

<극한이 포함된 다항함수의 결정>

땡수학 연구실 / 수학 칼럼

고3, n수생, 그리고 예비 고3 여러분들 안녕하세요! <땡수학 연구실>입니다.

8월 27일 금요일 저녁 10시 30분

'2022학년도 9월 대비 MC THE MATH 모의고사'

가 OrbiQ에서 실시간 시행될 예정인데요. 그전에 저희의 지난 모의고사 문제와 함께

가볍게 가져가실 수 있는 내용 하나를 칼럼으로 소개해드리려 합니다!

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)f'(x)} = \frac{1}{2}$$

을 만족시킨다. $f(3) = 12$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 k 이다.

실수 k 에 대하여 $81k$ 의 값을 구하시오. [4점]

지난 5월에 실시한 '2022학년도 6월 대비 MC THE MATH 모의고사'의 공통영역 20번 문제입니다.

삼차함수의 미정 계수를 결정하는 문제이고, 도함수가 포함된 극한의 꼴입니다.

극한을 포함한 등식이 조건으로 주어진 경우

① 극한의 존재성과 ② 극한값

의 두 가지 조건을 한 번에 제시해준 것으로 생각할 수 있는데요.

위의 문제에서는 ① '함수 $f(x)$ 가 반드시 $(x-1)$ 을 인수로 가져야 한다.' 와,

'그 극한값을 계산하면 ② $\frac{1}{2}$ 이다.' 라는 두 조건을 제시했다고 생각할 수 있습니다.

위 문제의 풀이는 다음과 같습니다.

20. 정답) 12 [수학II 함수의 극한 + 도함수의 활용]

해설 : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$ 의 극한값이 존재하고,

분모가 0으로 수렴하므로 $f(1) = 0$ 이다.

$f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$ 라 하면,

$f'(x) = (x^2 + ax + b) + (x-1)(2x + a)$ 이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + ax + b)}{(x-1)\{(x^2 + ax + b) + (x-1)(2x + a)\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{(x^2 + ax + b) + (x-1)(2x + a)}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) \neq 0$ 이면 극한값이 1이 되므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0 \text{이다.}$$

따라서 $b = -a - 1$ 이고,

$x^2 + ax + b = x^2 + ax - a - 1 = (x-1)(x + a + 1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{(x^2 + ax + b) + (x-1)(2x + a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x + a + 1)}{(x-1)(x + a + 1) + (x-1)(2x + a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + a + 1}{3x + 2a + 1}$$

이고, $a = -2$ 이면 극한값이 $\frac{1}{3}$ 이 되므로 $a \neq -2$ 이다.

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + a + 1}{3x + 2a + 1} = \frac{a + 2}{2a + 4} = \frac{1}{2} \text{임을 알 수 있다.}$$

$f(x) = (x-1)^2(x + a + 1)$ 에서 $f(3) = 12$ 이므로

$$f(3) = 4(a + 4) = 12, \quad a = -1 \text{이다.}$$

따라서 $f(x) = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$,

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{1}{3} \text{에서 극댓값 } k = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{27} \text{를 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } 81k = 81 \times \frac{4}{27} = 3 \times 4 = 12 \text{이다.}$$

이 문제를 들고 온 이유는 위와 같은 꼴의 극한의 재밌는 성질 때문인데요.

※ 이하의 설명은 편의를 위해 합성함수의 미분법 $\{(x-a)^n\}' = n(x-a)^{n-1}$ 을 사용하였습니다.

위의 ①번에 의하면 가능한 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b), \quad f(x) = (x-1)^2(x + c), \quad f(x) = (x-1)^3$$

의 세 가지 경우가 있습니다. 위의 일반적인 경우인 다항함수 $g(x)$ 에 대하여

$$f(x) = (x - a)^n g(x) \quad (g(a) \neq 0)$$

라고 할 때, 극한 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)f'(x)}$ 을 살펴보도록 하겠습니다.

$$f'(x) = n(x - a)^{n-1}g(x) + (x - a)^n g'(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^n g(x)}{(x - a) \{n(x - a)^{n-1}g(x) + (x - a)^n g'(x)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^n g(x)}{n(x - a)^n g(x) + (x - a)^{n+1} g'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{ng(x) + (x - a)g'(x)} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이는 다항함수 $f(x)$ 가 $(x - a)^n$ 을 인수로 가지면

그 도함수 $f'(x)$ 는 $(x - a)^{n-1}$ 을 인수로 가짐을 생각하면 쉽게 파악할 수 있고,

실제 적용할 수 있는 내용은 방금 언급한 정도일 것 같습니다.

위의 결과를 응용하면, 앞서 제시한 문제의 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x - 1)^n g(x), \quad n = 2$$

인 꼴이어야 하므로, 곧바로

$$f(x) = (x - 1)^2(x + c)$$

로 놓고 계산을 줄여나갈 수 있습니다.

위의 문제와 극한식의 꼴은 다소 특이한 경우이기 때문에

실제 시험에서 위의 극한식이 제시되지 않는 이상 단순 암기는 별 도움이 되지 않을 수 있습니다.

이와 같은 극한을 포함한 다항함수의 결정에 대한 대부분의 문제는 앞서 언급하였듯,

① 극한의 존재성과 ② 극한값

의 두 조건의 파악으로 해결이 가능할 것입니다.

저희의 문제와 칼럼을 통해 실제 시험에 나올 유형을 암기하는 것보다는

하나의 문제, 하나의 유형에서 다양한 결과를 얻어내는 것의 유익함을 말씀드리고 싶었습니다.

수능 이전의 마지막 평가원 모의고사, 9월 모의고사에서 본인의 실력을 점검하고,

앞으로의 공부 방향성을 잘 잡는 것이 필요합니다.

그 이전에 저희 <땡수학 연구실>에서 준비한

8월 27일 금요일 저녁 10시 30분

2022학년도 9월 대비 MC THE MATH 모의고사

를 실제 모의고사 이전에

본인의 실력을 점검하고 다양한 문제를 경험하는 용도로 풀어보시면 좋겠습니다.

실시간 시행 이후에 문제지와 해설지 파일이 올라갈 예정입니다.

더욱 양질의 콘텐츠로 찾아뵙겠습니다. 감사합니다.