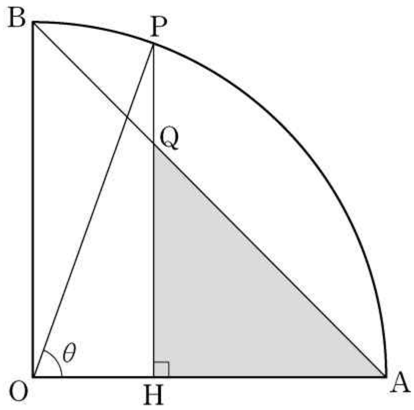
미적분 수능 기출 문제

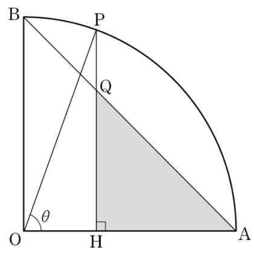
2017학년도

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle POH = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

정답. ①

생각의 흐름

1. AQH는 직각이등변삼각형이다.

2. $S(\theta) = \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{HQ}}$

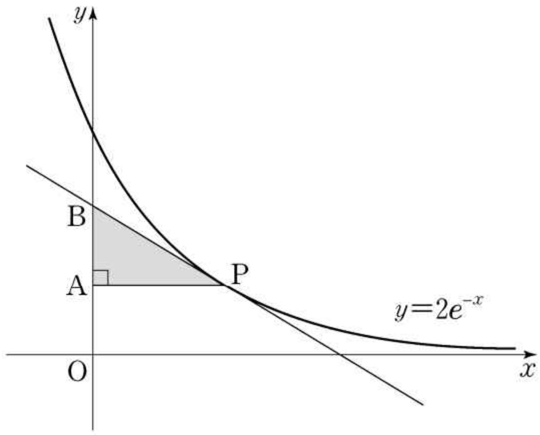
3. $\overline{\mathrm{AH}}$나 $\overline{\mathrm{HQ}}$중 θ에 관하여 표현될 수 있는 선분이 있는가?

⇒있다. $\overline{\mathrm{AH}} = 1 - \overline{\mathrm{OH}} = 1 - \cos\theta$이다.

4. 마지막에 삼각형 넓이 계산은 모두 곱하기이므로 $1 - \cos\theta \to \frac{1}{2}\theta^2$으로 계산

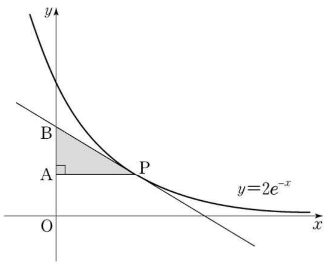
15. 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$ $(t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은? [4점]

① 1　　② $\frac{e}{2}$　　③ $\sqrt{2}$　　④ 2　　⑤ e



15. 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$ $(t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은? [4점]

① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ e



정답. ④

생각의 흐름

1. 최대가 되도록 하는 t의 값? 삼각형 APB의 넓이는 t에 대해 표현되는가?

⇒표현될 수 있을 것 같다. 점 A,B의 y좌표가 각각 t에 대해 표현될 수 있기 때문

2. 점 B의 y좌표는 접선의 방정식을 통해 구해야겠다.

20. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_{0}^{x}\sin(t^2)\,dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$ 을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$ 을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답. ⑤

생각의 흐름

1. $\int_0^x \sin(t^2)dt$은 직접 값을 구할 순 없고, 미분하면 $\sin(x^2)$이라는 것 정도는 쓸 수 있겠다.

2. $f(\sqrt{\pi})$? 직접 계산할 순 없지만... $\sin(x^2)$은 $0<x<\sqrt{\pi}$에서 0보다 크니까 적분값도 0보다는 크겠지!

3. $f'(a)>0$을 만족시키는~ 적어도 하나 존재? 평균값 정리인가?
$\Rightarrow f(0)=0, f(\sqrt{\pi})>0$, 평균값 정리 맞네.

4. $f'(b)=0$을 만족시키는 ~ 적어도 하나 존재? 롤의 정리인가?
$\Rightarrow f(\sqrt{\pi})\neq 0$이니까 롤의 정리는 아니고...

5. $\int_0^x \sin(t^2)dt$ 미분은 가능했는데... 도함수를 구해서 부호를 조사해야 하나...

$\Rightarrow f'(x)=(-\int_0^x \sin(t^2)dt+\sin(x^2))e^{-x}$

6. 여전히 값은 못 구하겠지만 ㄱ에서 $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt>0$인 것은 확인했는데... 그렇다면 $f'(\sqrt{\pi})$의 부호는?
$\Rightarrow f'(\sqrt{\pi})<0$ 따라서 사잇값 정리로 ㄷ 판정할 수 있구나.

21. 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\,,\ \ \int_0^1 |\,f(x)\,|\,dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_0^x |\,f(t)\,|\,dt \quad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

21. 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\,,\ \int_0^1 |f(x)|\,dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt \quad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

정답. ④

생각의 흐름

1. $\int_0^1 f(x)dx$값이랑 $\int_0^1 |f(x)|dx$값이 다른 걸 보니 0과 1 사이에 $f(x)$의 부호 변경 지점이 있구나.

2. 그런데 $f(x)$는 증가하는 연속함수, 부호 변경 지점은 한 군데이다. $\int_0^1 f(x)dx$값이랑 $\int_0^1 |f(x)|dx$값이 둘 다 나와있으니 부호 변경 지점 이전 적분 값, 이후 적분 값 다 알 수 있겠다.

3. $F'(x) = |f(x)|$인데 구하는 것은 $\int_0^1 f(x)F(x)dx$? $f(x)$가 아니라 $|f(x)|$면 좋을 텐데
$\Rightarrow f(x)$와 $|f(x)|$는 관계가 있는데?

4. 부호변경 지점 이전에는 $f(x) = -|f(x)|$, 이후에는 $f(x) = |f(x)|$

5. 부호 변경 지점 이전 적분 값, 이후 적분 값 다 알 수 있으니 구간 나눠서 치환적분 값 대입해야지,

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
> $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는
> $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다.
> (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는
> 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다
> 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
> $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는
> $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다.
> (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는
> 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다
> 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$ 일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

정답. 216

생각의 흐름

1. 미분가능한 $f(x)$의 극대, 극소를 판정하기 위해 $f(x)$를 미분해볼까?

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x-a)g'(x)-g(x)}{(x-a)^2}$ 분자 사차함수의 부호변화가 곧 $f'(x)$의 부호변화구나.

2. 조건 (나)에서 $g(\alpha)=M(\alpha-a)$, $g(\beta)=M(\beta-a)$
그리고 $g(\alpha)=g'(\alpha)(\alpha-a)$, $g(\beta)=g'(\beta)(\beta-a)$

3. 위 식은 많이 본 형태인데?
$g(\alpha)=g'(\alpha)(\alpha-a)$은 $g(x)$가 $g'(\alpha)(x-a)$와 접한다는 뜻,
$g(\beta)=g'(\beta)(\beta-a)$은 $g(x)$가 $g'(\beta)(x-a)$와 접한다는 뜻
그런데 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$이네?
$\Rightarrow g(x)-M(x-a)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이네.

4. $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 몇 개일까?
$\Rightarrow$일단 $x=\alpha, x=\beta$에서 각각 극대가 되었으니까 그 사이에 극소가 존재하니까 최소 3개...
더 있을까?
$f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 $(x-a)g'(x)-g(x)$의 부호 변동 개수와 같은데...
$g(a)=-(a-\alpha)^2(a-\beta)^2$으로 0보다 작으니까 $\lim\limits_{x\to a+}\{(x-a)g'(x)-g(x)\}>0$
x가 a일 때부터 α일 때까지는 부호 변화가 없네. $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3개!

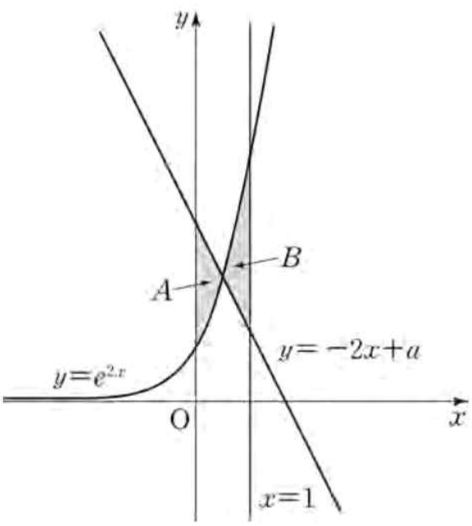
5. $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3보다 작아야겠네!
$\Rightarrow M$의 값이 $-4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2})$의 극솟값보다는 커야겠다.

2018학년도

12. 곡선 $y=e^{2x}$과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=e^{2x}$과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $1<a<e^2$) [3점]

① $\dfrac{e^2+1}{2}$ ② $\dfrac{2e^2+1}{4}$ ③ $\dfrac{e^2}{2}$

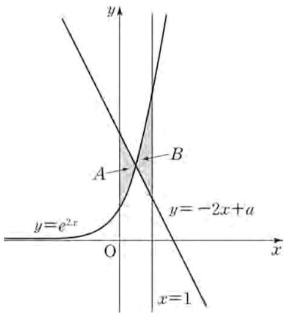
④ $\dfrac{2e^2-1}{4}$ ⑤ $\dfrac{e^2-1}{2}$



12. 곡선 $y=e^{2x}$과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=e^{2x}$과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $1<a<e^2$) [3점]

① $\frac{e^2+1}{2}$ ② $\frac{2e^2+1}{4}$ ③ $\frac{e^2}{2}$

④ $\frac{2e^2-1}{4}$ ⑤ $\frac{e^2-1}{2}$



정답. ①

생각의 흐름

1. A의 넓이와 B의 넓이? 적분?

2. 그런데 e^{2x}와 $-2x+a$의 대소관계가 바뀌네?

3. $e^{2x}+2x-a$를 구간만큼 그대로 정적분하면 값이 0이겠네.

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

정답. ④

생각의 흐름.

1. $\frac{1}{1+e^{-t}}$는 적분할 수 있는 함수인가?

⇒바로 부정적분이 떠오르지 않는데... 부분적분이나 치환적분을 사용해야겠다.

2. e^{-t}에 대한 합성함수... e^t꼴이 곱해져 있으면 어떻게 치환적분을 해보겠는데...

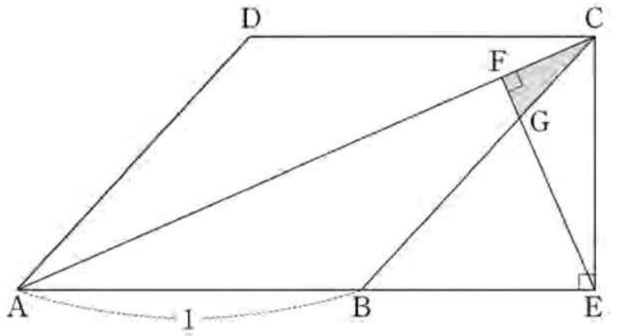
3. 분모 분자에 각각 e^t을 곱하면 분모는 e^t를 합성한 함수, 분자에는 e^t

⇒적분할 수 있는 꼴이네!

4. $f(x)=\int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}dt=\ln\frac{e^x+1}{2}$!

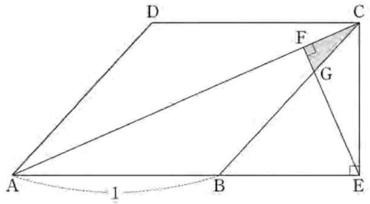
대입해서 계산해야지.

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle \mathrm{DAB} = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

정답. ③

생각의 흐름.

1. $S(\theta) = \overline{\mathrm{CF}} \times \overline{\mathrm{FG}}$ 각각이 θ에 대한 식으로 표현되어야 하는데

2. $\overline{\mathrm{FG}} = \overline{\mathrm{CF}} \times \tan\frac{\theta}{2}$니까 $\overline{\mathrm{CF}}$만 θ에 대한 식으로 표현하면 된다.

3. $\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{CE}} \times \sin\frac{\theta}{2}$니까 $\overline{\mathrm{CE}}$만 θ에 대한 식으로 표현하면 된다.

4. $\overline{\mathrm{CE}} = \sin\theta$. 이제 다 곱해서 답을 구하자.

21. 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

21. 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

정답. ④

생각의 흐름

1. 처음 보는 상황. $h(t)$는 어떻게 구해지는가?

$\Rightarrow$ $h(t)$는 $(1,0)$을 지나면서 $g(x)$를 최대한 눕히다가 $-t+\ln x$와 한 점에서 만날 때! 그때의 기울기구나!

2. t가 충분히 클 때는 접할 때이고... t가 굉장히 작을 때는 접선이 아니라 그냥 $(e, -t+1)$을 지날 때겠군.

3. t가 작을 때는 $h(t)=\dfrac{-t+1}{e-1}$, 그런데 t가 클 때는 $h(t)$가 t에 대한 식으로 잘 표현되지 않는데...

$\Rightarrow$ 이때를 위해 합성함수 미분법을 배웠다. 접점에 새로운 문자를 도입하고 그 문자와 t사이의 관계식에서 문제를 풀어보자.

4. 접점의 x좌표를 s(t에 대한 함수)라 하자.

$h(t)=\dfrac{1}{s}$, $\dfrac{-t+\ln s}{s-1}=\dfrac{1}{s}$

$h(a)=\dfrac{1}{e+2}$? s가 $e+2$인 상황이다. 오른쪽 식을 미분하여 $\dfrac{ds}{dt}$를 구할 수 있으므로 왼쪽 식을 미분하여 $h'(a)$ 역시 구할 수 있다.

30. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

정답. 21

생각의 흐름

1. $g(t)$? 그런데 오른쪽 항은 t에 대하여 표현되어 있지 않은데...
$\Rightarrow$ t의 값이 k, $k+8$사이 구간을 지날 때 t의 값에 따라 적분값이 달라져서 g가 t에 대한 함수인 거구나.

2. 식으로 표현이 가능한가? f의 생김새를 보니 쭉 0이다가 직선... 다시 0...

3. $f(x)\cos\pi x$를 적분해야... 둘이 곱해진 함수를 적분? 그런데 $f(x)$를 미분하면 0아니면 1아니면 -1인데? $\cos\pi x$는 적분하기 쉽고
$\Rightarrow$ 이거 부분적분 쓰면 되겠구나

4. $g(t)=\left[\dfrac{f(x)}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t-1}^{t}-\displaystyle\int_{t-1}^{t}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}dx+\left[\dfrac{f(x)}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t}^{t+1}+\displaystyle\int_{t}^{t+1}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}dx$
$=4\cos(\pi t)!$

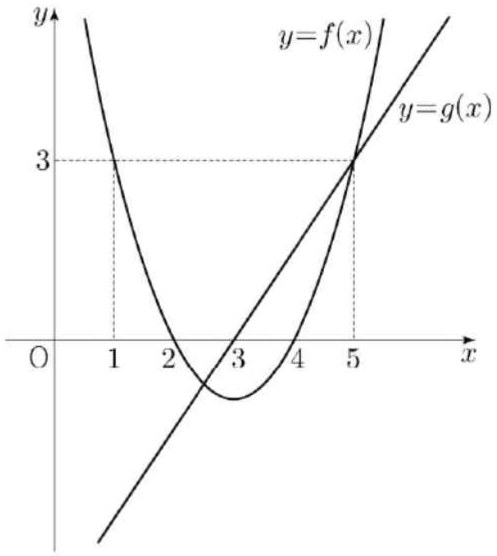
5. t의 범위가 끝부분일 때만 따로 구해주면 $g(t)$가 전부 t에 관한 식으로 표현되겠다!

2019학년도

14. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]

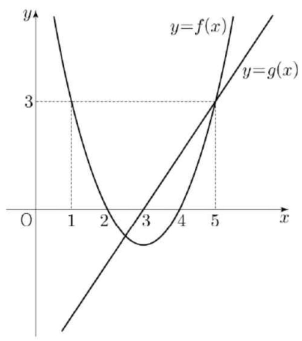


① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

14. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

정답. ④

생각의 흐름

1. 지수부등식은 밑은 통일해줘서 지수끼리만 비교해야지!

$\Rightarrow -f(x)g(x) \geq -3g(x)$

2. 양변에서 $g(x)$를 지우고 싶은데, $g(x)$의 부호에 따라 부등호 변환이 달라지겠구나!

16. $x>0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$

④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

16. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$
④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

정답. ②

생각의 흐름

1. $f(x)$를 적분해야 하는데... $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$? 이것도 적분되나?

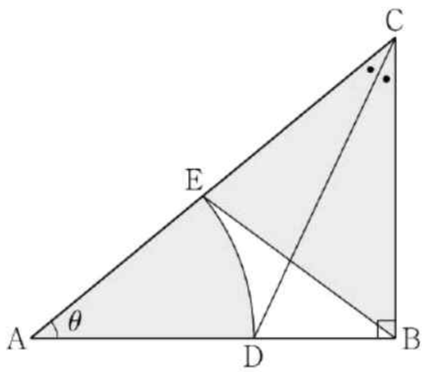
$\Rightarrow$ 적분된다. $\frac{1}{x}$이 포함된 합성함수꼴! 치환적분이 가능하다

2. 적분구간이 맞춰지나?

$\Rightarrow$ 맞춰진다. $\frac{1}{2}, 2$니까 $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$적분도 위끝 아래끝을 맞출 수 있다.

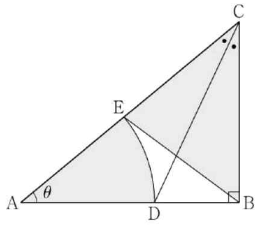
3. 주어진 식 양변 정적분해서 답을 내야지.

18. 그림과 같이 $\overline{\text{AB}}=1$, $\angle\text{B}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle\text{C}$ 를 이등분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 D, 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{\text{AD}}$ 인 원과 선분 AC 의 교점을 E 라 하자. $\angle\text{A}=\theta$ 일 때, 부채꼴 ADE 의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE 의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

18. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle C$ 를 이등분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 D, 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$ 인 원과 선분 AC 의 교점을 E 라 하자. $\angle A=\theta$ 일 때, 부채꼴 ADE 의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE 의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

정답. ②

생각의 흐름

1. $S(\theta)$를 구하려면 $\overline{AE}$를 θ에 대해 표현해야...

2. $\overline{BE}$를 θ에 대해 표현하는 건 불편하니까 $T(\theta)$는 $\frac{1}{2}\overline{CE}\times\overline{BC}\times\cos\theta$로 구해야지.

3. $\overline{BC}=\tan\theta$, $\overline{CE}$를 θ에 대해 표현해야... 결국 $\overline{AE}$를 θ에 대해 표현해야...

4. 점 D에서 $\overline{AE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{DH}=\overline{AE}\sin\theta$
삼각형 CDH와 삼각형 CBD는 합동이므로 $\overline{DB}=\overline{DH}=\overline{AE}\sin\theta$
$\overline{AD}=\overline{AE}$이므로 $\overline{AD}+\overline{DB}=(1+\sin\theta)\overline{AE}=1$

5. $\overline{AE}=\frac{1}{1+\sin\theta}$니까 계산만 남았다.

20. 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 곡선 $y=\sin x\,(x>0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 곡선 $y = \sin x \ (x > 0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답. ⑤

생각의 흐름

1. n번째 수든 뭐든 일단 접선이니까...

직선 $y = \cos a_n (x - a_n) + \sin a_n$이 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$을 지남

대입해서 풀면 ㄱ

2. ㄴ을 ㄱ으로 풀어쓰면 $a_{n+2} - a_n > 2\pi$가 되는데,

직접 $\sin x$함수에 접선을 그어보면 기울기가 점점 작아지니까

a_{n+2}는 a_n보다 2π보다 큰 수만큼 커야 한다.

ㄴ도 옳고

3. ㄴ과 연관성을 주기 위해 ㄷ을 다시 쓰면

$a_{n+2} - a_n > a_{n+3} - a_{n+1}$

이걸 어떻게 보이지... 내가 아는 거라곤 a_n 항을 $\tan a_n$로 표현을 바꿔칠 수 있는 것뿐...

⇒ tan함수를 활용하기 위해 한 주기 내로 다 모아야겠다.

$\tan(a_{n+2} - 2\pi) - \tan a_n$, $\tan(a_{n+3} - 3\pi) - \tan(a_{n+1} - \pi)$으로 바꿔줘도 같은 식인데, 이걸 다시 각각 $a_{n+2} - a_n - 2\pi$, $a_{n+3} - a_{n+1} - 2\pi$로 나눠주면 평균변화율 식을 얻는다.

5. tan함수 개형을 고려했을 때 $\frac{\tan(a_{n+2} - 2\pi) - \tan a_n}{a_{n+2} - a_n - 2\pi} < \frac{\tan(a_{n+3} - 3\pi) - \tan(a_{n+1} - \pi)}{a_{n+3} - a_{n+1} - 2\pi}$

다시 $\tan a_n$항을 a_n항으로 바꿔주면 ㄷ이 옳다는 결론을 얻는다.

30. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \ge 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

30. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고,

$\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1,

α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

정답. 27

생각의 흐름

1. $g(x)$가 극대 또는 극소 $\Leftrightarrow$ $\sin(f(x))$가 극대 또는 극소
(몫의 미분법 굳이 안 해도 분자가 상수여서 분모의 크기에 따라 함숫값이 결정되니까)

2. $\sin(f(0))=\dfrac{1}{2}$, $f(0)=\dfrac{\pi}{6}$이구나. 그리고 $f'(0)=0$이구나.

3. 조건 (나)는 $\sin(f(\alpha_5))=\sin(f(\alpha_2))+\dfrac{1}{2}$

$f(x)$가 이 문제의 주인공이구나. $f(x)$식을 구해야지

4. $\cos(f(x))f'(x)$의 부호가 바뀔 때가 $g(x)$가 극대 또는 극소가 될 때인데,
$\cos(f(x))$의 부호가 바뀔 때 $\sin(f(x))$의 값은 1 또는 -1인데?
$\Rightarrow$ 조건 (나)가 이상하다.
α_2, α_5 둘 중 하나는 $f'(x)$의 부호가 바뀔 때구나.

5. 최고차항이 6π로 양수니까 $f(x)$는 $x=0$일 때 극대, $x=a_2$ 또는 $x=a_5$일 때 극소인 삼차함수구나. 어느 때일까?

$\Rightarrow$ $f(x)$의 값이 $\dfrac{\pi}{6}$에서 점점 감소해가면서 $\cos(f(x))$의 부호를 바꾸는데, 두 경우를 비교해보면 $x=a_5$일 때 극소여야만 조건 (나)를 만족시킬 수 있다는 것을 얻음.

6. 최고차항의 계수, 극댓값-극솟값을 안다. 이차함수 넓이 공식 $\dfrac{18\pi(\alpha_5-0)^3}{6}$=극댓값-극솟값 이라는 것을 이용하여 $f(x)$식을 구하자.

7. 마지막 계산 과정에서 $f(x)$의 대칭성에 유의하며 값 계산을 해야지.

2020학년도

7. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x - 1 = 0$과
부등식 $\sin x \cos x < 0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

7. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x - 1 = 0$과
부등식 $\sin x \cos x < 0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

정답. ②

생각의 흐름

1. $\sin x \cos x < 0$? 이건 그래프 그려서 따지는 것보다 단위원에서 삼각함수의 정의를 생각했을 때 동경이 제2사분면, 제4사분면에 있는 각일 때라고 생각하는 게 편한데?

2. 단위원을 그린 다음, $\cos x = \pm\frac{1}{2}$일 때,

즉 x좌표가 $\pm\frac{1}{2}$일 때 그 중에서 제2사분면, 제4사분면에 있을 때만 관찰해야지.

10. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ 인 이등변삼각형 ABC 에서 $\angle \mathrm{A} = \alpha$, $\angle \mathrm{B} = \beta$라 하자. $\tan(\alpha + \beta) = -\dfrac{3}{2}$ 일 때, $\tan\alpha$의 값은? [3점]

① $\dfrac{21}{10}$ ② $\dfrac{11}{5}$ ③ $\dfrac{23}{10}$ ④ $\dfrac{12}{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

10. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 인 이등변삼각형 ABC 에서 $\angle\mathrm{A}=\alpha$, $\angle\mathrm{B}=\beta$라 하자. $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{3}{2}$ 일 때, $\tan\alpha$의 값은? [3점]

① $\frac{21}{10}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{23}{10}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

정답. ④

생각의 흐름

1. 이등변삼각형인데 $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{3}{2}$?

⇒분모가 되는 변과 분자가 되는 변을 뒤집어서 생각하면 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$를 얻는다.

2. 탄젠트 덧셈공식을 이용하여 그려야지.

15. 지수함수 $y=a^x\ (a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$ 이 만나는 점을 A라 하자. 점 B$(4, 0)$에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $3^{\frac{1}{3}}$ ② $3^{\frac{2}{3}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

15. 지수함수 $y=a^x\,(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 $\mathrm{B}(4,\,0)$에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $3^{\frac{1}{3}}$　② $3^{\frac{2}{3}}$　③ 3　④ $3^{\frac{4}{3}}$　⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

정답. ②

생각의 흐름

1. A는 a 값에 따라 움직이는 점... 섣불리 그림 그리기보다는 고정점인 O, B에 대하여 A가 어디에 위치해야 하는지 생각해야지.

2. OA와 AB가 수직? 점 A는 $\overline{\mathrm{OB}}$를 지름으로 하는 원 위의 점이구나?

3. 그런데 y좌표가 $\sqrt{3}$?
$\Rightarrow(1,\sqrt{3})$ 또는 $(3,\sqrt{3})$을 지날 때구나!

4. $a=\sqrt{3}$이거나 $a^3=\sqrt{3}$일 때구나.

21. 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 $a,\ b\,(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)\,dt=m$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $m<0$이 되도록 하는 두 실수 $a,\ b\,(a<b)$가 존재한다.

ㄴ. 실수 c에 대하여 $g(c)=0$이면 $g(-c)=0$이다.

ㄷ. $a=\alpha,\ b=\beta\,(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 (t, e^t)에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 a, $b(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)dt=m$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $m<0$이 되도록 하는 두 실수 a, $b(a<b)$가 존재한다.
ㄴ. 실수 c에 대하여 $g(c)=0$이면 $g(-c)=0$이다.
ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답. ⑤

생각의 흐름

1. 일단 $f(x)=e^t(x-t)+e^t$

2. 직선에서 곡선을 뺀 함수 절댓값을 씌웠는데 미분가능? 이건 익숙하지 접할 때!
⇒ x좌표가 e^{-t}일 때!
$g(t)$를 구하면 $(t-1)e^t-t-1$

3. ㄱ은 순방향 적분이 0보다 작을 수 있는지를 묻네? $g(t)$의 최솟값이 0보다 작으면 가능!
⇒ $g(t)$식에 $t=1$만 넣어 봐도 0보다는 작음 ㄱ은 참!

4. $g(c)=0$이면 $g(-c)$도 0인 것은 계산을 하면 나옴. ㄴ은 참!

5. ㄴ결과를 활용하면 m이 최솟값이려면 $g(\beta)=0\,(\beta>0)$, $\alpha=-\beta$
따라서 계산해보면 $\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}=-e^{2\beta}$
ㄷ의 물어보는 것은 $\beta>1$? $g(1)<0$이므로 $g(\beta)>1$
ㄷ도 참!

30. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

30. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

정답. 64

생각의 흐름

1. t가 커질 때마다 $t^3\ln(x-t)$ 그래프는 점점 오른쪽으로 움직이고 가팔라지겠네.

$\Rightarrow$ a값도 점점 커져야 $2e^{x-a}$와 $t^3\ln(x-t)$ 그래프가 한 점에서 만나겠네.

2. 위로 볼록, 아래로 볼록 서로 다르니까 그래프가 한 점에서 만나는 상황은 그 점에서 접하는 상황!

3. 접선에 대한 식을 써야 하는데, 이때 접점의 x좌표는 새로운 문자를 도입해야지. 새로운 문자 도입에 겁먹을 필요 없다! 어차피 t에 대해 표현될 것이 확실하니까. 나중에 합성함수 미분으로 나중에 처리되겠다.

4. 접점의 x좌표를 s(이 역시 t에 대한 함수)라 하면

$2e^{s-a}=t^3\ln(s-t)$

$2e^{s-a}=\dfrac{t^3}{s-t}$

두 식을 얻음! 이제 각 식을 t에 대해 미분할 수 있나?

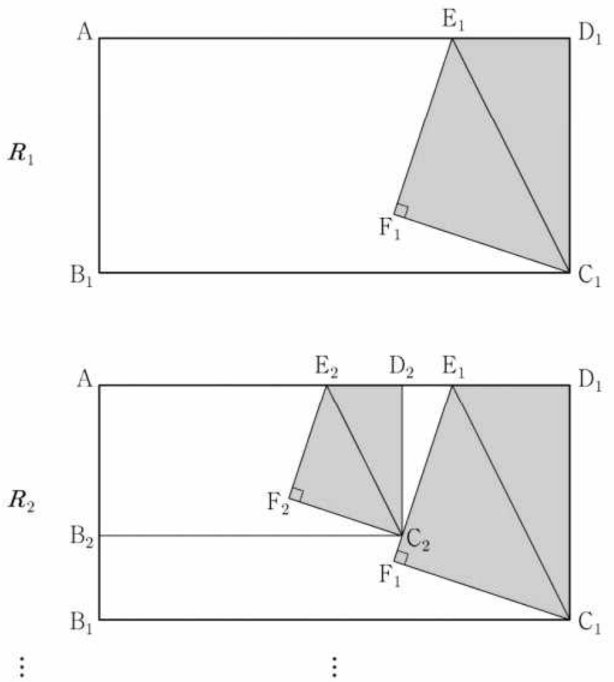
$\Rightarrow$ 할 수 있다! s를 접할 때의 x좌표라고 특정한 순간! 위의 두 식은 t값에 상관없이 성립하는 항등식이기 때문!

5. 위 식을 미분하면 $2e^{s-a}\left(\dfrac{ds}{dt}-\dfrac{da}{dt}\right)=3t^2\ln(s-t)+\dfrac{t^3}{s-t}\left(\dfrac{ds}{dt}-1\right)$

원래 4.에서 세운 두 식과 비교해 대입하면 $\dfrac{da}{dt}=1-\dfrac{3}{t}$를 얻는다.

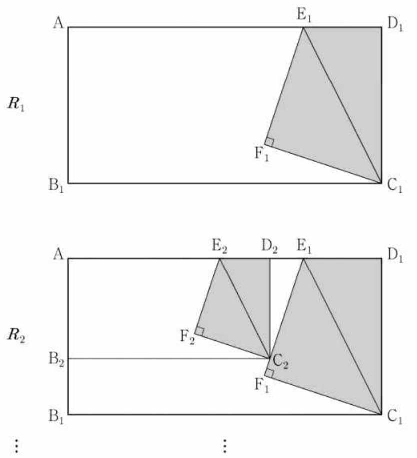
2021학년도

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=2$, $\overline{\mathrm{AD_1}}=4$인 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{AD_1}$을 $3:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하고, 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$의 내부에 점 $\mathrm{F_1}$을 $\overline{\mathrm{F_1E_1}}=\overline{\mathrm{F_1C_1}}$, $\angle \mathrm{E_1F_1C_1}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $\mathrm{E_1F_1C_1}$을 그린다. 사각형 $\mathrm{E_1F_1C_1D_1}$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{E_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AE_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB_2}}:\overline{\mathrm{AD_2}}=1:2$인 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 삼각형 $\mathrm{E_2F_2C_2}$를 그리고 사각형 $\mathrm{E_2F_2C_2D_2}$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

14. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

정답. ③

생각의 흐름

1. $\dfrac{a}{1-r}$을 구해야 하는데, a는 구하기 쉽고, r을 구해야겠네.

2. 작은 직사각형이 어떤 방식으로 그려진 거지? 길이 힌트가 있나?
⇒ 그냥 세로:가로 비율이 $2:1$인 것밖엔... 각각을 $2x$, x로 놓고 풀 수 있나?

3. 삼각형 $C_2D_2E_1$에서 직각을 끼인 각으로 하는 두 변의 길이가 각각 $3-2x, x$인데...

4. 직각삼각형에서의 길이 정보? 피타고라스? 아니면 삼각비에 대한 정보가 있나?
⇒ 빗변 길이 표현 어려우니까 피타고라스는 아니고...
$\tan\angle C_2D_2E_1$를 구할 수 있을 것 같은데? 옆에 두 각 각각의 $\tan$값 구하기 쉬우니까!

5. 덧셈 공식 이용해서 값 구해야지.

15. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\quad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

15. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2}, \quad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답. ②

생각의 흐름
1. 도함수에 대한 정보를 함숫값을 줬네? 적분해서 적분 상수 찾는 문제구나?

2. 조건 (가) 는 그냥
$g'(x)=2-\dfrac{3}{x^2}$이라는 소리네. 그럼 $g(x)=2x+\dfrac{3}{x}+C$이고

3. $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$이니까 $f(2)=4+\dfrac{3}{2}$, $g(-2)=-4-\dfrac{3}{2}+C$니까 $C=9$구나.

4. $g(-3)=-6-1+9=2$구나.

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$ 에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$ 인 함수 $g(x)$ 와 자연수 n 이 다음 조건을 만족시킬 때, n 의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고
>
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=2,\quad \int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
>
> 이다.

① 8　　② 10　　③ 12　　④ 14　　⑤ 16

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2,\quad \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

정답. ⑤

생각의 흐름

1. 치역이 $\{0,1\}$? $h(x)=f(nx)$거나 $h(x)=0$이구나. 연속함수니까 $f(nx)=0$일 때 갈아탈 수 있을 거고

2. $f(nx)$의 한 볼록한 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{n}$인데... -1부터 1까지의 구간은 $f(nx)$ 한 주기동안 그래프가 $2n$번 반복되는 구간인데... $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)dx$ 값이 2?

$\Rightarrow$ 이건$f(nx)$가 0보다 큰 부분만 살리고 0보다 작은 부분은 다 0이 곱해진 상황이네.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} xh(x)dx$ 값 정보를 활용하려면 적분을 해야...

$\dfrac{1}{2}x^2h'(x)$을 또 적분하기는 불편하니까... $h(x)$를 적분한 함수

$\displaystyle\int_{-1}^{x} h(x)dx=H(x)$를 도입해야지. 아직 편할지 안 편할지는 모르지만 혹시 계산 편해질 수도 있으니까 아래끝은 문제에 나온 -1로!

$\Rightarrow$ $H(x)$적분은? 자신 있지! 도함수인 $h(x)$ 모양을 잘 알고 있으니까 $H(x)$ 그래프 그려서 대칭성 등 따지면 n에 대한 식으로 적분값 구할 수 있을 듯

4. 부분적분하면 $\displaystyle\left[xH(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} H(x)dx$

$$=\int_{-1}^{1} h(x)dx-\int_{-1}^{1} H(x)dx$$
$$=2-\int_{-1}^{1} H(x)dx$$

5. $H(x)$적분해서 n에 대한 식 얻어야지.

28. 두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)\,\lvert h(x)\rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

28. 두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)\lvert h(x)\rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

정답. 72

생각의 흐름

1. $f(x)$ 그래프 개형 바로 너무 예쁘게 머릿속에 그려지고.

2. $\lvert h(x)\rvert$ 미분이 문제되는 건 $h(x)=0$일 때만 이때가 언제?
$\Rightarrow$ $g^{-1}(x)$의 값이 a 또는 b일 때 (쭉 증가하는 함수니까 무조건 각각 한 순간씩 있겠네.)

3. $h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$니까
$g^{-1}(x)=b$일 때는 $f'(g^{-1}(x))=0$이어서 문제가 없는데
$g^{-1}(x)=a$일 때가 문제네. 그런데 $x-1$이 곱해져 있으면 문제가 해결?
$\Rightarrow x=1$일 때 $g^{-1}(x)$의 값이 a구나!

4. $g(0)=1$이니까 $a=0$이고 이제 조건 (나) 활용해서 b 구해야지.

5. 조건 (나)는 $f'(g^{-1}(3))(g^{-1})'(3)=2$라는 소리
$g(1)=3$이니까 다시 쓰면
$\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=2$ b값도 구했네!

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$ 일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

정답. 29

생각의 흐름

1. 삼차함수에 $\sin^2 \pi x$가 합성된 형태. 문제에서 물어보는 것도 그렇고 $f(x)$가 주인공인데 그 힌트를 $g(x)$에 관한 정보를 통해 주는 형태구나.

2. $\sin^2 \pi x$는 x가 0에서 1까지 변해갈 때 0에서 1이 되었다가 다시 0으로. 대칭적인데.
어떻게 $g(x)$의 순간적인 최댓값이 되는 x의 개수가 3(홀수)개지?
$\Rightarrow$ $x=\frac{1}{2}$일 때 $g(x)$가 $f(1)$이라는 극댓값을 가지고

$x=\alpha, x=1-\alpha \ \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$에서 극대인 형태구나!

$\Rightarrow$ 그렇다면 $f(x)$는 $x=\sin^2 \pi\alpha$일 때 극대구나! 그리고 $f(\sin^2 \pi\alpha)=f(1)$이구나!

3. 조건 (나)는 $[0,1]$에서 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 최솟값이 0이라는 정보고... 나중에 $f(x)$ 형태 확정지을 때 쓰이겠네.

4. $f(x)$가 언제 극대인지, 언제 최댓값을 갖는지는 알겠는데... 최솟값 정보를 어떻게 활용하지?
$f(0)=0$으로 최소인 걸까? 아니면 $f(x)$의 극솟값이 0인 걸까?
$\Rightarrow$ $f(x)$의 극솟값이 0이라면 극댓값-극솟값이 $\frac{1}{2}$이 되는데,

미적분의 기본정리 이차함수 넓이 공식을 이용하면 $\frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}$에서 극대일 때의 x좌표와 극소일 때 x좌표 차이가 1이어야 하는데 이건 말이 안 됨.
$f(0)$이 0이구나!

5. 3.에서 생각했던 것을 종합하여 $f(x)=(x-\sin^2 \pi\alpha)^2(x-1)+\frac{1}{2}$에 $f(0)=0$ 대입하여 $f(x)$를 확정지어야지.