제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사 7회

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 실수발견 모의고사 7회 문제지

제 2 교시

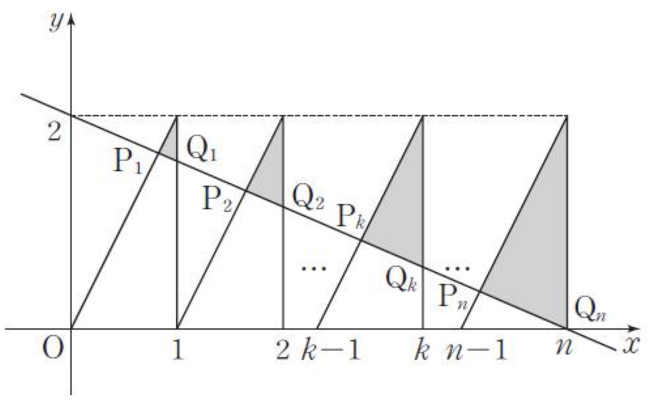
수학 영역

홀수형

공통과목

1. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 세 점 $(k-1, 0)$, $(k, 0)$, $(k, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형을 A_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 이라 하자. 직선 $y=-\frac{2}{n}x+2$가 삼각형 A_k와 만나는 두 점을 각각 P_k, Q_k라 하고, 점 $(k, 2)$와 두 점 P_k, Q_k를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} 2a_k = 33$이 되도록 하는 n의 값을 구하시오. (단, P_k의 x좌표는 Q_k의 x좌표보다 작다.)

[4점][2018년 전북10월 나29]



2. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 A$(-1,\ -1)$, B$(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오.

[4점][2016년 6월 나29]

3. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수가 300 이상이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)\times f(3)\times f(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2015년 6월 나30]

(가) $a < n^k$이면 $b \le \log_n a$ 이다. (나) $a \ge n^k$이면 $b \le -(a-n^k)^2+k^2$ 이다.

4. $t \ge 6-3\sqrt{2}$ 인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+tx & (x<0) \\ -3x^2+tx & (x \ge 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

(가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다. (나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$3\displaystyle\int_2^4 \{6g(t)-3\}^2\,dt$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 나30]

선택과목 (미적분)

5. $x=a(a>0)$에서 극댓값을 갖는 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\pi x}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ \dfrac{7}{128}\pi^2 & (f(x)=0) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g'(0)\times g'(2a)\neq 0$
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

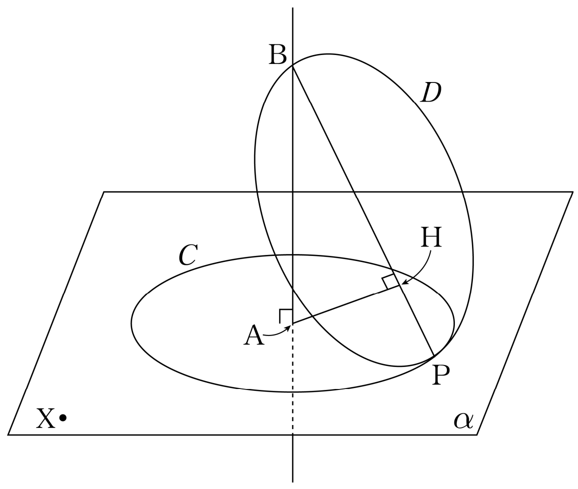
$g(1)=\dfrac{2}{7}$일 때, $g(-1)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2019년 7월 가30]

선택과목 (기하)

6. 그림과 같이 평면 α 위에 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 C가 있다. 점 A를 지나고 평면 α에 수직인 직선 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=3$이다. 원 C 위의 점 P에 대하여 원 D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 선분 BP는 원 D의 지름이다.
> (나) 점 A에서 원 D를 포함하는 평면에 내린 수선의 발 H는 선분 BP 위에 있다.



평면 α 위에 $\overline{\mathrm{AX}}=5$인 점 X가 있다. 점 P가 원 C 위를 움직일 때, 원 D 위의 점 Q에 대하여 선분 XQ의 길이의 최댓값은 $m+\sqrt{n}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 자연수이다.)

[4점][2018년 10월 가29]

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) 49

[출제의도] 수학내적 문제해결능력-수열

$R_k(k,\,2)$라 하자.

$y=-\dfrac{2}{n}x+2$에 $x=k$를 대입하면 $y=-\dfrac{2k}{n}+2$

따라서 R_kQ_k의 길이는 $\dfrac{2k}{n}$

직선 R_kP_k의 방정식은 $y=2(x-k+1)$이므로

$-\dfrac{2}{n}x+2=2(x-k+1)$에서 $x=\dfrac{nk}{n+1}$

따라서 P_k에서 선분 R_kQ_k에 내린 수선의 길이는

$k-\dfrac{nk}{n+1}=\dfrac{k}{n+1}$

$a_k=\dfrac{2k}{n}\times\dfrac{k}{n+1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{k^2}{n(n+1)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\quad=\dfrac{2n+1}{3}=33$

따라서 $n=49$

2) 186

두 점 $\mathrm{A}(-1,\,-1)$, $\mathrm{B}(1,\,2)$로부터 거리가 같은 점들의 자취는

$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$

$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$와 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 각각 $x=-\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{21}{8}$이므로 $g(x)$와 $g'(x)$는 다음과 같이 구해진다.

$$g(x)=\begin{cases}2x^2+6x+5 & (x<-\frac{3}{10})\\ 2x^2-4x+2 & (-\frac{3}{10}<x<1)\\ 5x^2-10x+5 & (1<x<\frac{21}{8})\\ 5x^2-18x+26 & (x>\frac{21}{8})\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}4x+6 & (x<-\frac{3}{10})\\ 4x-4 & (-\frac{3}{10}<x<1)\\ 10x-10 & (1<x<\frac{21}{8})\\ 10x-18 & (x>\frac{21}{8})\end{cases}$$

$x=-\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{21}{8}$에서 미분가능하지 않으므로 $80p=186$

3) 120

1) $n=2$일 때

ㄱ) $a<2^k$ 일 때, $b\le\log_2 a$ $\quad\therefore 2^b\le a<2^k$

$b=1$ 이면 a는 (2^k-2^1)개

$b=2$ 이면 a는 (2^k-2^2)개

$b=3$ 이면 a는 (2^k-2^3)개

$\vdots$

$b=k-1$ 이면 a는 (2^k-2^{k-1})개

$\therefore (a,\,b)$의 개수

$=(2^k-2^1)+(2^k-2^2)+(2^k-2^3)+\cdots+(2^k-2^{k-1})$

$=(k-1)2^k-\dfrac{2(2^k-1)}{2-1}$

$=(k-2)2^k+2$

ㄴ) $a\ge 2^k$ 일 때, $b\le-(a-2^k)^2+k^2$

$a=2^k$ 이면, $1\le b\le k^2$ 에서 b는 k^2개

$a=2^k+1$ 이면, $1\le b\le k^2-1^2$ 에서 b는 (k^2-1^2)개

$a=2^k+2$ 이면, $1\le b\le k^2-2^2$ 에서 b는 (k^2-2^2)개

$\vdots$

$a=2^k+k-1$ 이면, $1\le b\le k^2-(k-1)^2$ 에서 b는 $(k^2-(k-1)^2)$개

$\therefore (a,\,b)$의 개수

$=k^2+(k^2-1^2)+(k^2-2^2)+\cdots+(k^2-(k-1)^2)$

$=k\times k^2-\dfrac{1}{6}(k-1)k(2k-1)$

$=\dfrac{1}{6}(4k^3+3k^2-k)$

ㄱ),ㄴ)에서

$\{(k-2)2^k+2\}+\left\{\dfrac{1}{6}(4k^3+3k^2-k)\right\}\ge 300$

$\therefore k\ge 6$

$\therefore f(2)=6$

2) $n=3$일 때, 같은 방법으로

$f(3)=5$

3) $n=4$일 때, 같은 방법으로

$f(4)=4$

$\therefore f(2)\times f(3)\times f(4)=120$

4) 37

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$x<0$일 때, $f'(x)=6x+t$,

$x>0$일 때, $f'(x)=-6x+t$

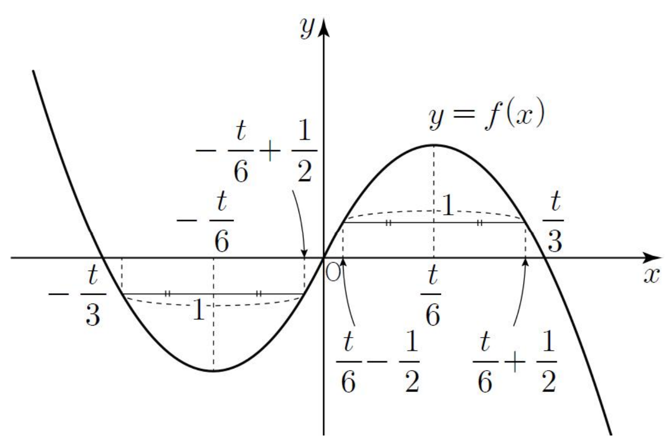
이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소, $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이다.

$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\dfrac{t}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{t}{3}$

$f_1(x)=3x^2+tx$, $f_2(x)=-3x^2+tx$라 하자.

(ⅰ) $\dfrac{t}{3}\ge 1$인 경우 (즉, $t\ge 3$)



조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\,k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x=-\dfrac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식

$f_1(k-1)=f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식

$f_2(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는 $-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$ ⋯ ㉠

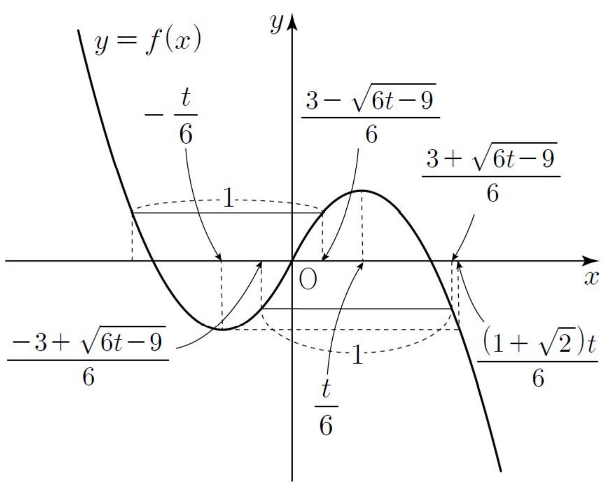
조건 (나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1\le-\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

즉, $k\le-\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\frac{t}{6}-\frac{1}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $t\ge 3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는 $\frac{t}{6}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$이므로 $g(t)=\frac{t}{6}-\frac{1}{2}=\frac{t-3}{6}$

(ii) $\frac{t}{3}<1$인 경우 (즉, $6-3\sqrt{2}\le t<3$)



$f_1\left(-\frac{t}{6}\right)=3\times\left(-\frac{t}{6}\right)^2+t\left(-\frac{t}{6}\right)=-\frac{t^2}{12}$이므로

$f_2(x)=-\frac{t^2}{12}$을 만족시키는 양수 x의 값은 x에 대한 방정식

$-3x^2+tx=-\frac{t^2}{12}$의 양이 실근인 $x=\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}$

$t\ge 6-3\sqrt{2}$이므로

$\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}-\left(-\frac{t}{6}\right)=\frac{(2+\sqrt{2})t}{6}\ge\frac{(2+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6}=1$

조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

$6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 방정식 $f_1(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식 $3(k-1)^2+t(k-1)=-3k^2+tk$의 실근인

$k=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$ 또는 $k=\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}$ ⋯ ㉢

조건(나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1\le-\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

즉, $k\le-\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\frac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}$이므로 $g(t)=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2}\le t<3)\\ \frac{t-3}{6} & (t\ge 3)\end{cases}$$

따라서

$$3\int_2^4\{6g(t)-3\}^2dt$$

$$=3\int_2^3\left\{6\times\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}-3\right\}^2dt+3\int_3^4\left\{6\times\left(\frac{t-3}{6}\right)-3\right\}^2dt$$

$$=3\int_2^3(6t-9)dt+3\int_3^4(t-6)^2dt$$

$=18+19=37$

5)

6) 95

[출제의도] 미분법을 활용하여 함수 추론하기

$f(x)\neq 0$일 때

$$g'(x)=\frac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$f(0)\neq 0$이면 $g'(0)=0$이 되어 조건 (가)에 모순이므로

$f(0)=0$이고 $g(0)=\frac{7}{128}\pi^2$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}g(x)=\frac{7}{128}\pi^2$ ......㉠

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\pi x}{f(x)(1+\cos\pi x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2\times\frac{(\pi x)^2}{f(x)}\times\frac{1}{1+\cos\pi x}\right\}$$

$=\frac{7}{128}\pi^2$

이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여

$f(x)=kx^2h(x)$ ......㉡

(k는 $k\neq 0$인 상수, $h(0)\neq 0$)이라 하자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로

$f'(a)=0$이다.

$f(a)=0$이라 가정하면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$이고

$k>0$일 때 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 모순이고,

$k<0$일 때 $f(1)\le 0$이므로 $g(1)=\frac{2}{7}$라는 조건에 모순이다.

그러므로 $f(a)\neq 0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로

$$g'(a)=\frac{\pi(\sin a\pi)f(a)}{\{f(a)\}^2}=0$$

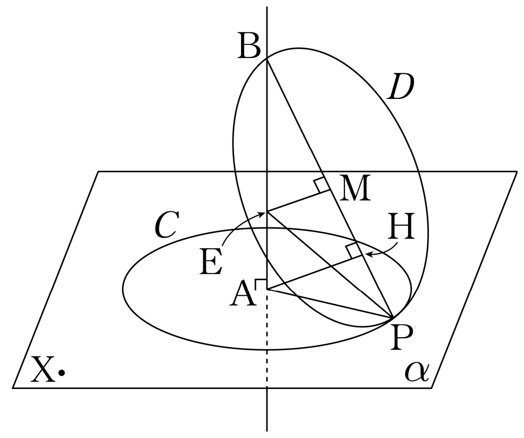
$\sin a\pi = 0$ 이고
$\sin 2a\pi = 0$, $\cos 2a\pi = 1$ ······㉢
$f(2a) \neq 0$ 이면
$g'(x) = \dfrac{\pi(\sin\pi x)f(x) - (1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ 에서
$g'(2a) = 0$ 이 되어 조건 (가)에 모순이므로
$f(2a) = 0$ 이다.
㉡에서 $f(x) = kx^2(x-2a)(x-b)$ 라 하면
$f'(a) = ka^2(b-2a) = 0$ 이므로
$b = 2a$ 이고 $f(x) = kx^2(x-2a)^2$
함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이므로 $k > 0$
㉠에서 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\pi x}{kx^2(x-2a)^2} = \dfrac{7}{128}\pi^2$
$ka^2 = \dfrac{16}{7}$ ······㉣
$g(1) = \dfrac{2}{7}$ 에서 $k(1-2a)^2 = 7$ ······㉤
㉣, ㉤에서 $\dfrac{7a^2}{16} = \dfrac{(1-2a)^2}{7}$ 이므로
$a = \dfrac{4}{15}$ 또는 $a = 4$
㉢에 의하여 $a = 4$ 이고 $k = \dfrac{1}{7}$ 이다.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{7(1-\cos\pi x)}{x^2(x-8)^2} & (x \neq 0 \text{ 이고 } x \neq 8) \\ \dfrac{7}{128}\pi^2 & (x = 0 \text{ 또는 } x = 8) \end{cases}$$

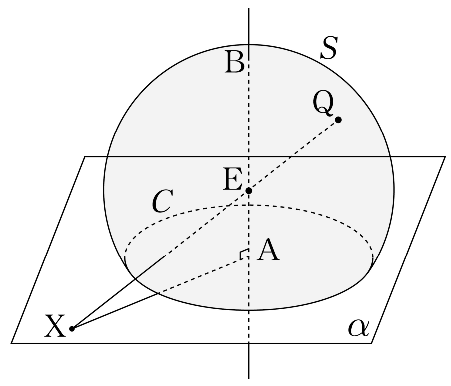
$g(-1) = \dfrac{14}{81}$
따라서 $p + q = 95$

7)
8) 28

[출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



선분 BP의 중점 M을 지나고 직선 AH와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 E라 하자. 이때 점 M은 원 D의 중심이고, 직선 ME는 선분 BP의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{PE}}$이다. 이때 삼각형 APB에서
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AB}} = 3$, $\angle\mathrm{PAB} = 90^\circ$ 이므로
$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{3}$
삼각형 APB와 삼각형 MEB는 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{ME}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{BM}} = 1$, $\overline{\mathrm{BE}} = 2\overline{\mathrm{ME}} = 2$
따라서 $\overline{\mathrm{PE}} = \overline{\mathrm{BE}} = 2$
직선 ME는 원 D의 중심 M을 지나고 원 D를 포함하는 평면에 수직인 직선이므로 원 D 위의 임의의 점 Q에 대하여
$\overline{\mathrm{QE}} = \overline{\mathrm{BE}} = 2$ 이다.
따라서 점 Q는 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구 위의 점이다.
이 구가 평면 α에 의해 잘려서 생기는 두 부분 중 점 B가 속한 부분(원 C 포함)을 S라 하면 점 P가 원 C 위를 움직일 때 원 D가 나타내는 도형이 S이다.



원 D 위의 점 Q는 도형 S 위의 점이므로 선분 XQ의 길이는 선분 XQ가 구의 중심 E를 지날 때 최대이고, 최댓값은
$\overline{\mathrm{XE}} + \overline{\mathrm{EQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{XA}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2} + 2 = \sqrt{5^2 + 1^2} + 2 = 2 + \sqrt{26}$
$m = 2$, $n = 26$ 이므로 $m + n = 28$