제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사 *회

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

제 2 교시

수학 영역

홀수형

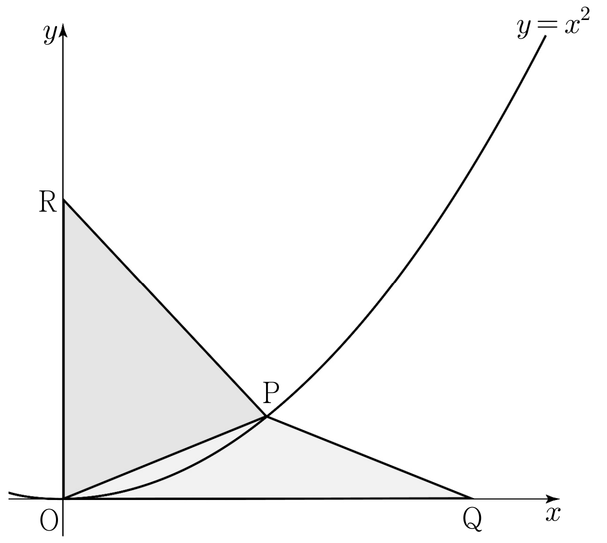
공통과목

1. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\, t^2)(t>0)$에 대하여 x축 위의 점 Q, y축 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 POQ는 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이다. (나) 삼각형 PRO는 $\overline{\mathrm{RO}}=\overline{\mathrm{RP}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 POQ와 삼각형 PRO의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2017년 4월 나21]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

2. 실수 t에 대하여 x에 대한 사차방정식

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}=0$ (나) $g(-3)=6$

함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)$의 값은?

[4점][2017년 7월 나21]

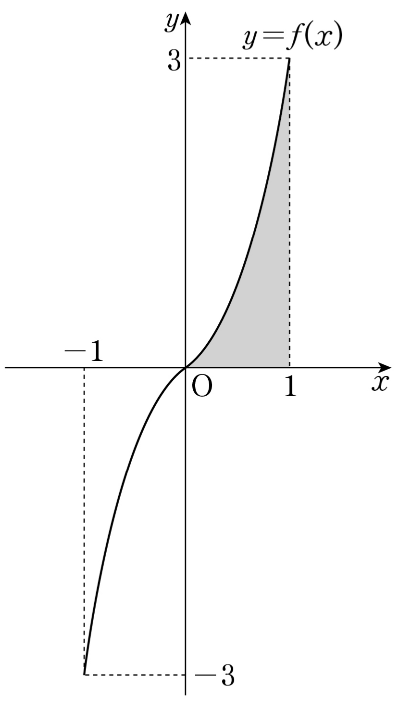
① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

3. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
(나) 닫힌구간 $[2n-1, 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다.
(단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\int_0^1 f(x)dx=1$일 때, $\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 3월 나30]



4. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

[4점][2014년 9월 나30]

(가) $1 \le a \le 10$, $1 \le b \le 100$
(나) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$과 만나지 않는다.
(다) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$와 적어도 한 점에서 만난다.

선택과목 (미적분)

5. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)>0$
(나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2019년 6월 가20]

<보 기>

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

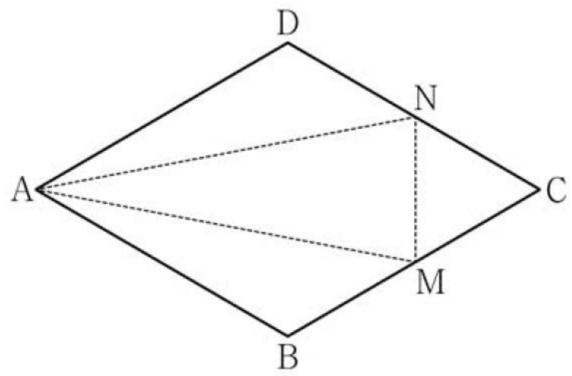
ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

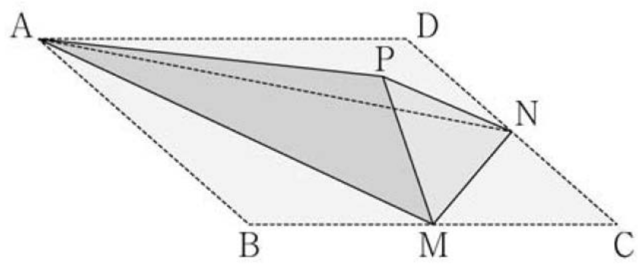
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선택과목 (기하)

6. 그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle\text{BAD}=\frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D 가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2020학년도 수능 가27]





※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) ②

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로 점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$

삼각형 POQ의 넓이는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times 2t\times t^2=t^3$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$이고

직선 MR의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이므로

직선 MR의 방정식은

$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$

$y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

삼각형 PRO의 넓이는

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\times t=\dfrac{1}{4}\left(t^3+t\right)$

따라서

$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$

$=\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{4}\left(t^3+t\right)-t^3}{t}$

$=\displaystyle\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$

$=\dfrac{1}{4}$

2) ⑤

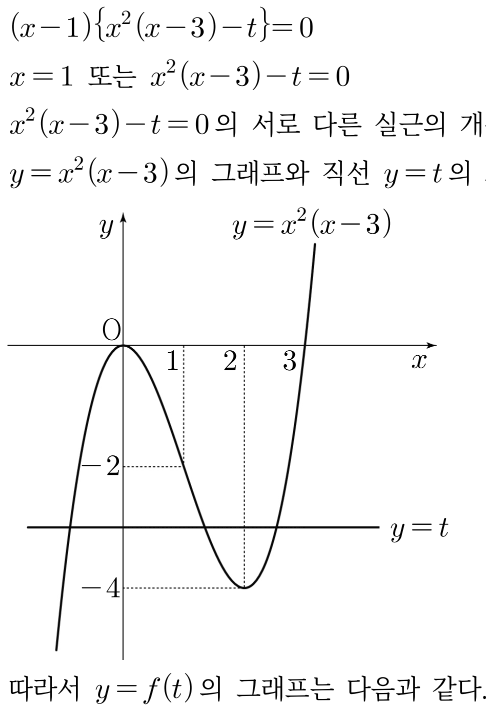
[출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 추론하기

$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$

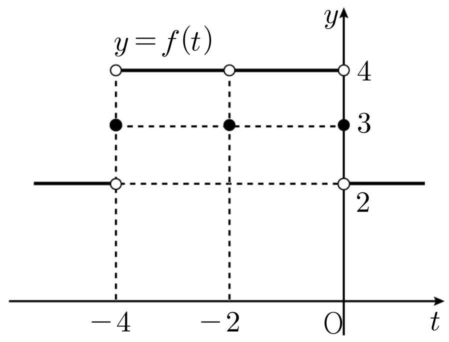
$x=1$ 또는 $x^2(x-3)-t=0$

$x^2(x-3)-t=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는

$y=x^2(x-3)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수와 같다.



따라서 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(t)$ 가 $t=-4,\ -2,\ 0$ 에서 불연속이다.

함수 $f(t)g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는

$t=-4,\ -2,\ 0$ 에서 연속이어야 한다.

$t=-4$일 때,

$\displaystyle\lim_{t\to -4-}f(t)g(t)=2g(-4),\ \lim_{t\to -4+}f(t)g(t)=4g(-4),$

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$ 이고

함수 $f(t)g(t)$ 가 $t=-4$ 에서 연속이므로

$2g(-4)=4g(-4)=3g(-4)$

따라서 $g(-4)=0$

같은 방법으로 $g(-2)=g(0)=0$

(가)에서 $g(x)$ 가 삼차 이하의 다항함수이므로

$g(x)=ax(x+2)(x+4)\ (a\neq 0)$ 이라 하면

(나)에서 $g(-3)=6$ 이므로 $a=2$

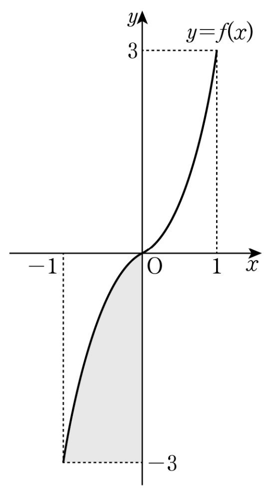
$g(x)=2x(x+2)(x+4)$

따라서 $g(1)=30$

3) 41

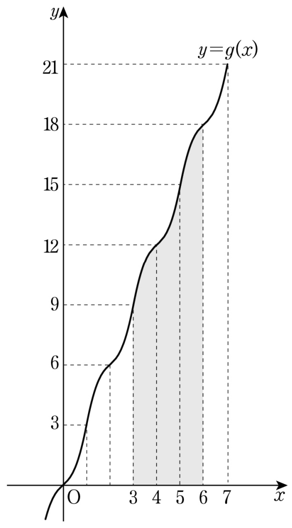
[출제의도] 평행이동을 이용하여 정의된 함수의 그래프를 추론하여 정적분의 값을 구한다.

문제에서 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$

닫힌구간 $[3,\ 6]$ 에서 $\displaystyle\int_3^6 g(x)\,dx=\int_3^6 |g(x)|\,dx$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 x축 및 두 직선 $x=3,\ x=6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 12만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_3^5 g(x)dx=2\times 12=24$

닫힌구간 $[5, 7]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 18만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_5^6 g(x)dx=15\times 1+2=17$

따라서 $\int_3^6 g(x)dx=\int_3^5 g(x)dx+\int_5^6 g(x)dx=41$

4) 196

$a=k\,(k=1,2,\cdots,10)$일 때,

$2^{k-2}\le b<2^{k-1}$ 또는 $2^{k+1}<b\le 2^{k+2}$ $(b=1, 2, \cdots, 100)$

(ⅰ) $2^{k-2}\le b<2^{k-1}$ 에서

$k=2$ 일 때, $1\le b<2^1$

$k=3$ 일 때, $2^1\le b<2^2$

⋮

$k=8$ 일 때, $2^6\le b\le 100$

이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 100이다

(ⅱ) $2^{k+1}<b\le 2^{k+2}$ 에서

$k=1$ 일 때, $2^2<b\le 2^3$

$k=2$ 일 때, $2^3<b\le 2^4$

⋮

$k=5$ 일 때, $2^6<b\le 100$

이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 96이다

따라서, 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 196이다.

5)

6) ⑤

[출제의도] 정적분의 여러 가지 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

ㄱ. 조건 (나)에서

$\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$

$\ln f(x)+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt=0$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt+2xf(x)-2xf(x)=0$

$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$

$f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt$ ⋯ ㉠

이때, $x>0$이고, $f(x)>0$이므로

$\int_0^x f(t)dt>0$

즉, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0$

또한 $x<0$일 때, $f(x)>0$이고

$\int_0^x f(t)dt<0$이므로

$f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다. 이 때, 조건 (나)에 $x=0$을 대입하면

$\ln f(0)=0,\ f(0)=e^0=1$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다. (참)

ㄷ. ㉠에서

$f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt=-2f(x)F(x)$이고,

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$에서 $F'(x)=f(x)$이므로

$f'(x)=-2F'(x)F(x)$

$f'(x)+2F'(x)F(x)=0$

그런데

$\frac{d}{dx}\left[f(x)+\{F(x)\}^2\right]=f'(x)+2F(x)F'(x)$이므로

$f(x)+\{F(x)\}=C$ (C 는 상수)

이때, $x=0$을 대입하면

$f(0)+\{F(0)\}=1$이므로 $C=1$

즉, $f(1)+\{F(1)\}=1$ (참)

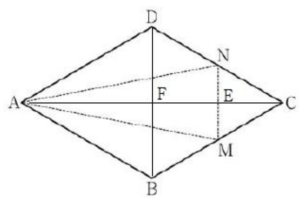
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ. 이다.

7)

8) 8

[출제의도] 삼수선의 정리를 활용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수있는가?

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 4=2$



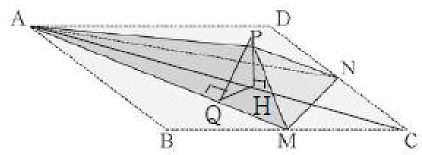
선분 MN의 중점을 E, 선분 AC의 중점을 F라 하면

$\overline{AE}=\frac{3}{2}\overline{AF}=\frac{3}{2}\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

이때 삼각형 AMN의 넓이는

$\triangle AMN=\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하자.



삼각형 AME에서

$\overline{AE}\perp\overline{ME}$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{ME}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$

삼각형 PAM의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{MP}}\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{PQ}$ 이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

한편, $\overline{\mathrm{HE}}=k$ (k는 양수)라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{PE}}^2-\overline{\mathrm{HE}}^2$ 이므로

$4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$

$k=\frac{7\sqrt{3}}{9}$

삼각형 PHE에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PE}}^2-\overline{\mathrm{HE}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$

삼각형 PHQ에서

$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)^2}=\frac{10\sqrt{21}}{63}$

$\overline{\mathrm{PH}}\perp$(평면AMN), $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{HQ}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$

평면 AMN과 평면 PAM의 이면각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{\frac{10\sqrt{21}}{63}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}}=\frac{5}{9}$

삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는

$3\sqrt{3}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로

$p+q=3+5=8$