파동의 간섭 단원에서 보이는 충만한 수학적 구조들.

목차

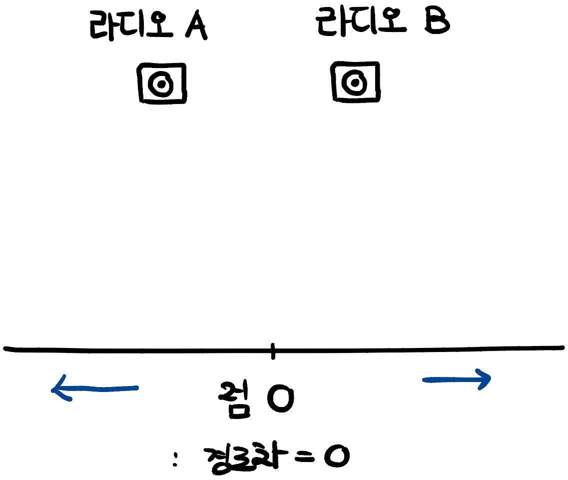
① 1차원 평면에서 보이는 보강 - 상쇄의 연속.

② 2차원 평면에서의 물결파 구조 with 쌍곡선

③ 정상파 when 진폭이 같은 파동이 반대방향으로 간섭하는 경우.

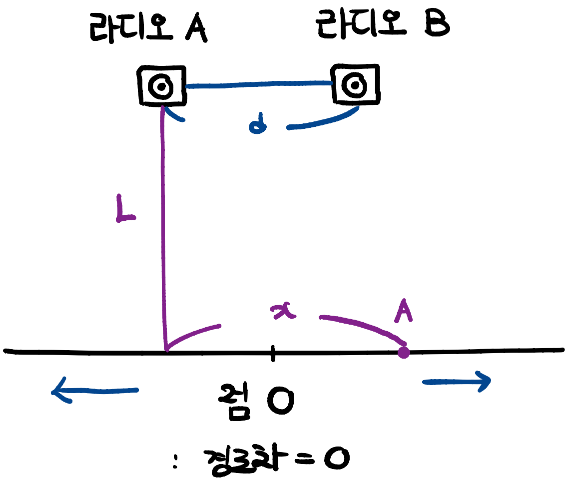
① 1차원 평면에서 보이는 보강 - 상쇄의 연속.

Q.



왜 O에서 멀어질 수록 경로차는 증가하는가.

A.



라디오 A ~ 점 A 거리 :

$$f(x) = \sqrt{L^2+x^2} = (L^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{L^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

> 0 when $x>0$

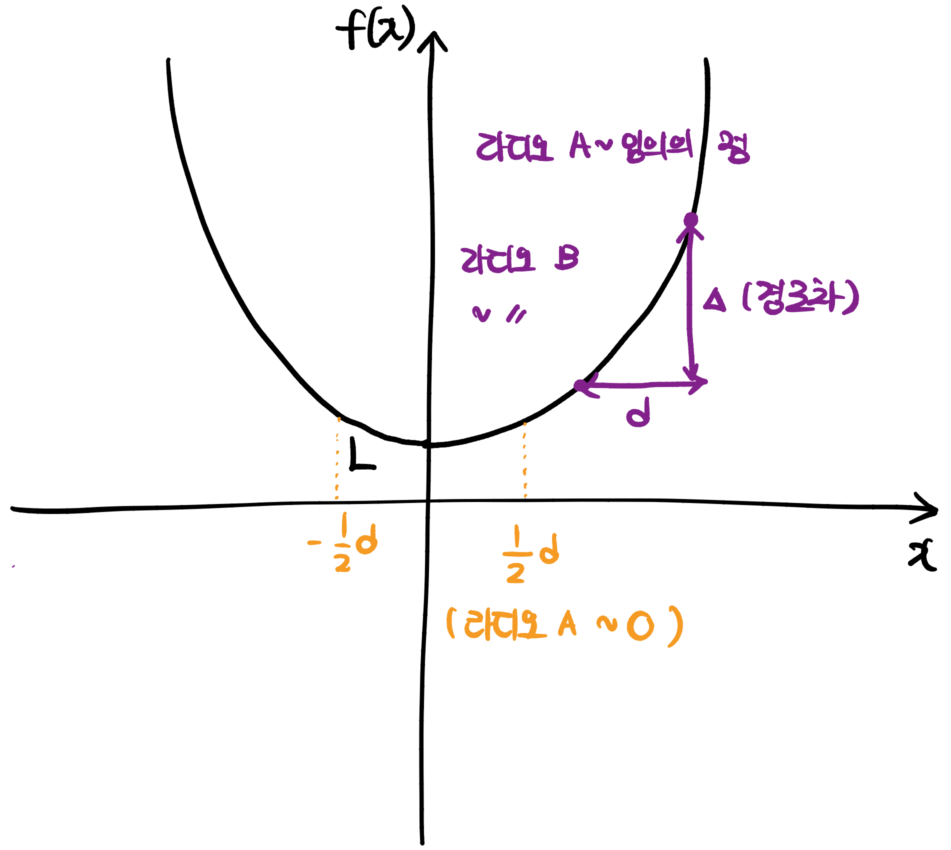
< 0 when $x<0$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{L^2+x^2} - x\,\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}}{L^2+x^2}$$

$$= \frac{\frac{L^2}{\sqrt{L^2+x^2}}}{L^2+x^2} > 0 \text{ always}$$

라디오 A ~ 임의의 점 사이 거리 : $f(x)$

라디오 B ~ 임의의 점 사이 거리 : $f(x-d)$



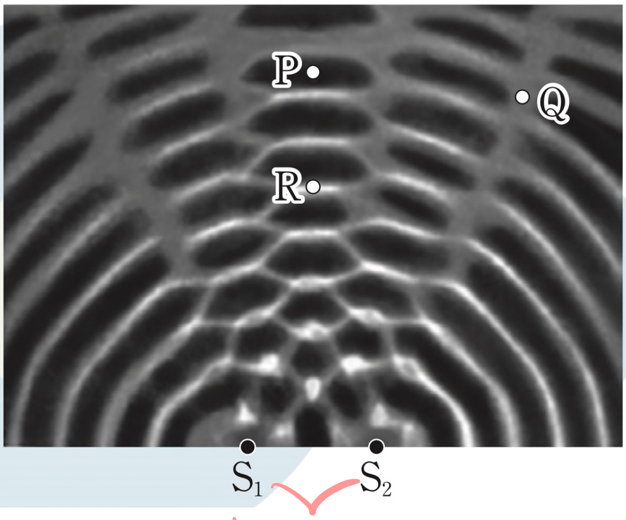
점 O에서 멀어질수록 경로차 O는 연속적으로 증가함.

⇒ $\Delta = \frac{\lambda}{2} \times 2m$ or $\frac{\lambda}{2} \times 2m+1$ 이므로

보강간섭, 상쇄간섭이 번갈아 나올 것.

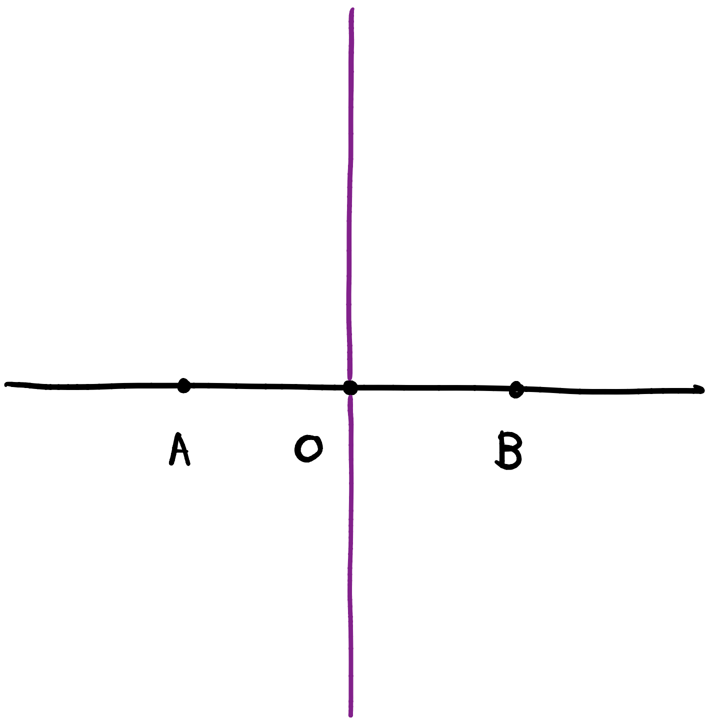
② 2차원 평면에서의 물결파 간섭 with 쌍곡선

Q. 그림을 어떻게 설명할 것인가.

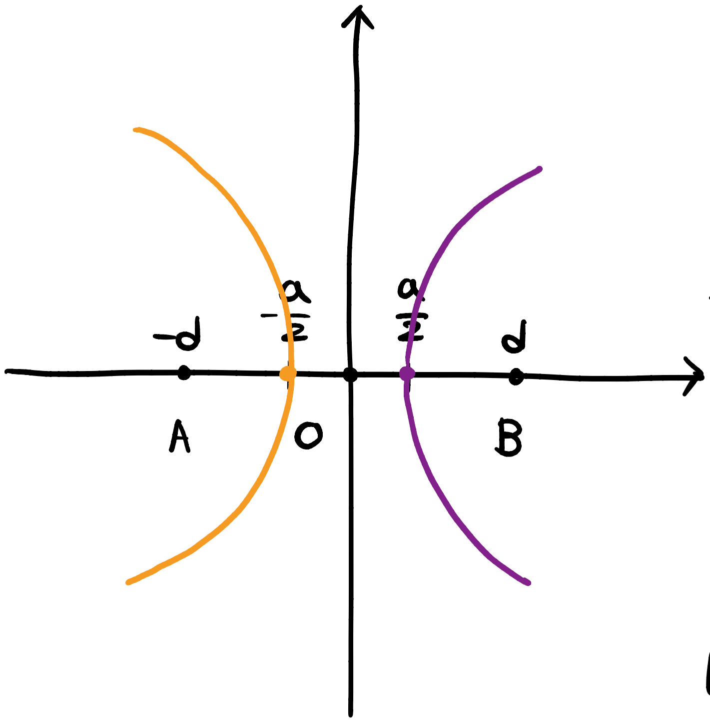


위상 Same

A.



경로차 = 0 인 점은 수직선임을 쉽게 알 수 있다.



경로차 = a 인 점 (x, y)

$$\sqrt{(x+d)^2+y^2} - \sqrt{(x-d)^2+y^2} = a$$

$$\cancel{x^2}+2dx+\cancel{d^2}+\cancel{y^2}$$
$$= \cancel{x^2}-2dx+\cancel{d^2}+\cancel{y^2} + 2a\sqrt{x^2-2dx+d^2+y^2} + a^2$$

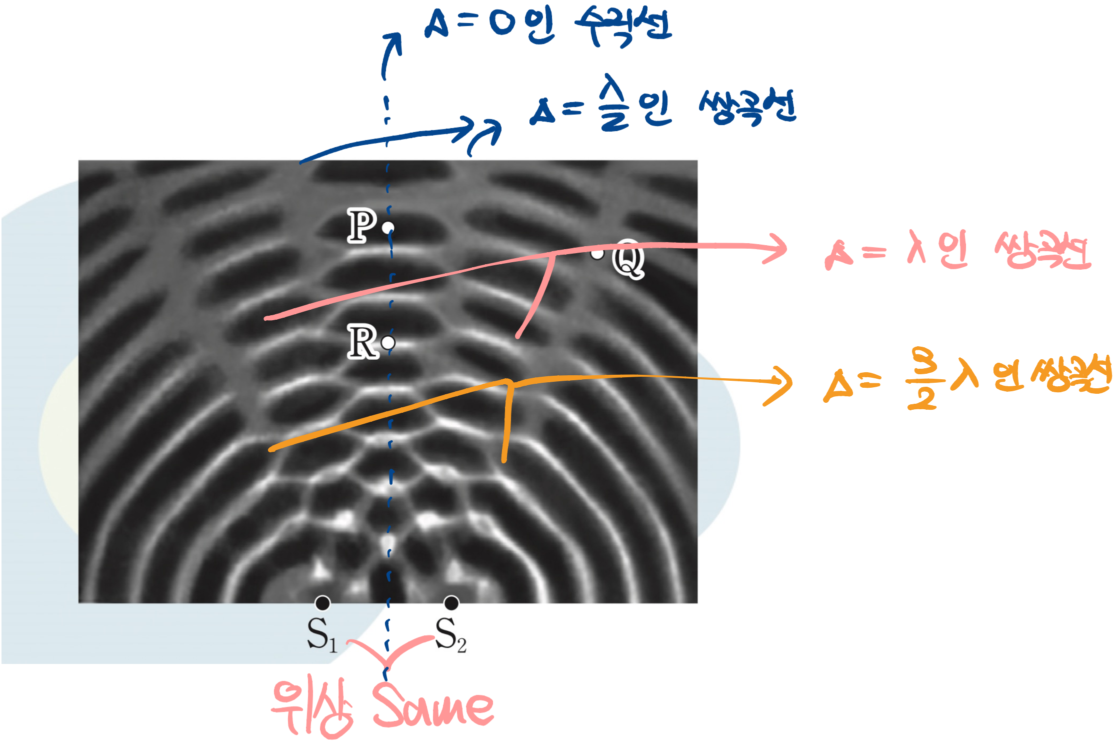
$$4dx-a^2 = 2a\sqrt{x^2-2dx+d^2+y^2}$$

$$16d^2x^2-\cancel{8a^2dx}+a^4$$
$$= 4a^2x^2-\cancel{8a^2dx}+4a^2d^2+4a^2y^2$$

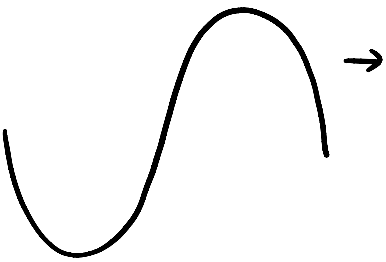
⇒ x^2-y^2 꼴

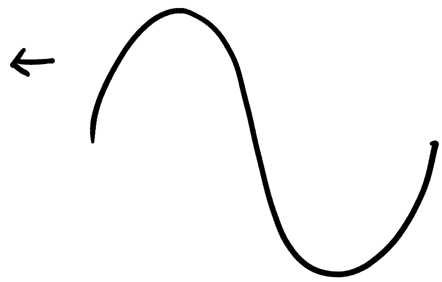
⇒ 쌍곡선

결론



③ 정상파 when 진폭이 같은 파동이 반대방향으로 간섭하는 경우.





$y_1 = a\sin(kx - vt)$

$y_2 = a\sin(kx + vt)$

두 파동이 만나면 ...

$$y_1 + y_2 = a\sin(kx - wt) + a\sin(kx + wt)$$

$$= a\sin kx\cos wt - a\cos kx\, a\sin wt$$
$$+ a\sin kx\cos wt + a\cos kx\, a\sin wt$$

$$= 2a\sin kx\cos wt$$

when $\sin kx = 0$

$\Rightarrow$ $y_1 + y_2$는 항상 0 (상쇄간섭)

when $|\sin kx| = 1$

$\Rightarrow$ $y_1 + y_2 = \pm 2a\cos wt$

(보강간섭)