아드레날린 ex

1. 자연수 n과 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ \frac{1}{n} & (f(x)=0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 n의 최솟값은? 〔2022학년도 경찰대 08〕

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

1. 정답 ① 〔2022학년도 경찰대 08〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수극한은 위아래 위아래 식 차수, 계수 비교

자연수 n이 있답니다. n에다 숫자 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

그리고는 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$이라네요. 일단 x가 무한대로 가요. 그런데 아래 식의 차수는 2인데 극한값이 2로 존재하네요? 그러면 위 식의 차수 역시 2로 아래 식과 같아야 해요. 그런데 위 식은 $f(x)-x^3$입니다. 삼차식이 있으니까 없애줘야겠죠? 따라서 $f(x)=x^3+\cdots$ 입니다.

이러면 $f(x)-x^3$은 이차식이 되었어요. 그 다음에는 위와 아래의 계수를 비교해야겠죠?

$\frac{\text{위 식의 최고차항의 계수}}{\text{아래 식의 최고차항의 계수}}$가 극한값인데 이게 2입니다. 이때 아래 식의 최고차항의 계수가 1이니까 위 식의 최고차항의 계수는 2여야겠죠? 따라서 $f(x)-x^3=2x^2+\cdots$이고 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$입니다.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수극한은 논리다, 함수 구하기 - 인수정리

이때 $g(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ \frac{1}{n} & (f(x)=0) \end{cases}$이라고 합니다. 얘가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다네요.

일단 해석부터 해볼게요. $f(x)$가 지금 분모에 있어요. 그래서 $f(x) \neq 0$이면, 즉 분모가 0이 아니라면 $g(x)=\frac{x-1}{f(x)}$입니다. 그리고 $f(x)=0$일 때는 $g(x)=\frac{1}{n}$이에요.

일단 $f(x) \neq 0$인 부분은 살펴볼 필요가 없어요. $f(x)$가 다항함수라 분모에 가 있어도 어차피 연속일 테니까요. 따라서 우리는 $f(x)=0$인 부분만 살펴보면 됩니다.

$f(x)=0$의 한 실근을 k라고 해볼게요. 지금 $g(x)$는 $f(x)=0$이 되는 경계에서 함수가 바뀌잖아요? 이런 함수가 연속이 되려면 $x=k$에서 좌극한 값과 우극한 값, 그리고 함숫값이 모두 같아야 합니다. 결국 $\lim_{x \to k} \frac{x-1}{f(x)}$과 $\frac{1}{n}$이 같아야 하겠네요. 이게 $f(x)=0$이 되는 모든 실근에 대해서 적용되어야 합니다.

만약 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 3개라고 해볼게요. 대충 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라고 해보죠. 그러면 $\lim_{x \to a} \frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\lim_{x \to b} \frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\lim_{x \to c} \frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 모두 $\frac{1}{n}$이어야 합니다.

그런데 a, b, c 중에 하나가 1이라고 하더라도 저 셋 중에 최소한 2개는 ∞ 혹은 $-\infty$가 되어야 하지 않나요? 분모가 0으로 가잖아요. 값이 $\dfrac{1}{n}$이 나올 수가 없어요. 서로 다른 두 개의 실근을 갖는데 하나는 중근인 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$같은 경우도 마찬가지입니다.

그런데 실근이 아예 없을 수는 없죠. 삼차함수는 x축과 한 번은 만나야 하니까요. 그렇다면 남은 건 실근이 하나이고 나머지는 허근인 경우겠네요.

그 실근을 k라고 하면 $\lim_{x \to k}\dfrac{x-1}{(x-k)(x^2+\alpha x+\beta)}=\dfrac{1}{n}$입니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재합니다.
따라서 분자도 0으로 가서 위아래를 같은 인수로 나눠줘야겠죠? 따라서 $k=1$입니다.
$f(x)=(x-1)(x^2+\alpha x+\beta)$이네요.

그런데 아까 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$라고 했었잖아요? $f(x)=(x-1)(x^2+\alpha x+\beta)$의 이차항의 계수가 2여야 하니까 $\alpha-1=2$이고 $\alpha=3$이네요. $f(x)=(x-1)(x^2+3x+\beta)$입니다.

아까 실근이 하나이고 나머지는 허근인 경우여야 한다고 했었죠? 따라서 $x^2+3x+\beta$는 허근을 가져야 합니다. 판별식이 0보다 작아야 하니까 $9-4\beta<0$이고 $\beta>\dfrac{9}{4}$이네요.

이제 실제로 극한값을 계산해볼까요? $\lim_{x \to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+3x+\beta)}=\lim_{x \to 1}\dfrac{1}{x^2+3x+\beta}=\dfrac{1}{\beta+4}=\dfrac{1}{n}$이니까 $\beta+4=n$입니다. n은 자연수이죠? 그런데 $\beta>\dfrac{9}{4}$여야 하니까 $\beta+4=n>\dfrac{9}{4}+4$입니다. 따라서 최소의 n은 7이네요. 답은 ①번입니다.

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k,$$
$$b_1 = 1,\ b_n = b_{n-1} \times \frac{a_n}{a_n - 1}\ \ (n \geq 2)$$

를 만족시킬 때, b_{100}의 값은? 〔2022학년도 경찰대 10〕

① $\frac{44}{17}$ ② $\frac{46}{17}$ ③ $\frac{48}{17}$ ④ $\frac{50}{17}$ ⑤ $\frac{52}{17}$

2. 정답 ④ 〔2022학년도 경찰대 10〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

$a_n = \sum_{k=1}^{n} k,$ 랍니다. b_{100}의 값을 구하라네요. n에 숫자 넣으세요!

$b_1 = 1,\ b_n = b_{n-1} \times \frac{a_n}{a_n - 1}\ \ (n \geq 2)$

근데 일단 식을 좀 정리하고 가봅시다. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$이잖아요? 그러면

$-1 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$입니다. 이걸 $b_n = b_{n-1} \times \frac{a_n}{a_n - 1}$에 넣으면

$b_n = b_{n-1} \times \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} = b_{n-1} \times \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}$이 됩니다.

이제 천천히 숫자 넣으면 되겠네요. 일단 $b_1 = 1$이구요, $n = 2$를 넣으면 $b_2 = 1 \times \frac{2 \times 3}{1 \times 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$입니다.

$n = 3$을 넣으면 $b_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3 \times 4}{2 \times 5} = \frac{9}{5}$입니다. $n = 4$를 넣으면 $b_4 = \frac{9}{5} \times \frac{4 \times 5}{3 \times 6} = \frac{12}{6} = 2$입니다. $n = 5$를 넣으면 $b_5 = 2 \times \frac{5 \times 6}{4 \times 7} = \frac{15}{7}$입니다.

2) 규칙 보이면 일반화

규칙이 보이지 않나요? $\frac{3}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{12}{6},\ \frac{15}{7},\ \cdots$로 n이 1씩 늘어날 때마다 분모는 3부터 시작해서 1씩, 분자는 3부터 시작해서 3씩 증가하고 있어요. 따라서 $b_n = \frac{3n}{n+2}$입니다. $b_{100} = \frac{300}{102} = \frac{100}{34} = \frac{50}{17}$이네요.

답은 ④번입니다.

꿀팁! 나열할 때에는 약분한 결과와 약분하지 않은 결과를 확인하세요! 완전히 약분하면 안 보이는 것이 약분하지 않으면 보일 때도 있답니다!

3. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a의 값은?
〔2022학년도 경찰대 12〕

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x \left(f(t)+t^2+2at-3\right)dt\right\}=\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}(2f(t)-3t+7)\right\}dt$
(나) $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}=6$

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

3. 정답 ③ 〔2022학년도 경찰대 12〕

1) 조건해석, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$가 다항함수인데 (가)조건에서 모든 실수 x에 대해

$\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x \left(f(t)+t^2+2at-3\right)dt\right\}=\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}(2f(t)-3t+7)\right\}dt$랍니다. 일단 좌변에 미분하라는 기호가 있네요.

미분하면 $f(x)+x^2+2ax-3=\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}(2f(t)-3t+7)\right\}dt$입니다. 우변은 미분한 식을 적분하는 거죠? 일단 안에 식을 미분하면 $f(x)+x^2+2ax-3=\int_1^x\{2f'(t)-3\}dt$입니다.

이 상태에서 정적분의 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=1$을 넣으면 $f(1)+1+2a-3=0$입니다.
$f(1)=2-2a$이네요.

이후에 한 번 더 미분하면 $f'(x)+2x+2a=2f'(x)-3$입니다. 정리하면 $f'(x)=2x+2a+3$이네요.

(나)조건에서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}=6$랍니다. 형태는 미분계수 구하는 형태같죠? 일단 $f(3)$을 더하고 빼면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)-(f(3-h)-f(3))}{h}=6$입니다. 이때 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$은 극한값이 $f'(3)$로 존재하잖아요? $\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{h}$는 $-h=t$라 바꾸면 $\lim_{t\to 0}\frac{f(3+t)-f(3)}{-t}=-f'(3)$이구요. 따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)-(f(3-h)-f(3))}{h}=2f'(3)=6$이고 $f'(3)=3$입니다.

아까 $f'(x)=2x+2a+3$라고 했었잖아요. 넣으면 $f'(3)=2a+9=3$이고 $a=-3$입니다. 답은 ③번이네요.

4. 실수 p에 대하여 곡선 $y=x^3-x^2$과 직선 $y=px-1$의 교점의 x좌표 중 가장 작은 값을 m이라 하자. $m<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-x^2-px+1)dx>0$$

이 되도록 하는 m의 최솟값? 〔2022학년도 경찰대 15〕

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

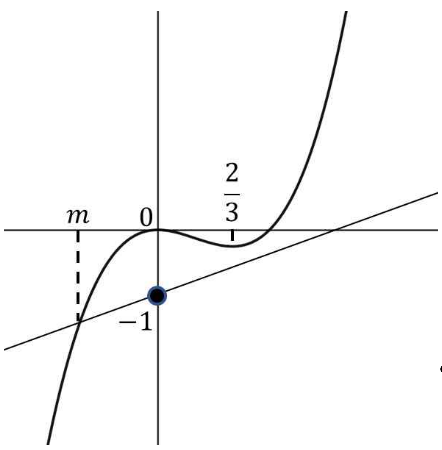
4. 정답 ② 〔2022학년도 경찰대 15〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

실수 p가 있는데 $y=x^3-x^2$와 $y=px-1$의 교점의 x좌표 중에서 x좌표가 가장 작은 값을 m이라고 하자고 합니다. 이때 $m<a<b$인 "모든" 실수 a, b에 대하여 $\int_a^b (x^3-x^2-px+1)dx>0$이 되도록 하는 m의 최솟값을 구하라네요.

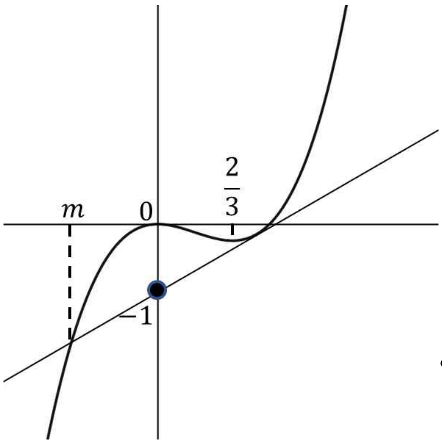
일단 $\int_a^b (x^3-x^2-px+1)dx>0$에서 안쪽의 함수의 형태를 잘 보세요. $y=x^3-x^2$에서 $y=px-1$를 뺀 형태이죠? 그리고 정적분을 하네요. 그 말은 결국 $y=x^3-x^2$와 $y=px-1$의 사이에 있는 부분을 정적분한다는 거예요. 이 값이 어느 구간을 잡아서 적분해도 무조건 0보다 커야 한다는 건 $y=x^3-x^2$가 $y=px-1$보다 위에 있어야 한다는 거죠. 최소한 $x>m$인 부분에서는요. $m<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여 성립해야 하잖아요? $y=x^3-x^2$가 $y=px-1$보다 작은 부분이 살짝이라도 생기면 그 부분을 적분할 때 값이 음수가 나오게 될 거예요.

일단 그래프부터 그려봅시다. x^3-x^2는 $x^2(x-1)$이니까 $x=0$에서 x축에 접하고, $x=1$에서 만나는 함수입니다. 미분하면 $3x^2-2x=x(3x-2)$이니까 $x=0$에서 극대, $x=\frac{2}{3}$에서 극소인 함수이구요. $px-1$은 $(0,\ -1)$을 지나고 기울기가 p인 직선입니다. 그려보면



이렇게 됩니다. 이렇게 그리면 계속 적분값이 양수가 되죠? x^3-x^2가 $px-1$보다 위에 있으니까요.

그러면 언제까지일까요? m이 최소가 되려면 기울기가 커져야 합니다. 저 그림에서 기울기를 크게 해보세요. 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 건 점점 뒤로 가잖아요. 다시 말하면 기울기가 어디까지 커져도 되는지에요.



이렇게 접할 때까지이죠. 이 이상으로 기울기가 커지면 x^3-x^2보다 $px-1$가 커지는 부분이 생깁니다.

이제 m을 구해봅시다. 접하는 점을 t라고 할게요. 그러면 접선의 식은 $f'(t)(x-t)+f(t)$이죠? 정리하면 $(3t^2-2t)x-2t^3+t^2$입니다. 이 직선이 $(0,\ -1)$을 지나야 하니까 $-2t^3+t^2=-1$이고 $2t^3-t^2-1=(t-1)(2t^2+t+1)=0$입니다. $2t^2+t+1$은 허근을 가지니까 $t=1$이네요. 식은 $x-1$입니다.

이제 나머지 한 점을 구해봅시다. $x^3-x^2=x-1$이라 하면 $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)=0$이므로 $x=m=-1$이네요. 답은 ②번입니다.

5. 자연수 n에 대하여 곡선

$$y = n\sin(n\pi x)\ \ (0 \leq x \leq 1)$$

위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? 〔2022학년도 경찰대 16〕

① 340　② 350　③ 360　④ 370　⑤ 380

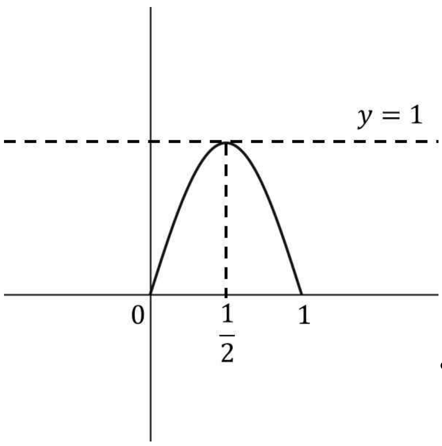
5. 정답 ⑤〔2022학년도 경찰대 16〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

자연수 n에 대하여 $y=n\sin(n\pi x)$ $(0 \leq x \leq 1)$의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하는데

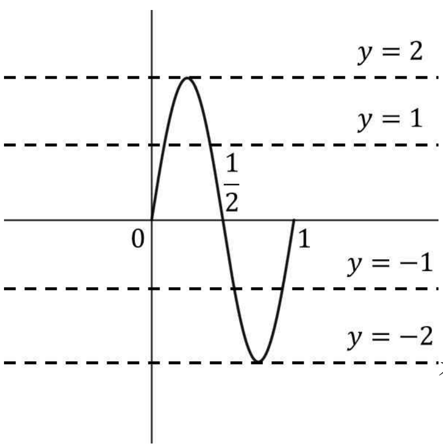
$\sum_{n=1}^{10} a_n$를 구하랍니다. n에다 숫자 넣고 그래프 그려서 확인해봐야겠죠?

$n=1$일 때 $y=\sin(\pi x)$ $(0 \leq x \leq 1)$입니다.



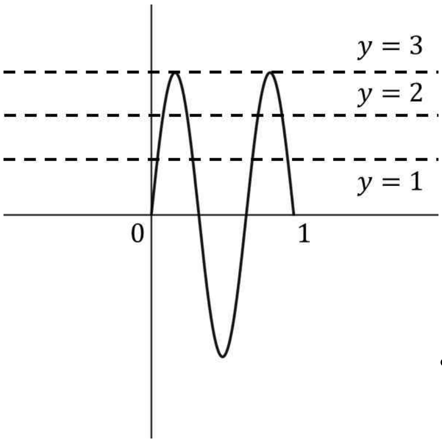
이렇게 되네요. 자연수인 건 1개죠? $a_1=1$입니다.

$n=2$일 때는 $y=2\sin(2\pi x)$ $(0 \leq x \leq 1)$입니다.



자연수인 건 3개네요. $a_2=3$입니다.

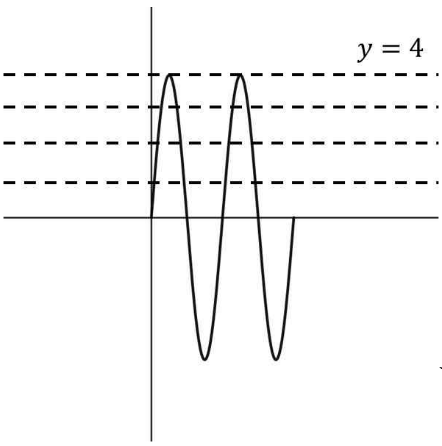
$n=3$일 때는 $y=3\sin(3\pi x)$ $(0 \leq x \leq 1)$이고



이렇게 됩니다. 왼쪽 5개 오른쪽 5개해서 $a_3 = 5+5=10$이네요.

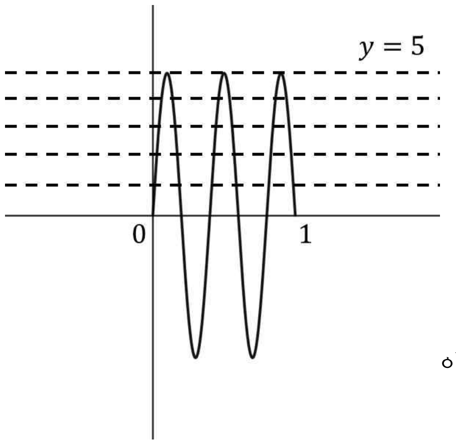
일단 2씩 증가할 때마다 봉우리가 하나씩 추가되고 1씩 증가할 때마다 봉우리당 자연수인 점 개수가 2씩 증가하는 것 같은데.. 일단 좀 더 해볼게요.

$n=4$일 때는 $y=4\sin(4\pi x)$ $(0 \le x \le 1)$



봉우리 수는 $n=3$일 때와 같고, 봉우리 당 자연수인 점 개수가 7로 증가해서 $a_4 = 7+7=14$입니다. 그러면 a_5는 봉우리가 하나 더 증가해서 총 3개가 되고 봉우리당 자연수인 점 개수가 9개가 되어서 $9+9+9=27$이 될까요? 만약 맞다면 일반화해도 될 것 같아요.

$n=5$일 때는 $y=5\sin(5\pi x)$ $(0 \le x \le 1)$이고



이렇게 됩니다. 맞네요! $a_5=9+9+9=27$입니다.

2) 규칙 보이면 일반화, 시그마 펼치기

우리가 구해야 하는 건 $\sum_{n=1}^{10} a_n$이에요. 펼쳐서 나열해보면

$a_1=1$, $a_2=3$

$a_3=5+5=10$, $a_4=7+7=14$

$a_5=9+9+9=27$, $a_6=11+11+11=33$

$a_7=13+13+13+13=52$, $a_8=15+15+15+15=60$

$a_9=17+17+17+17+17=85$, $a_{10}=19+19+19+19+19=95$

입니다. 모두 더하면 380입니다. 답은 ⑤번이네요.

6. 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x) = |x^2 - 4|(x^2 + n)$$

이 $x = a$에서 극값을 갖는 a의 개수가 4 이상일 때, $f(x)$의 모든 극값의 합이 최대가 되도록 하는 n의 값은?
〔2022학년도 경찰대 17〕

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

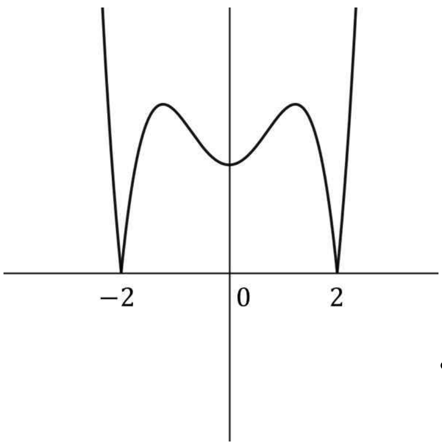
6. 정답 ③ 〔2022학년도 경찰대 17〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 절댓값 풀기, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

n이 자연수인데 $f(x)=\left|x^2-4\right|\left(x^2+n\right)$이 극값을 가지는 점의 개수가 4개 이상일 때 모든 극값의 합이 최대가 되도록 하는 n의 값을 구하랍니다. 일단 n에 숫자 넣을 준비는 해야 하구요.

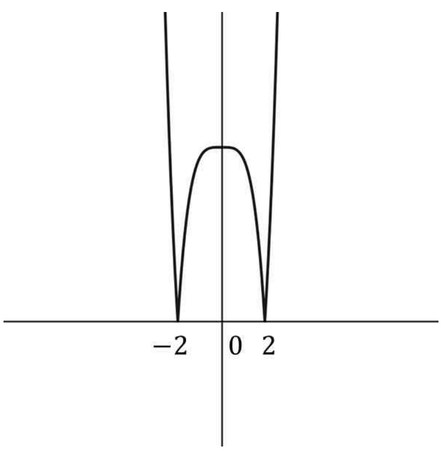
일단 절댓값부터 풀죠. $x^2-4 \geq 0$이라면, 즉 $x \geq 2$, $x \leq -2$이라면 $f(x)=(x-2)(x+2)\left(x^2+n\right)$입니다.
$x^2-4<0$이라면, 즉 $-2<x<2$이라면 $f(x)=-(x-2)(x+2)\left(x^2+n\right)$입니다.

일단 $f(x)=(x-2)(x+2)\left(x^2+n\right)=x^4+(n-4)x^2-4n$의 경우 x축과 $x=-2$, $x=2$에서 만납니다.
x^2+n은 n이 자연수라서 만나지 않구요. 거기에 지금 우함수이죠? y축 대칭입니다. 미분하면
$4x^3+2(n-4)x=2x\left(2x^2+n-4\right)$이네요. 만약 $n<4$이라면? $x=0$과 $x^2=\dfrac{4-n}{2}$으로 총 3개의 극값을 가지는 그래프가 될 거예요. 그래프를 그려보면



이렇게 되네요. 이러면 극값은 총 5개가 되죠. 4개 이상이네요?

$n=4$이라면 $f(x)=(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)=x^4-16$으로 그냥 이차함수 같은 모양입니다. 극값은 총 3개네요.



$n > 4$이라면 $4x^3 + 2(n-4)x = 2x(2x^2 + n - 4)$에서 $2x^2 + n - 4$는 허근을 가지게 됩니다. 사실상 바로 위의 그림과 같은 형태인 거죠. 그러면 총 3개로 극값이 4개 이상이 되지 않네요.

결국 $n < 4$이어야 합니다. n은 자연수니까 $n = 1,\ 2,\ 3$이네요. 이 중에서 모든 극값의 합이 최대가 되는 n을 구해야 합니다. 그런데 극값 5개 중 $x = -2$, $x = 2$는 0이니까 고려할 필요가 없어요. 결국 $-2 < x < 2$에서 값이 얼마나 커질 수 있는지가 중요합니다.

아까 $x = 0$과 $x^2 = \dfrac{4-n}{2}$에서 극값을 가진다고 했었죠? 일단 $x = 0$에서 극값은 $4n$입니다. $x^2 = \dfrac{4-n}{2}$에서 극값은 $\dfrac{(n+4)^2}{4}$입니다. 결국 극값이 커질려면 n이 커야 하네요. 따라서 최대가 되는 n은 3입니다. 답은 ③번이네요.

7. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & (\cos x \geq \sin x)\\ \sin x & (\cos x < \sin x)\end{cases},$$

$$g(x)=\cos ax \ \ (a>0\text{인 상수})$$

이다. 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 a의 최솟값을 p라 하자.
닫힌구간 $\left[0,\ \frac{11}{12}\pi\right]$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=\cos px$의 교점의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값은? 〔2022학년도 경찰대 19〕

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

7. 정답 ② 〔2022학년도 경찰대 19〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=\begin{cases}\cos x & (\cos x \ge \sin x) \\ \sin x & (\cos x < \sin x)\end{cases}$,이 있는데 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점이 3개가 되도록

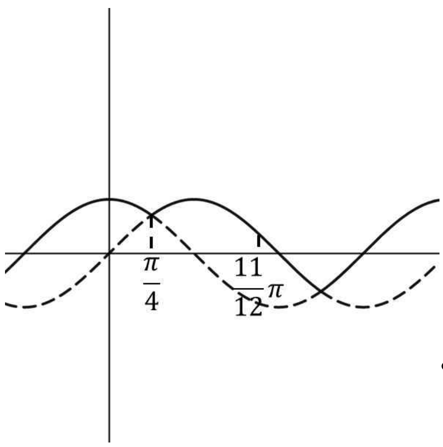
$g(x)=\cos ax$ ($a>0$인 상수)

하는 a의 최솟값을 p라고 한답니다. 그리고 $\left[0,\ \frac{11}{12}\pi\right]$에서 $y=f(x)$와 $y=\cos px$의 교점의 개수를 q라고

한다네요. 일단 a의 최솟값인 p를 찾아야겠어요.

함수 줬으니까 그래프부터 그려봅시다. 일단 $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이니까 $x=\frac{\pi}{4}$는 $\cos x$와 $\sin x$가 교차하는

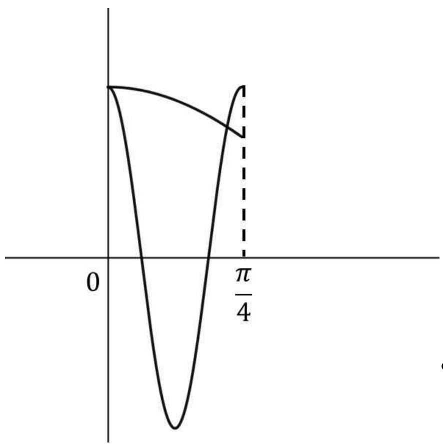
지점이에요. 그래프 그려보면



이렇게 됩니다. 이 그래프와 $g(x)=\cos ax$가 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 만나는 점의

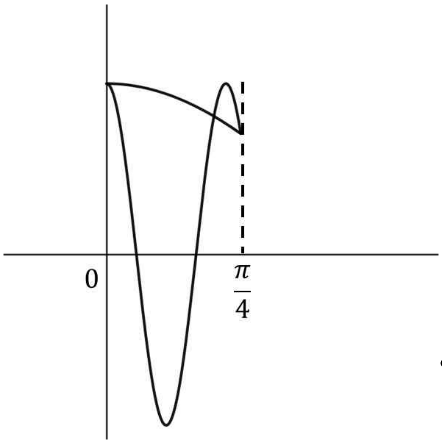
개수가 3개가 되도록 그래프를 그려야 해요. 저기만 떼어놓고 생각해볼게요.

천천히 a를 증가시켜 보죠. $a=1$이면 만나는 점이 너무 많아요. 구불구불한 게 몇 번은 더 있어야 합니다.
최소한 구불구불한 게 생기고 $f(x)$와 만나려면 $a=8$이 되어야겠네요.



이렇게 되었을 때 2개의 점에서 만납니다. 그러면 구불구불한 게 더

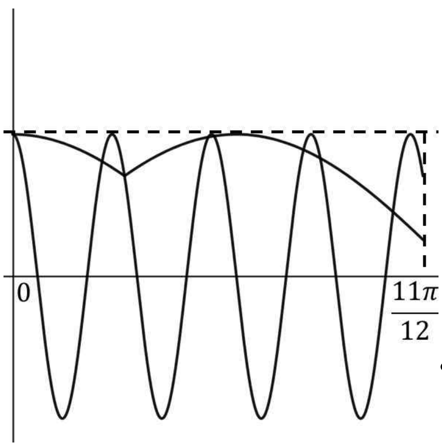
있어야겠죠? 증가시키면 결국



이때가 처음으로 3개의 점에서 만날 때입니다. a가 최소일 때죠.

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{a}{4}\pi$이니까 최소가 될 때는 $a=9$입니다. $p=9$입니다.

이제 $\left[0,\ \frac{11}{12}\pi\right]$에서 $y=f(x)$와 $y=\cos 9x$의 교점의 개수를 구해봅시다. 그래프를 그리면



이렇게 됩니다. 총 8개의 점에서 만나네요. $q=8$입니다. 따라서

$p+q=17$입니다. 답은 ②번이네요.