제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사 10회

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

제 2 교시

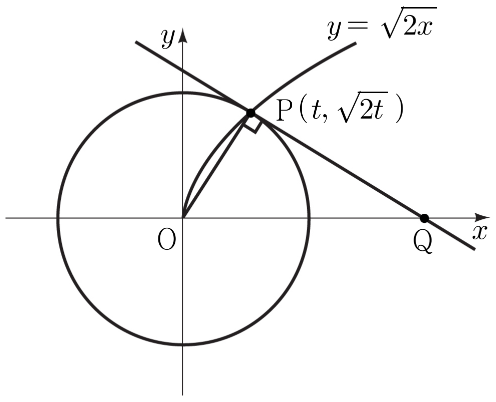
수학 영역

홀수형

공통과목

1. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{2t}\,)$가 있다. 원점 O를 중심으로 하고 선분 OP를 반지름으로 하는 원을 C, 점 P에서의 원 C의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 원 C의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? (단, $t>0$)

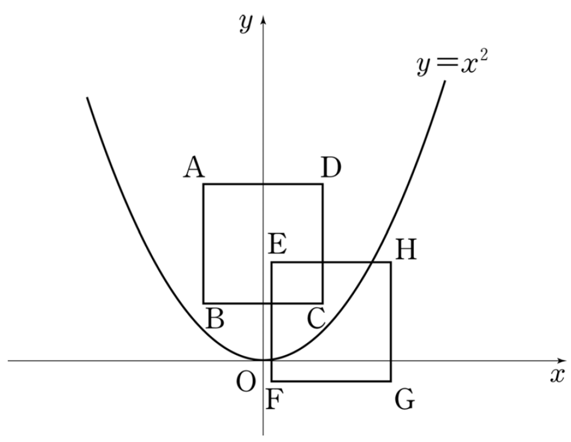
[4점][2011년 4월 나19]



① $\sqrt{2}\,\pi$ ② 2π ③ $2\sqrt{2}\,\pi$ ④ 4π ⑤ $4\sqrt{2}\,\pi$

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점의 좌표는 (0, 1) 이고, 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

[4점][2011년 6월 나21]

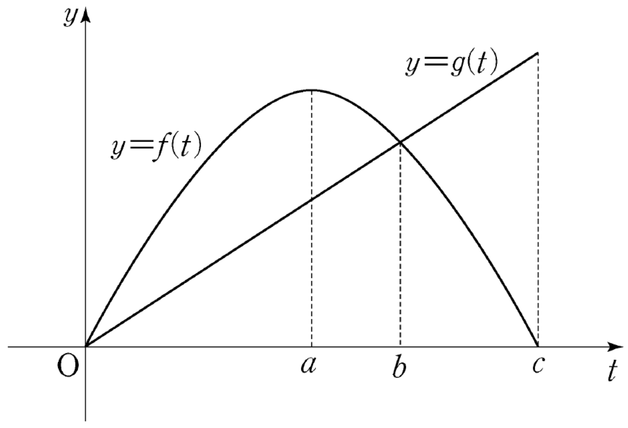


① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

3. a가 양수일 때, 실수 t에 대하여 곡선 $y=|ax^2-3x|$와 직선 $y=ax+t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 불연속인 실수 t의 개수가 1이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

[4점][2017년 전북10월 나30]

4. 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 t $(0 \leq t \leq c)$ 에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)\,dt=\int_0^c g(t)\,dt$ 이고 $0 \leq t \leq c$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $t=a$ 일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$ 일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$ 일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

[4점][2011년 9월 나21]

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선택과목 (미적분)

5. 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a,\ g(0)=b,\ g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은?

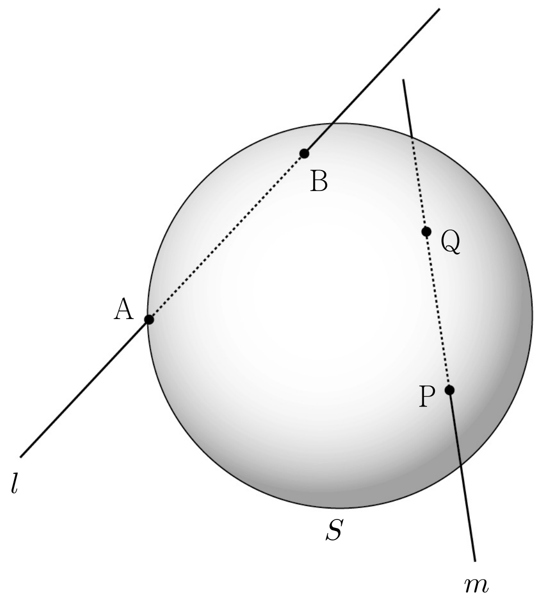
[4점][2018년 6월 가21]

① 96　② 97　③ 98　④ 99　⑤ 100

선택과목 (기하)

6. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\angle \mathrm{ABQ}=\frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오.

[4점][2016년 7월 가29]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) ④

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+2t}$이므로 $S(t)=(t^2+2t)\pi$

원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식이

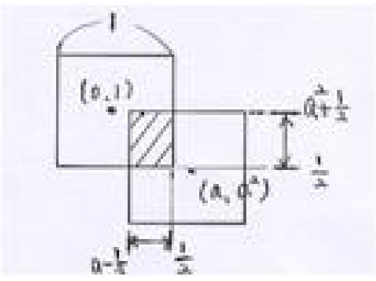
$tx+\sqrt{2t}\,y=t^2+2t$이므로 Q$(t+2,\ 0)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=t+2$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2t+4}$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{t\to0+}\frac{(t^2+2t)\pi}{(t+2)-\sqrt{2t+4}}=4\pi$$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=4\pi$

2) ①



두 정사각형의 공통부분의 넓이를 $S(a)$이라 하면

$$S(a)=\left(\frac{1}{2}-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)\left(a^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=(1-a)a^2=a^2-a^3(0<a<1)$$

$S(a)$의 최댓값을 구하기 위해서

$S'(a)=2a-3a^2=0$

$a=0,\ \frac{2}{3}$

따라서 $S(a)$의 최댓값은

$S(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}-\frac{8}{27}=\frac{4}{27}$

3) 3

[출제의도] 수학 내적 문제 해결능력-함수의 극한과 연속

$g(x)=\left|ax^2-3x\right|$ 라 하면 $a>0$이므로

$$g(x)=\begin{cases}ax^2-3x & \left(x<0 \text{ 또는 } x>\frac{3}{a}\right)\\ -ax^2+3x & \left(0\le x\le\frac{3}{a}\right)\end{cases}$$

직선 $y=ax+t$가 t의 값이 $-\infty$부터 증가하여 곡선

$y=\left|ax^2-3x\right|$와 처음으로 만날 때의 t의 값을 t_1이라 하자.

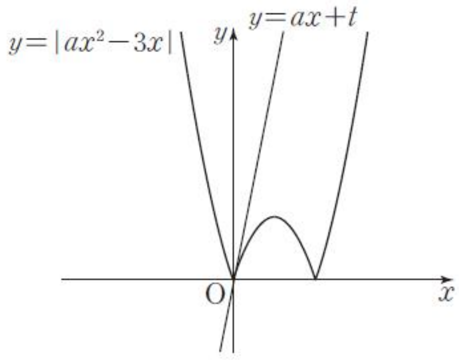
이때 함수 $f(t)$는 $t=t_1$에서 항상 불연속이므로

함수 $f(t)$의 불연속인 실수 t의 개수가 1이려면

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<t_1)\\ 1 & (t=t_1)\\ 2 & (t>t_1)\end{cases}$$

이어야 한다.

따라서 그림과 같이 곡선 $y=-ax^2+3x$의 $x=0$에서의 접선의 기울기가 a이하이어야 한다.



$y'=-2ax+3$에서 $x=0$일 때 $y'=3$이므로 $a\ge3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

4) ⑤

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A의 높이는 $\int_0^a f(t)dt$이고, 물체 B의 높이는

$\int_0^a g(t)dt$이다.

이때, 주어진 그림에서

$\int_0^a f(t)dt>\int_0^a g(t)dt$

이므로 A가 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. $0\le t\le b$일 때 $f(t)-g(t)\ge0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 커진다.

또, $b<t\le c$일 때 $f(t)-g(t)<0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 줄어든다.

따라서 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

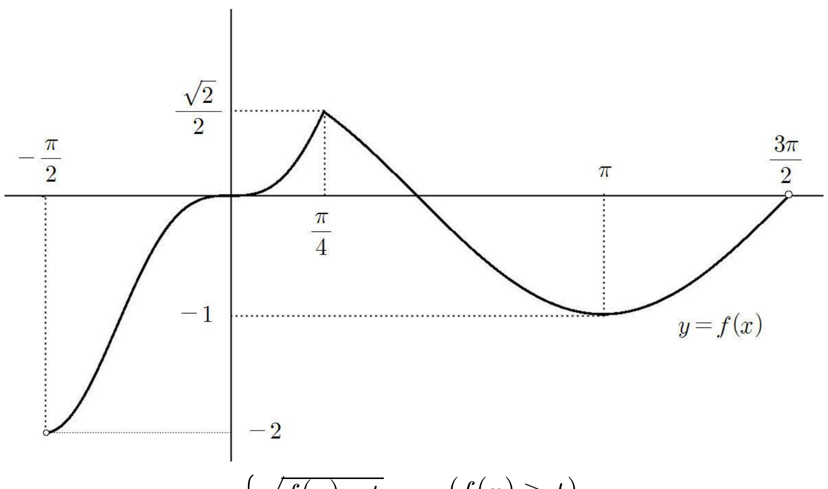
ㄷ. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4)

5) ④

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$y=\sqrt{|f(x)-t|}=\begin{cases}\sqrt{f(x)-t} & (f(x)\ge t)\\ \sqrt{-f(x)+t} & (f(t)<t)\end{cases}$를 x에 대해 미분하면

$$y'=\begin{cases}\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}} & (f(x)\ge t)\\ \dfrac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}} & (f(x)<t)\end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 연속이다.

하지만, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

또한 $y=f(x)$과 $y=t$가 만나는 점에서 미분가능하지 않다.

$t=-1$일 때 즉, $y=\sqrt{1+\cos t}$ 의 $x=\pi$에서의 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{h}{2}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h}$$

에서

$$\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

t의 값의 범위에 따른 $g(t)$의 값을 구해보면

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t\le -2)\\ 2 & (-2<t<-1)\\ 3 & (t=-1)\\ 4 & (-1<t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & \left(0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 1 & \left(t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $a=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,\ b=g(0)=2,\ c=g(-1)=3$이다.

또한, 함수 $h(g(t))$가 실수 전체에서 연속이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$이 성립하고

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$라 할 수 있다.

$\therefore\ h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-f(5)+3$

$=(120+k)-(24+k)+3$

$=99$

6)

7) 60

[출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O$'$라 하면 점 O$'$는 선분 AQ의 중점이고

$\angle\mathrm{ABQ}=\frac{\pi}{2}$이므로 점 B는 점 O$'$를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO$'$인 원 위의 점이다.

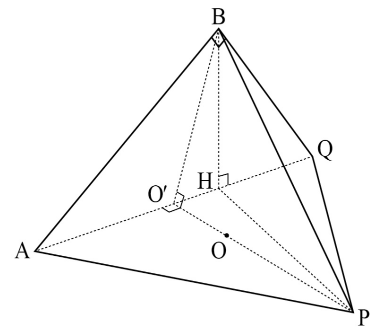
삼각형 BO$'$O에서 $\overline{\mathrm{O'B}}=\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{OB}}=2,\ \overline{\mathrm{OO'}}=1$이므로

$\angle\mathrm{BO'O}=\frac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{OO'}}\perp\overline{\mathrm{O'B}},\ \overline{\mathrm{PO'}}\perp\overline{\mathrm{O'B}}$

$\overline{\mathrm{AO'}}\perp\overline{\mathrm{PO'}},\ \overline{\mathrm{PO'}}\perp\overline{\mathrm{O'B}}$이므로 직선 PO$'$는 평면 ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.

그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



삼각형 BO$'$P는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{O'B}}=\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{O'P}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=2\sqrt{3}$

삼각형 APB는 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=2\sqrt{3}$인 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ와 삼각형 AHB는 닮음이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

그러므로 삼각형 APH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 3=2\sqrt{3}$

$$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 APH의 넓이})}{(\text{삼각형 APB의 넓이})}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

따라서 $100\cos^2\theta=100\times\frac{3}{5}=60$