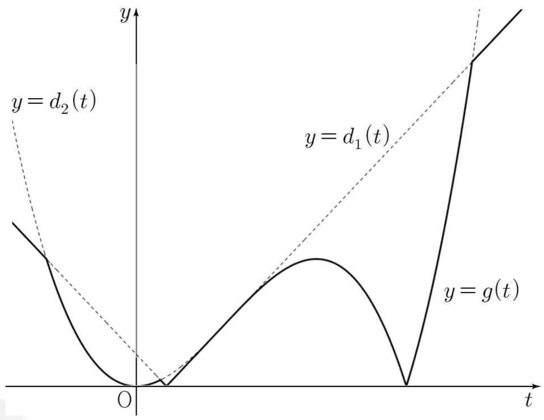
$$d_2(t)=\frac{|f(t)-t|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2\right|$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}|t^3-3t^2|$$

이다. 따라서

$$g(t)=\begin{cases} d_1(t) & (d_1(t)\le d_2(t)) \\ d_2(t) & (d_1(t)>d_2(t)) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



이때, 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 점으로 가능한 점은 두 함수 $y=d_1(t)$, $y=d_2(t)$의 그래프의 교점 또는 두 함수의 그래프가 x축과 만나는 점이다.

$d_1(t)=d_2(t)$

$\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{4}|3t-1|=\frac{\sqrt{2}}{4}|t^3-3t^2|$

$\Leftrightarrow\ |3t-1|=|t^3-3t^2|$

이므로 함수 $y=t^3-3t^2$의 그래프와 두 직선 $y=3t-1$, $y=-3t+1$로 파악해보자.

(i) 함수 $y=t^3-3t^2$의 그래프와 직선 $y=3t-1$의 교점

$t^3-3t^2=3t-1,$

$t^3-3t^2-3t+1=0,$

$(t+1)(t^2-4t+1)=0$

에서 위의 방정식은 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=t^3-3t^2$의 그래프와 직선 $y=3t-1$의 교점은 세 개이고 따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1,\ t=2\pm\sqrt{3}$에서 미분가능하지 않다.

(ii) 함수 $y=t^3-3t^2$의 그래프와 직선 $y=-3t+1$의 교점

$t^3-3t^2=-3t+1,$

$t^3-3t^2+3t-1=0,$

$(t-1)^3=0$

에서 위의 방정식은 $t=1$을 근(삼중근)으로 가진다.

따라서 함수 $y=t^3-3t^2$의 그래프와 직선 $y=-3t+1$은 $t=1$에서 접하므로 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 미분가능하다.

(iii) 두 함수 $y=d_1(t)$, $y=d_2(t)$의 그래프와 x축과의 교점

$$d_1\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ g\left(\frac{1}{3}\right)=d_1\left(\frac{1}{3}\right)<d_2\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$d_2(3)=0,\ g(3)=d_2(3)<d_1(3)$$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{3}$, $t=3$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은

$$-1+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\frac{1}{3}+3=\frac{19}{3}$$

이므로 $p+q=3+19=22$이다.

확률과 통계

23. 정답) ④ [확률과 통계 확률분포 | 이항분포]

해설 : $\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$이므로 $n=32$이다. 따라서

$\mathrm{E}(X)=32\times\frac{1}{4}=8$이다.

24. 정답) ① [확률과 통계 경우의 수 | 이항정리]

해설 : ${}_5\mathrm{C}_r\times(x^2)^r\times\left(\frac{2}{x}\right)^{5-r}={}_5\mathrm{C}_r\times x^{3r-5}\times 2^{5-r}$

에서 $r=1$일 때, $3r-5=1$이므로

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수는

${}_5\mathrm{C}_1\times 2^4=5\times16=80$이다.

25. 정답) ⑤ [확률과 통계 조건부확률 | 사건의 독립]

해설 : $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$이다.

두 사건 A와 B는 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$이다.

두 사건 A와 B가 독립일 때, 두 사건 A와 B^C도 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\text{이다.}$$

26. 정답) ③ [확률과 통계 통계적 추정 | 표본평균]

해설 : $p+\frac{1}{3}+q=1$이므로 $p+q=\frac{2}{3}$ ⋯ ㉠ 이다.

$$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=2pq+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$=2pq+\frac{1}{9}=\frac{5}{18},$$
$$\therefore\ pq=\frac{1}{12}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면,

$$p\left(\frac{2}{3}-p\right)=\frac{1}{12},$$
$$8p-12p^2=1,$$
$$12p^2-8p+1=0,$$
$$(2p-1)(6p-1)=0$$

이고 따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족하는 순서쌍 $(p,\,q)$는

$\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{6}\right)$ 또는 $\left(\frac{1}{6},\,\frac{1}{2}\right)$이다.

이때 가능한 모든 $\mathrm{E}(\overline{X})$의 값의 합은

$$\left(1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}\right)+\left(1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+1\right)=2\text{이다.}$$

27. 정답) ④ [확률과 통계 경우의 수 | 같은 것이 있는 순열]

해설 : 순서쌍 $(f(1),\,f(2),\,f(3),\,f(4))$로 가능한 조합으로 경우를 분류해보자.

(ⅰ) $(1,\,1,\,1,\,6)$일 때,

네 숫자 1, 1, 1, 6을 일렬로 배열하여 차례대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$와 대응시키는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열로 $\frac{4!}{3!}=4$,

$f(6)$으로 가능한 수는 5이므로

전체 경우의 수는 $4\times5=20$가지이다.

(ⅱ) $(1,\,1,\,2,\,3)$일 때,

위와 같은 방법으로 계산하면,

$\frac{4!}{2!}\times5=12\times5=60$가지이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 조건을 만족시키는 함수 $f : X\to X$는

$20+60=80$개다.

28. 정답) ② [확률과 통계 확률분포 | 정규분포]

해설 : 조건 (가) 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수의 그래프가
평행이동과 y축 대칭이동으로 겹쳐지므로
두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같다.
조건에서 $\mathrm{E}(X)=m$이라 하였으므로,
두 확률변수 X, Y가 따르는 정규분포를 각각
$\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(n,\ \sigma^2)$이라 하자.
조건 (가)에서
$m=2k-n$,
$\dfrac{m+n}{2}=k$이고, $f(k)=g(k)$이다.
따라서 $\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$이므로 조건 (나)에 의해
$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)=\dfrac{4}{5}$이다. 따라서
$\mathrm{P}(m\le X\le k)-\mathrm{P}(Y\le k)$
$=\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}\right)-\left(1-\dfrac{4}{5}\right)$
$=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$이다.

29. 정답) 16 [확률과 통계 조건부확률 | 독립시행의 확률]

해설 : 주사위 한 개를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{2}{3}$이므로
조건 (가,) (나)를 다시 표현하면
점 P는
$\dfrac{2}{3}$의 확률로 x축의 방향으로 1만큼,
$\dfrac{1}{3}$의 확률로 x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 1만큼
이동함을 알 수 있다. 점 P는 규칙에 따라 이동하면서
x축으로 이동하는 만큼이 y축으로 이동하는 만큼보다
크거나 같게 이동하므로,
직선 $y=x$의 점이거나 그 아래에 놓인다.
따라서 $3\le\overline{\mathrm{OP}}<4$를 만족하는 점 P의 순서쌍은
$(3,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$
이다.
$3\le\overline{\mathrm{OP}}<4$인 사건을 A,
점 P의 x좌표와 y좌표의 합이 4보다 큰 사건을 B라 하면,
$3\le\overline{\mathrm{OP}}<4$일 때, 점 P의 x좌표와 y좌표의 합이 4보다 클
확률은 조건부확률로
$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
이다.
독립시행의 확률로 계산하면,
점 P의 좌표가 $(3,\ 0)$일 확률은 ${}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$,
점 P의 좌표가 $(3,\ 1)$일 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^1=\dfrac{4}{9}$,
점 P의 좌표가 $(3,\ 2)$일 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{27}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{26}{27}$$
이고, $A\cap B$는 점 P의 좌표가 $(3,\ 2)$일 사건이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$$
이다. 따라서
$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{26}{27}}=\frac{3}{13}$$
이므로 $p+q=13+3=16$이다.

30. 정답) 108 [확률과 통계 경우의 수 | 중복조합]

해설 : 조건 (가)에 의해 빨간 공이 담기지 않은 상자는 한 개 이상이므로
각 상자에 담은 빨간 공의 개수로 가능한 순서쌍은
$(0,\ 0,\ 6)$, $(0,\ 1,\ 5)$, $(0,\ 2,\ 4)$, $(0,\ 3,\ 3)$
이다. 조건 (나)를 고려하여 빨간 공을 담은 세 상자에
노란 공을 담았을 때,
'세 상자가 모두 구분이 되는 경우'
와
'서로 구분이 되지 않는 상자들이 있는 경우'
로 나누어 경우의 수를 구해보자.

(i) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,
'세 상자가 모두 구분이 되는 경우'

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0,\ 1,\ 5)$일 때,
세 상자를 순서대로 A, B, C라 하면,
① 상자 B와 C에 노란 공을 한 개씩 담는 경우
② 상자 C에 노란 공을 두 개 담는 경우

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0,\ 2,\ 4)$일 때,
세 상자를 순서대로 A, B, C라 하면,
③ 상자 B와 C에 노란 공을 한 개씩 담는 경우
④ 상자 B에 노란 공을 두 개 담는 경우
⑤ 상자 C에 노란 공을 두 개 담는 경우

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0, 3, 3)$일 때,
빨간 공이 세 개 담긴 두 상자는 서로 구분되지 않으므로
세 상자를 순서대로 A, B, B라 하면,
⑥ 한 개의 상자 B에 노란 공을 두 개 담는 경우

따라서 (i) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,
'세 상자가 모두 구분이 되는 경우'는 6가지이고,
이때 파란 공 4개를 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이므로,
경우 (i)에 해당하는 전체 경우의 수는
$6\times{}_3\mathrm{H}_4=6\times{}_6\mathrm{C}_2=90$이다.

(ii) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,
'서로 구분이 되지 않는 상자들이 있는 경우'

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0, 0, 6)$일 때,
빨간 공이 담기지 않은 두 상자는 서로 구분되지 않으므로
세 상자를 순서대로 A, A, B라 하면,
① 상자 B에 노란 공을 두 개 담는 경우

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0, 3, 3)$일 때,
빨간 공이 세 개 담긴 두 상자는 서로 구분되지 않으므로
세 상자를 순서대로 A, B, B라 하면,
② 두 개의 상자 B에 노란 공을 각각 한 개 씩 담는 경우

따라서 (ii) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,
'서로 구분이 되지 않는 상자들이 있는 경우'는 2가지이고,
두 경우 모두 세 상자 중 한 상자는 구분이 가능하며,
남은 두 상자는 서로 구분이 되지 않는다.
이때, 파란 공 4개를 세 상자에 나누어 담는 순서쌍으로부터
위의 경우에 해당하는 경우의 수를 구하면 아래와 같다.
$(0, 0, 4)\rightarrow$ 2가지
$(0, 1, 3)\rightarrow$ 3가지
$(0, 2, 2)\rightarrow$ 2가지
$(1, 1, 2)\rightarrow$ 2가지
따라서 세 상자 중에서 두 상자가 서로 구분이 되지 않을 때
파란 공 4개를 나누어 담는 방법의 수는 9이므로,
경우 (ii)에 해당하는 전체 경우의 수는
$2\times9=18$이다.

따라서 경우 (i), (ii)에서 구할 수 있는 전체 경우의 수는
$90+18=108$이다.

미적분

23. 정답) ④ [미적분 여러 가지 적분법]

해설 : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2x\,dx=2\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2x\,dx$

$$=2\times\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

24. 정답) ③ [미적분 수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n}\times na_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}\times\lim_{n\to\infty}na_n=3\lim_{n\to\infty}na_n=6$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}na_n=2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n^2+3}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{3}\times\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{na_n\times\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}na_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\times2\times2=\frac{4}{3}$$

25. 정답) ① [미적분 도함수의 활용]

해설 : $y'=-2\sin2x-2x$,
$y''=-4\cos2x-2$에서 변곡점의 x좌표가 α이므로

$$-4\cos2\alpha-2=0,$$

$$\cos2\alpha=-\frac{1}{2}$$

이다.

$\cos2\alpha<0$이고, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$이고,

$$\tan^2 2\alpha=\sec^2 2\alpha-1=(-2)^2-1=3$$

에서 $\tan2\alpha<0$이므로 $\tan2\alpha=-\sqrt{3}$이다.

26. 정답) ② [미적분 여러 가지 미분법]

해설 : $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$이므로

$$\int_1^{13}\frac{g(x)}{f'(g(x))}dx=\int_1^{13}g(x)g'(x)dx$$

에서 $g(x)=t$로 치환하여 치환적분법을 이용하면,

$$\int_{g(1)}^{g(13)}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{g(1)}^{g(13)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\{g(13)\}^2-\{g(1)\}^2\right]=2$$

에서 $f(0)=1$이므로 $g(1)=0$이다. 따라서

$$\{g(13)\}^2=4+\{g(1)\}^2=4$$

이다.

이때, 함수 $f(x)$의 역함수가 실수 전체에서 정의되어 있으므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고

따라서 $g(x)$ 또한 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.

따라서 $g(13)>g(1)$이어야 하므로

$$\{g(13)\}^2=4,$$

$$g(13)=2 \Leftrightarrow f(2)=13$$

이다. $f(2)=2^3+2a+1=13$이므로 $a=2$이고,

$$f(x)=x^3+2x+1,\ f'(x)=3x^2+2$$

에서

$$f(1)=4 \Leftrightarrow g(4)=1$$

이므로 $g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$이다.

27. 정답) ① [미적분 급수]

해설 : $\angle D_1B_1M_1=\angle E_1C_1M_1=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{B_1D_1}=\overline{C_1E_1}=1$이므로

두 부채꼴 $B_1M_1D_1$, $C_1M_1E_1$의 넓이의 합은

$$2\times\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

이다. 따라서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이는 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

그림 R_2에서 선분 B_2N_1이 부채꼴 $B_1M_1D_1$에

접하는 점을 H라 하자.

삼각형 B_1HB_2는 $\angle B_1HB_2=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고,

$\angle AB_2C_2=\angle C_2B_2N_1=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\angle B_1B_2H=\dfrac{\pi}{3}$이다.

$\overline{B_1H}=1$이므로 $B_1B_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이고, 따라서

$\overline{AB_2}=\overline{AB_1}-\overline{B_1B_2}=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 그림 R_2에 새로 색칠한 도형은 한 변의 길이가

$\overline{B_2M_2}=\overline{B_2D_2}=\overline{C_2E_2}$이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$인

두 부채꼴이고, 이 도형은 R_1에서 색칠한 도형과 닮음이다.

이때 두 도형의 넓이비는

$$\overline{AB_1}^2:\overline{AB_2}^2=2^2:\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=1:\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$$

이므로 그림 R_n에 색칠되어있는 부분의 넓이 S_n에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{3}+1}{11}\pi$$

이다.

28. 정답) ⑤ [미적분 도함수의 활용]

해설 : $f'(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2+a}$, $f''(x)=(x+1)(x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2+a}$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $e^{-\frac{1}{2}x^2+a}>0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극대이고,

두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$은 함수 $y=f(x)$의

그래프의 변곡점이다.

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

y축에 대하여 대칭인 그래프이고, 따라서 두 변곡점에서의

접선은 y축의 한 점에서 교차한다.

이때, 조건에 의하여 변곡점에서의 접선이 교차하는

점의 좌표가 $(0, 2)$임을 알 수 있다.

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식을 구하면,

$$y=f'(1)(x-1)+f(1),$$

$$y=-e^{-\frac{1}{2}+a}(x-1)+e^{-\frac{1}{2}+a},$$

$$y=-e^{-\frac{1}{2}+a}+2\cdot e^{-\frac{1}{2}+a}$$

이고, 이 직선이 y축 위의 점 $(0, 2)$를 지나므로

$$2\cdot e^{-\frac{1}{2}+a}=2,$$

$$e^{-\frac{1}{2}+a}=1,$$

$$-\frac{1}{2}+a=0,$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

이다.

29. 정답) 8 [미적분 여러 가지 함수의 미분]

해설 : $g(\theta)-f(\theta)=\triangle\mathrm{ACE}-\triangle\mathrm{CDE}$이므로

두 삼각형 ACE, CDE의 넓이를 이용하자.

$\angle\mathrm{DEC}=2\theta$, $\angle\mathrm{DEC}=\angle\mathrm{DBE}+\angle\mathrm{BDE}$이므로

$\angle\mathrm{BDE}=\theta$이다. 따라서 삼각형 BDE는

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{DE}}$인 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{BE}}$$

이다.

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{BE}}=l(\theta)$$

라 하자.

$$\overline{\mathrm{BD}}=2\cdot l(\theta)\cdot\cos\theta,\ \overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\cos\theta}$$

이므로

$$l(\theta)=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{BD}}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}-2\cdot l(\theta)\cdot\cos\theta$$

에서

$$(2\cos\theta+1)\cdot l(\theta)=\frac{1}{\cos\theta},$$

$$\therefore\ l(\theta)=\frac{1}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}$$

이고,

$$\lim_{\theta\to0}l(\theta)=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}=\frac{1}{3}$$

이다.

$$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BE}}=1-l(\theta),$$

$$\overline{\mathrm{AC}}=\tan\theta$$

이므로

$$\begin{aligned}g(\theta)-f(\theta)&=\triangle\mathrm{ACE}-\triangle\mathrm{CDE}\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{AC}}-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\sin2\theta\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\left(\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{DE}}\times\sin2\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\{1-l(\theta)\}\{\tan\theta-l(\theta)\cdot\sin2\theta\}\end{aligned}$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to0}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\theta}\\&=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{1}{2}\{1-l(\theta)\}\{\tan\theta-l(\theta)\cdot\sin2\theta\}}{\theta}\\&=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0}\{1-l(\theta)\}\times\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta-l(\theta)\cdot\sin2\theta}{\theta}\\&=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left\{\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}-\lim_{\theta\to0}l(\theta)\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left\{\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}-\lim_{\theta\to0}l(\theta)\times\lim_{\theta\to0}\frac{\sin2\theta}{\theta}\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\times2\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

이고, $k=\frac{1}{9}$이므로 $72k=72\times\frac{1}{9}=8$이다.

30. 정답) 10 [미적분 도함수의 활용+정적분의 활용]

해설 : $f(x)=\int_0^x\frac{s}{ts^2+1}ds$에서 $ts^2+1=\alpha$로 치환하면,

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x\frac{s}{ts^2+1}ds\\&=\int_2^{tx^2+2}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{2t}d\alpha\\&=\frac{1}{2t}\times\Big[\ln\alpha\Big]_1^{tx^2+1}\\&=\frac{1}{2t}\ln\left(tx^2+1\right)\ \cdots\ ㉠\end{aligned}$$

이다. 이때,

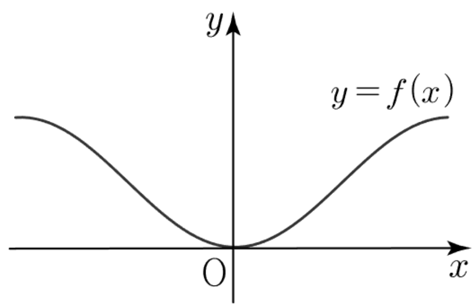
$$f'(x)=\frac{x}{tx^2+1}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=0$을 갖고,

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

y축에 대하여 대칭인 그래프이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형 그리면 아래와 같다.



함수 $g(x)=|4f(x)-a|$에 대하여 $g(-x)=g(x)$이므로
함수 $y=g(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭인 그래프이다.

만약 $a\le 0$이면 모든 실수 x에 대하여 $4f(x)-a>0$이고,
$x>0$에서 $g(x)$는 증가하므로

$$M(t)=g(\sqrt{t})$$

이고 두 함수 $y=g(x)$, $y=\sqrt{x}$는 $x>0$에서 미분가능하므로
함수 $M(t)$가 $t=1$에서 미분가능하지 않음에 모순이다.
따라서 $a>0$이다.

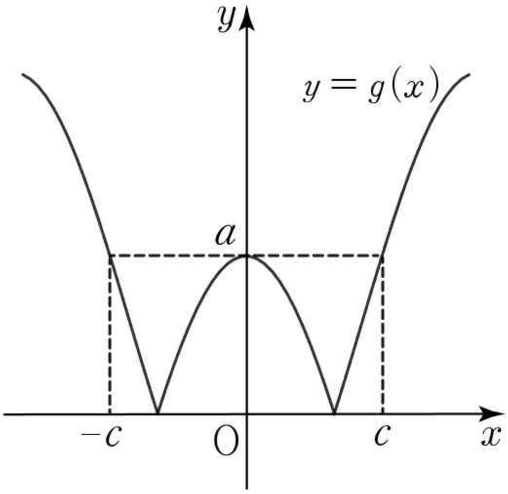
$$g(0)=a=g(c)$$

를 만족시키는 양수 c에 대하여

$$g(-c)=g(0)=g(c)=a$$

이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



따라서 함수 $M(t)$의 식을 나타내면

$$M(t)=\begin{cases} a & (0<\sqrt{t}<c) \\ 4f(\sqrt{t})-a & (\sqrt{t}\ge c) \end{cases}$$

이다. 함수 $M(t)$는 두 구간

$$(0,\ c^2),\ (c^2,\ \infty)$$

에서 미분가능하고 미분가능하지 않은 점 $t=1$이 존재하므로

$$c^2=1,$$

$$c=1\ \ (\because\ c>0)$$

이다.

따라서 $t=1$일 때, ㉠에서

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

이고,

$$a=g(1)$$

에서

$$a=4f(1)-a,$$

$$2a=4f(1),$$

$$a=2f(1)$$

이므로

$$a=2\times\frac{1}{2}\ln(1^2+1)=\ln 2$$

이다.

$$M(t)=\begin{cases} a & (0<t<1) \\ 4f(\sqrt{t})-a & (t\ge 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ M(t)=\begin{cases} \ln 2 & (0<t<1) \\ \frac{2}{t}\ln(t^2+1)-\ln 2 & (t\ge 1) \end{cases}$$

이고,

$$M'(t)=\begin{cases} 0 & (0<t<1) \\ -\frac{2}{t^2}\ln(t^2+1)+\frac{4}{t^2+1} & (t\ge 1) \end{cases}$$

이다. 이때, $\sqrt{3}>1$이므로

$$M'(\sqrt{3})=-\frac{2}{3}\ln 4+\frac{4}{4}$$

$$=-\frac{4}{3}\ln 2+1$$

이고, 따라서

$$a-M'(\sqrt{3})=\ln 2-\left(-\frac{4}{3}\ln 2+1\right)$$

$$=\frac{7}{3}\ln 2-1$$

이므로 $p+q=3+7=10$이다.

기하

23. 정답) ⑤ [기하 공간좌표]

해설 : 점 $(2, a, 4)$를 xy평면에 내린 수선의 발은 $(2, a, 0)$이다.

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=3+2=5$이다.

24. 정답) ② [기하 이차곡선 | 포물선]

해설 : 점 $(4, a)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$$a^2=4\times4=16$$

이다. 이때, $a=4$ 또는 $a=-4$인데,

$a=4$이면 점 $(4, a)$는 제1사분면 위의 점이므로

이 점도 반드시 제1사분면을 지난다.

따라서 $a=-4$이다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4, -4)$에서의 접선은

$$-4y=2(x+4),$$

$$y=-\frac{1}{2}x-2$$

이므로 y절편은 -2이다.

25. 정답) ④ [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로 주어진 식에서

$$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

이고, 양변을 제곱하면,

$$|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2$$

이다.

$|\overrightarrow{AB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k$라 하면,

$$4^2-2k+(2\sqrt{2})^2=k^2,$$

$$k^2+2k-24=0,$$

$$(k+6)(k-4)=0,$$

에서 $k=-6$ 또는 $k=4$이고

$k=|\overrightarrow{AB}|>0$이므로 $k\neq-6$이다.

따라서 $k=|\overrightarrow{AB}|=4$이다.

26. 정답) ③ [기하 공간좌표]

해설 : 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2$의 중심 $(a, b, 0)$에서

yz평면까지의 거리는 $|a|$이고,

yz평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 4이므로

$$a^2+4^2=r^2 \cdots ㉠$$

이다.

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2$의 중심 $(a, b, 0)$에서

zx평면까지의 거리는 $|b|$이고,

zx평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로

$$b^2+(2\sqrt{3})^2=r^2 \cdots ㉡$$

이다.

㉠+㉡을 하면,

$$a^2+b^2+28=2r^2$$

이고, 원점에서 구의 중심 $(a, b, 0)$까지의 거리가 4이므로

$$a^2+b^2=16$$

이다. 따라서

$$2r^2=16+28=44,$$

$$r^2=22$$

이다.

27. 정답) ① [기하 벡터의 연산]

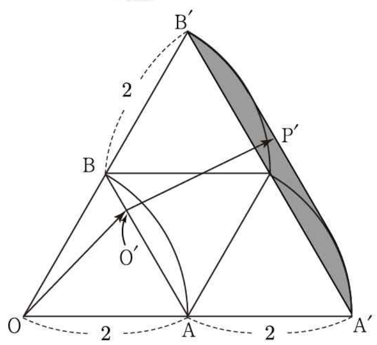
해설 : 현 AB 위의 한 점 O′을 시점으로 하고

크기와 방향이 $\overrightarrow{OP}$와 같은 벡터를 $\overrightarrow{O'P'}$이라 하자.

점 Q는 현 AB 위의 임의의 점이므로

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{O'P'}=\overrightarrow{OP'}$$

이다. 따라서 점 R이 나타내는 도형은 점 P′이 나타내는 도형과 같고, 칠하여 나타내면 아래 그림과 같다.



따라서 점 R이 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$$3\times\overline{AB}+2\times\frac{\pi}{3}=6+\frac{2}{3}\pi$$

이다.

28. 정답) ② [기하 이차곡선 | 타원]

해설 : 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{a^2}=1$의 장축의 길이는 10이므로

$$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=10$$

이다. 정삼각형 $\mathrm{BPF'}$의 한 변의 길이를 k라 하면,

$$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{AP}}$$
$$=5+k+\overline{\mathrm{AP}}=10$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=5-k$$

이고,

$$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{BF'}}$$
$$=k+\overline{\mathrm{PF}}+k=10$$

이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=10-2k=2(5-k)$$

이다.

$$\angle\mathrm{APF}=\angle\mathrm{BPF'}\ (\text{맞꼭지각})$$

이므로 삼각형 APF에서 코사인법칙을 이용하면,

$$\overline{\mathrm{AF}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\cos(\angle\mathrm{APF}),$$

$$25=(5-k)^2+4(5-k)^2-2(5-k)\times 2(5-k)\times\frac{1}{2},$$

$$25=3(5-k)^2,$$

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(5-k)^2=\frac{25}{3},$$

$$\overline{\mathrm{AP}}=5-k=\frac{5}{3}\sqrt{3}\ \ (\because\ \overline{\mathrm{AP}}>0)$$

이다.

29. 정답) 26 [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : 두 점 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{P}(4,2)$를 지나는 직선은 $x-y-2=0$이다.

점 C에서 직선 $x-y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$가 이루는 예각을 θ라 하면

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\theta,\ \ |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=2\sqrt{2}$$

이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\theta$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$$
$$=2\sqrt{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=12+4\sqrt{2}$$

에서

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=3\sqrt{2}+2$$

이다.

두 점 C, H를 지나는 직선을 l이라 하면,

직선 l은 직선 $x-y-2=0$과 수직이므로

$$l: x+y+a=0$$

이라 할 수 있다.

점 P와 직선 l 사이의 거리는 $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=3\sqrt{2}+2$이므로

$$\frac{|4+2+a|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+2,$$

$$|6+a|=6+2\sqrt{2}\ \cdots\ ㉠$$

이다. 또, 직선 l은 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원과 점 C에서 만나야 하므로,

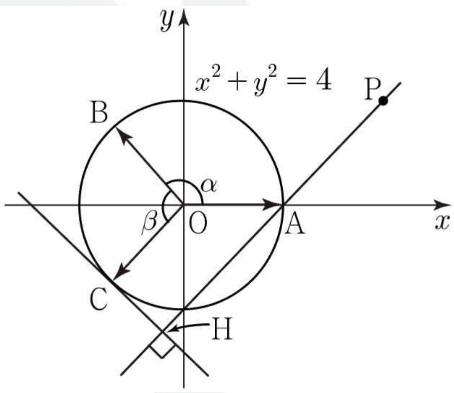
$$\frac{|a|}{\sqrt{2}}\le 2,$$

$$|a|\le 2\sqrt{2}\ \cdots\ ㉡$$

이다. ㉠, ㉡에 의해 $a=2\sqrt{2}$이고, 이때, 원점 O와 직선 $l: x+y+2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는 2이므로

직선 l은 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원과 접하고,

이때의 접점이 점 $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$이다.



위의 그림과 같이

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각을 α,

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 이루는 각을 β

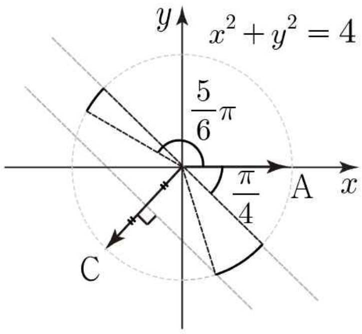
라 하자.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\alpha=4\cos\alpha,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\beta=4\cos\beta$$

이므로

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\alpha\le\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ 0\le\cos\beta\le\frac{1}{2}$$

이고, 점 B의 위치로 가능한 점들을 나타내면 아래 그림 같다.



따라서 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이의

최댓값과 최솟값은 각각

$$M\pi = 2\times\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi,$$

$$m\pi = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

이므로 $M=\frac{5}{3}$, $m=\frac{1}{2}$이다. 따라서

$$12(M+m) = 12\times\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\right) = 20+6=26$$

이다.

30. 정답) 384 [기하 공간도형]

해설 : 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 점 B′이라 할 때,

조건 (나)에서 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 4이므로 $\overline{A'B'}=4$이다.

삼각형 BA′B′은 $\angle BB'A'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고,

$\overline{A'B'}=4$, $\overline{BA'}=5$이므로 $\overline{BB'}=3$이다.

평면 ABC와 평면 α의 교선이 직선 l이므로,

직선 l은 평면 ABC와 평면 α에 포함되고,

점 C도 평면 ABC와 평면 α에 포함되므로

점 C는 직선 l 위의 점이다.

두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각

P, Q라 하였으므로,

$$\angle APC = \angle BQC = \frac{\pi}{2}$$

이고, 두 점 A′, B′은 각각 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\angle A'PC = \angle B'QC = \frac{\pi}{2}$$

이다.

조건 (다)에서 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$라고 하였으므로,

$$\angle APA' = \angle BQB' = \frac{\pi}{4}$$

이고, 따라서 두 삼각형 APA′, BQB′은 직각이등변삼각형이다.

이때,

$$\overline{AA'}=5,\ \overline{BB'}=3$$

이므로

$$\overline{AP}=5\sqrt{2},\ \overline{BP}=3\sqrt{2}$$

이다.

점 B′에서 선분 A′P에 내린 수선의 발을 H라 하자.

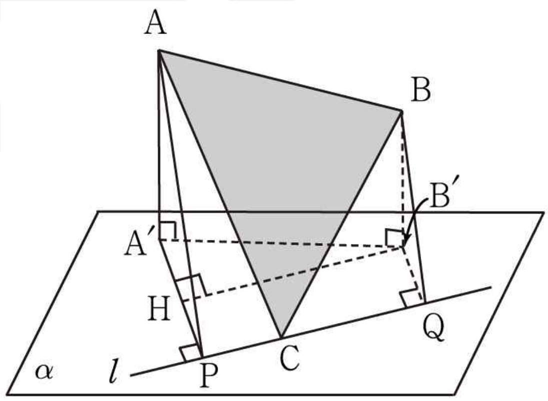
삼각형 A′B′H는 $\angle A'HB'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고,

$$\overline{A'H}=\overline{A'P}-\overline{HP}$$
$$=\overline{A'P}-\overline{B'Q}=5-3=2$$

이므로 삼각형 A′B′H에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{B'H}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

이다.



두 선분 AP, BQ는 모두 직선 l과 수직이므로 사각형 ABQP는 사다리꼴이고, 그 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{AP}+\overline{BQ})\times\overline{PQ}$$

이고,

$$\overline{PQ}=\overline{B'H}=2\sqrt{3},\ \overline{AP}=5\sqrt{2},\ \overline{BP}=3\sqrt{2}$$

이므로 사각형 ABQP의 넓이 k는

$$k=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{6}$$

이다. 따라서

$$k^2=(8\sqrt{6})^2=384$$

이다.