제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사 6회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 실수발견 모의고사 6회 문제지

제 2 교시

수학 영역

홀수형

공통과목

1. 최고차항의 계수가 1 인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?

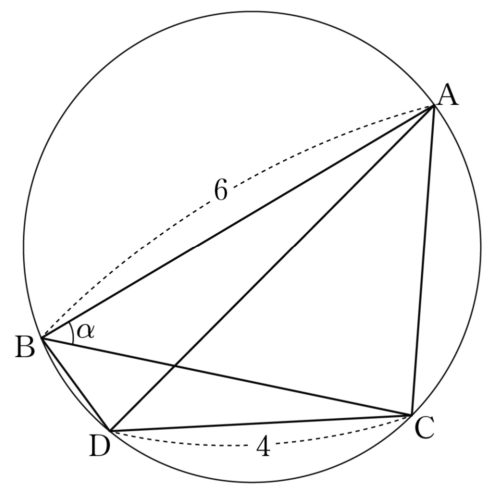
[4점][2014년 9월 나21]

> (가) $f(0)=-3$
> (나) 모든 양의 실수 x 에 대하여
> $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$ 이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

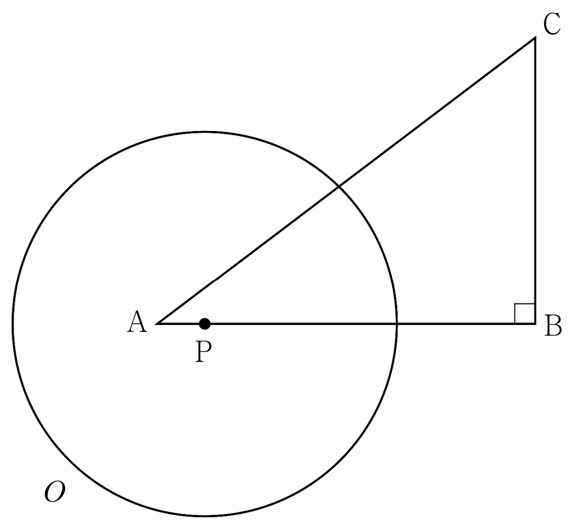
2. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고, $\angle \mathrm{ABC}=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2=9:5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.

[4점][2020년 3월 나29]



3. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$, $\angle B=90°$인 삼각형 ABC의 변 AB 위를 움직이는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 O가 있다. $\overline{AP}=x(0<x<4)$라 할 때, 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2017년 4월 나29]



4. $x=-3$과 $x=a\,(a>-3)$에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3) \\ \int_0^x |f'(t)|\,dt & (x\geq -3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(-3)=-16$, $g(a)=-8$
(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖는다.

$\left|\int_a^4 \{f(x)+g(x)\}dx\right|$의 값을 구하시오.

[4점][2019년 7월 나30]

선택과목 (미적분)

5. 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x}$ 위의 점 $(t,\ e^{t})$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 $a,\ b\ (a<b)$에 대하여 $\int_{a}^{b} g(t)dt=m$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2020학년도 수능 가21]

<보 기>

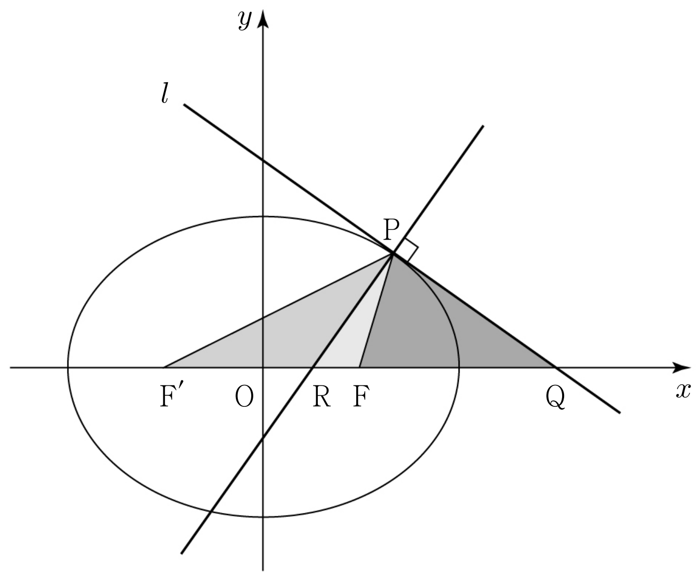
ㄱ. $m<0$ 이 되도록 하는 두 실수 a , b $(a<b)$가 존재한다.
ㄴ. 실수 c 에 대하여 $g(c)=0$ 이면 $g(-c)=0$이다.
ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta$ $(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선택과목 (기하)

6. 그림과 같이 두 초점이 F, F$'$인 타원 $3x^{2}+4y^{2}=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, PF$'$R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는?

[4점][2014년 7월 가20]



① $\dfrac{13}{12}$ ② $\dfrac{7}{6}$ ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{17}{12}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) ①

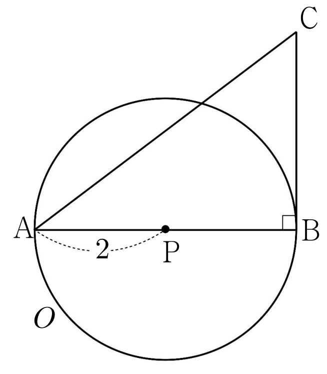
$y=6x-6$ 과 $y=2x^3-2$ 는 모두 $(1,0)$을 지나고 $(1,0)$에서의 접선의 기울기가 6이다.
모든 양의 실수 x에 대하여
$6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$ 이므로
$y=f(x)$는 $x=1$에서 $y=6x-6$과 접해야 한다
$f(x)$가 다항함수이므로
$f(x)-(6x-6)=(x-1)^2 \cdot Q(x)$
$x\to\infty$ 일 때, $f(x) \le 2x^3-2$ 이므로 $f(x)$는 3차 이하이다.
(ㄱ) $f(x)$가 1차인 경우
$y=6x-6$와 접하면서 $f(0)=-3$인 함수는 없다
(ㄴ) $f(x)$가 2차인 경우
$f(x)=(x-1)^2+(6x-6)$
$f(0)=1-6=-5\ne-3$ 이므로 조건(가)를 만족하지 않는다.
(ㄷ) $f(x)$가 3차인 경우
$f(x)=(x-1)^2(x+a)+(6x-6)$
$f(0)=a-6=-3$에서 $a=3$
$f(x)=(x-1)^2(x+3)+(6x-6)$
$\therefore f(3)=4\times6+6\times3-6=36$

2) 63

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이 구하는 문제를 해결한다.
$\angle$BAD와 $\angle$BCD는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.
$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{CB}}=b$라 하면
삼각형 ABD의 넓이 S_1은
$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$
삼각형 CBD의 넓이 S_2는
$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$
$S_1:S_2=9:5$ 이므로 $3a:2b=9:5$
$a:b=6:5$ 이므로 $a=6k,\ b=5k\,(k>0)$라고 하자.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$ …… ㉠
$\angle$ABC와 $\angle$ADC는 같은 호에 대한 원주각이므로
$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$
삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$11k^2+9k-20=0,\ (11k+20)(k-1)=0$
$k>0$ 이므로 $k=1$ 이고 $a=6k=6$
$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$
삼각형 ADC의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$
따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

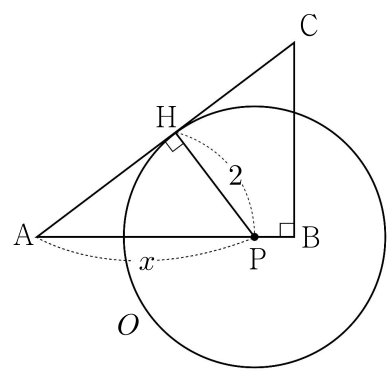
3) 19

[출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기
[그림1]과 같이 $x=2$일 때,
원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이다.
$\therefore\ f(2)=3$
$0<x<2$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.
$\therefore\ f(x)=2\,(0<x<2)$



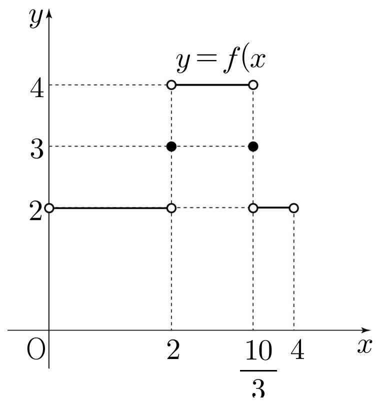
[그림1]

[그림2]와 같이 원 O가 선분 AC에 접할 때, 접하는 점을 H라 하면
삼각형 AHP와 삼각형 ABC는 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{HP}}$
$5:3=x:2$
$x=\frac{10}{3}$
$x=\frac{10}{3}$일 때, $f\left(\frac{10}{3}\right)=3$
$2<x<\frac{10}{3}$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 4이다.
$\therefore\ f(x)=4\,(2<x<\frac{10}{3})$
$\frac{10}{3}<x<4$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.
$\therefore\ f(x)=2\,(\frac{10}{3}<x<4)$



[그림2]

따라서
$$f(x)=\begin{cases}2 & (0<x<2)\\ 3 & (x=2)\\ 4 & (2<x<\frac{10}{3})\\ 3 & (x=\frac{10}{3})\\ 2 & (\frac{10}{3}<x<4)\end{cases}$$
함수 $y=f(x)$를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=2,\ x=\dfrac{10}{3}$에서 불연속이므로

모든 실수 a의 값의 합은 $2+\dfrac{10}{3}=\dfrac{16}{3}$이다.

$\therefore\ p=3,\ q=16$

따라서 $p+q=19$

4) 80

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

모든 실수 t에 대해서 $|f'(t)|\ge 0$이고,

$g(a)=\displaystyle\int_0^a |f'(t)|dt=-8<0$이므로 $a<0$

$x\ge -3$에서 $|f'(x)|\ge 0$이므로

함수 $g(x)=\displaystyle\int_0^x |f'(t)|dt$는 증가한다.

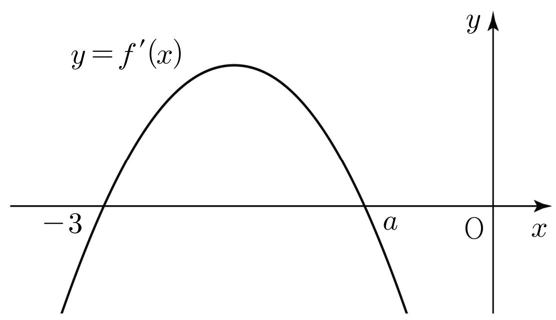
삼차함수 $f(x)$는

$x=-3$과 $x=a\,(a>-3)$에서 극값을 가지므로

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $x<-3$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



(ⅰ) $x<-3$일 때, $g(x)=f(x)$

(ⅱ) $-3\le x<a$일 때,

$$g(x)=\int_0^a\{-f'(t)\}dt+\int_a^x f'(t)dt=f(x)+f(0)-2f(a)$$

(ⅲ) $x\ge a$일 때,

$$g(x)=\int_0^x\{-f'(t)\}dt=-f(x)+f(0)$$

함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-3-}g(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$

$\displaystyle\lim_{x\to-3+}g(x)=\lim_{x\to-3+}\{f(x)+f(0)-2f(a)\}=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(0)=2f(a)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$g(a)=-f(a)+f(0)=-8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $f(0)=-16,\ f(a)=-8$

$f'(x)=k(x+3)(x-a)=k\{x^2+(3-a)x-3a\}$ $(k<0)$이라 하면

$f(x)=k\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3-a}{2}x^2-3ax\right)-16$

$g(-3)=f(-3)=\dfrac{9}{2}k(a+1)-16=-16$

$k\ne 0$이므로 $a=-1$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1)\\ -f(x)-16 & (x\ge -1)\end{cases}$$

$\displaystyle\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^4\{f(x)+(-f(x)-16)\}dx$

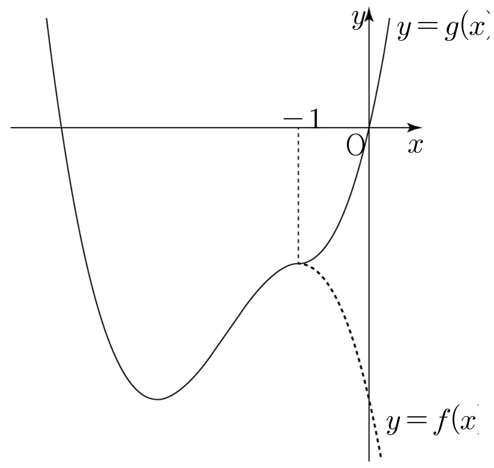
$\displaystyle=\int_{-1}^4(-16)\,dx=-16\times5=-80$

따라서 $\left|\displaystyle\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx\right|=80$

(참고)

$f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$

함수 $g(x)$의 그래프의 개형



5) ⑤

[출제의도] : 미분법과 적분법을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

곡선 $y=e^x$에서 $y'=e^x$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식이 $y=f(x)$이므로

$f(x)=e^t(x-t)+e^t$

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$에서

$h(x)=f(x)+k=e^tx+(1-t)e^t+k$ 라 하자

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 미분가능하고, 실수 k가 최소일 때는 곡선 $y=h(x)$와 곡선 $y=\ln x$가 한 점에서 만날 때이다.

곡선 $y=h(x)$와 곡선 $y=\ln x$가 만나는 점의 x좌표를 p라 하면

$e^tp+(1-t)e^t+k=\ln p$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $h'(x)=e^t$이고, $y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로

$e^t=\dfrac{1}{p}$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\ln p=\ln\dfrac{1}{e^t}=-t$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

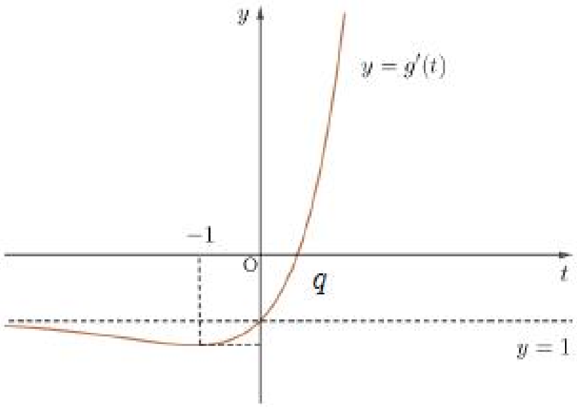
$\dfrac{1}{p}\times p+(1-t)e^t+k=-t$

$k=(t-1)e^t-t-1$ 따라서

$g(t)=(t-1)e^t-t-1$

ㄱ. $g'(t)=e^t+(t-1)e^t-1=te^t-1$

한편, $g''(t)=e^t+te^t=(t+1)e^t$이므로 함수 $y=g'(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g'(t)$의 그래프와 t축이 만나는 점의 t의 좌표를 q라 하면 $p>0$ 이므로 함수 $y=g(t)$는 $t=q$에서 극솟값을 갖는다.

$g(q)=qe^q-e^q-q-1=-e^q-q<0$

이므로 $m<0$이 되도록 하는 두 실수 a, b가 존재한다. (참)

ㄴ. $g(c)=(c-1)e^c-c-1=0$에서

$e^c=\dfrac{c+1}{c-1}$

따라서

$g(-c)=(-c-1)e^{-c}+c-1$

$=-(c+1)\times\dfrac{c-1}{c+1}+c-1$

$=0$ (참)

ㄷ. $g'(t)=te^t-1$이고 ㄴ에서 $\beta=c$, $\alpha=-c$이므로

$\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}=\dfrac{1+g'(c)}{1+g'(-c)}=\dfrac{ce^c}{-ce^{-c}}=-e^{2c}$

한편, $g(1)=-2$이므로 $c>1$이다.

이때, $-e^{2c}<-e^2$ 이므로

$\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

6)

7) ④

[출제의도] 타원의 접선의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

초점 $\mathrm{F}(1,0)$, $\mathrm{F}'(-1,0)$

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선의 방정식은 $3x_1x+4y_1y=12$

접선의 x절편은 $\dfrac{4}{x_1}$

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$

접선에 수직인 직선의 방정식의 x절편은 $\dfrac{x_1}{4}$

세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$\overline{\mathrm{RF}}=1-\dfrac{x_1}{4}$, $\overline{\mathrm{F'R}}=\dfrac{x_1}{4}+1$, $\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{x_1}-1$

$2\left(\dfrac{x_1}{4}+1\right)=\left(1-\dfrac{x_1}{4}\right)+\left(\dfrac{4}{x_1}-1\right)$

양변에 $4x_1$을 곱하여 정리하면

$3x_1^2+8x_1-16=(3x_1-4)(x_1+4)=0$

따라서 $x_1=\dfrac{4}{3}$