제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사 5회

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ········· 1~2쪽

○ 선택과목

미적분 ········· 3쪽

기하 ········· 3쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 실수발견 모의고사 5회 문제지

제 2 교시

수학 영역

홀수형

공통과목

1. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$ 의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$ 가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오.

[4점][2017학년도 수능 나30]

2. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\,|\,0\le x\le n,\ 0\le y\le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다.
(나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n)\le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

[4점][2016년 9월 나30]

3. 집합 $\{x \mid 0<x<2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}-1 & (0<x\le 1) \\ \dfrac{1}{x-1}-1 & (1<x<2) \end{cases}$$

일 때, 함수 $y=f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$를 <보기>에서 모두 고른 것은?

[3점][2006년 9월 가06]

<보 기>

ㄱ. $g(x)=(x-1)^2 \quad (0<x<2)$

ㄴ. $g(x)=(x-1)^3+1 \quad (0<x<2)$

ㄷ. $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & (0<x\leqq 1) \\ (x-1)^3 & (1<x<2) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(-x)=-f'(x)$$

를 만족시킨다. $f'(1)=0$, $f(1)=2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2018년 7월 나20]

<보 기>

ㄱ. $f'(-1)=0$

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여 $\int_{-k}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{k} f(x)dx$

ㄷ. $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여 $\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선택과목 (미적분)

5. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+3}$ 에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)\,(0<x<4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
[4점][2020년 7월 가21]

< 보 기 >

ㄱ. $h(1)=0$

ㄴ. 두 양수 a, $b\,(a<b<4)$에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $b-a=2$이다.

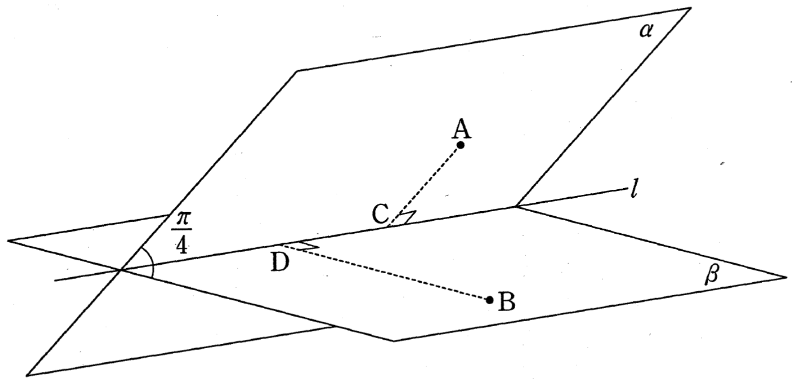
ㄷ. $h(x)$의 도함수 $h'(x)$의 최댓값은 $\frac{7}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선택과목 (기하)

6. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

[4점][2016년 9월 가29]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) 65

[출제의도] 삼차함수의 그래프가 역함수를 가질 조건을 이용하여 주어진 방정식이 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-6x+6$이므로

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$

$12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$

$\{g(x)\}^2-2g(x)=4x^2-4x$

$\{g(x)\}^2-4x^2-2g(x)+4x=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x)-2(g(x)-2x)=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x-2)=0$

따라서 $g(x)-2x=0$ 또는 $g(x)+2x-2=0$

(ⅰ) $g(x)-2x=0$일 때, 즉 $g(x)=2x$이면

$f(2x)=x$이므로

$8x^3-12x^2+12x+k=x$

$k=-8x^3+12x^2-11x \quad \cdots$ ㉠

따라서, $h_1(x)=-8x^3+12x^2-11x$라 하면

$h_1{}'(x)=-24x^2+24x-11<0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서

$-7\le h_1(x)\le 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는

$-7\le k\le 0$

(ⅱ) $g(x)+2x-2=0$일 때, 즉 $g(x)=-2x+2$이면

$f(-2x+2)=x$이므로

$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$

$-8x^3+12x^2-13x+8+k=0$

$k=8x^3-12x^2 13x-8 \quad \cdots$ ㉡

따라서, $h_2(x)=8x^3-12x^2+13x-8$라 하면

$h_2{}'(x)=24x^2-24x+13>0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서

$-8\le h_2(x)\le 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는

$-8\le k\le 1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-8\le k\le 1$이므로

$m=-8,\ M=1$

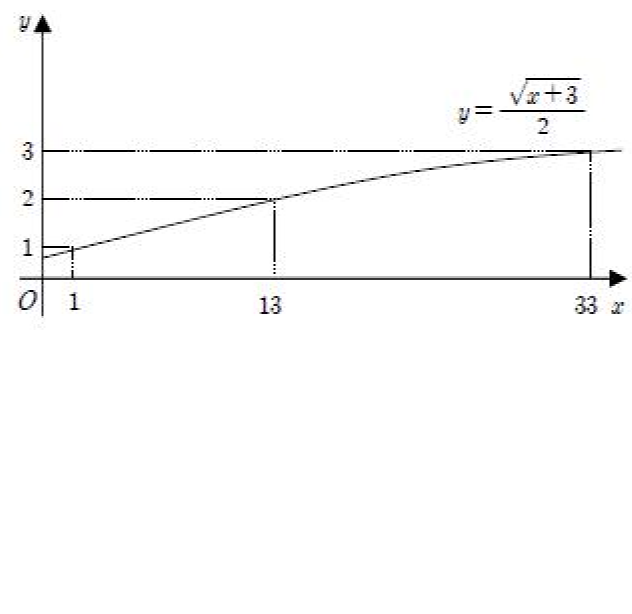
따라서 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$

2) 65

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있는가?

$y=m$ (m은 자연수)라 하면 $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}=m,\ \sqrt{x+3}=2m$에서

$x=4m^2-3$이므로 $x\ge 0$에서 곡선 $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$은 그림과 같다.



(ⅰ) $n=1$일 때

주어진 조건을 만족하는 정사각형은 존재하지 않는다.

$f(1)=0$

(ⅱ) $n=k$ $(1<k\le 13$인 자연수)일 때

주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는

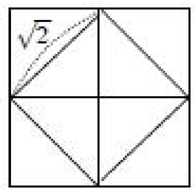
$k-1$이므로

$f(13)=12$

(ⅲ) $n=k$ $(13<k\le 33$인 자연수)일 때

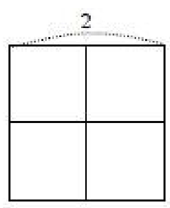
① 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는
$(k-1)+(k-13)=2k-14$

② 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형은 그림과 같다.



따라서 정사각형의 개수는 $k-13$ $(13<k\le 33$인 자연수)

③ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 2인 정사각형은 그림과 같다.



따라서 정사각형의 개수는 $k-14$ $(13<k\le 33$인 자연수)이다.

①, ②, ③에 의하여 $f(33)=52+20+19=91$

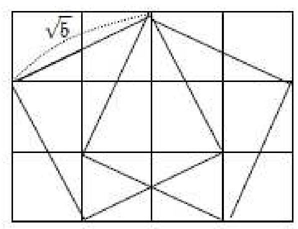
(ⅳ) $n=k$ $(33<k\le 61$인 자연수)일 때

① 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는
$(k-1)+(k-13)+(k-33)=3k-47$

② 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 개수는
$(k-13)+(k-33)=2k-46$ $(33<k\le 61$인 자연수)

③ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는
$(k-14)+(k-34)=2k-48$ $(33<k\le 61$인 자연수)

④ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형은 그림과 같다.



따라서 정사각형의 개수는 $2(k-34)+1=2k-67$

①, ②, ③, ④에 의하여 $f(61)=136+76+74+55=341$

(ⅴ) $n=k$ $(61<k\le 97$인 자연수)일 때

① 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는
$(k-1)+(k-13)+(k-33)+(k-61)=4k-108$

② 주어진 조건을 만족시는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 개수는
$(k-13)+(k-33)+(k-61)=3k-107$ $(61<k\le 97$인 자연수)

③ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는
$(k-14)+(k-34)+(k-62)=3k-110$ $(61<k\le 97$인 자연수)

④ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 개수는
$2(k-34)+1+2(k-62)+1=4k-190$

따라서,

$f(64)=148+85+82+66=381$

$f(65)=152+88+85+70=395$

$f(66)=156+91+88+74=409$

이므로 $f(n)\le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 65이다.

3) ③

$0<x<1$ 일 때, $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$

$1<x<2$ 일 때, $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{(x-1)^3}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}(2-x)(x-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=0$

이 때, $f(1)g(1)=0\times0=0$ 이므로

$y=f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x-1}{x}\{(x-1)^3+1\}=0$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{2-x}{x-1}\{(x-1)^3+1\}=\infty$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$y=f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x-1}{x}(x^2+1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{2-x}{x-1}(x-1)^3$

$=\lim\limits_{x\to1+}(2-x)(x-1)^2=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=0$

이 때, $f(1)g(1)=0\times2=0$ 이므로 $y=f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

<참고>

$y=\dfrac{1}{x}-1$ 의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고,

$y=\dfrac{1}{x-1}-1$ 의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이를 이용하여 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프를 그려서 생각하면 좀 더 쉽게 연속성을 파악할 수 있다.

4) ⑤

[출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 참, 거짓 추론하기

ㄱ. $f'(-x)=-f'(x)$ 이고 $f'(1)=0$

$f'(-1)=-f'(1)=0$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=f'(1)=0$, $f'(0)=0$

$f'(x)=4x(x-1)(x+1)$

$f(x)=x^4-2x^2+C$

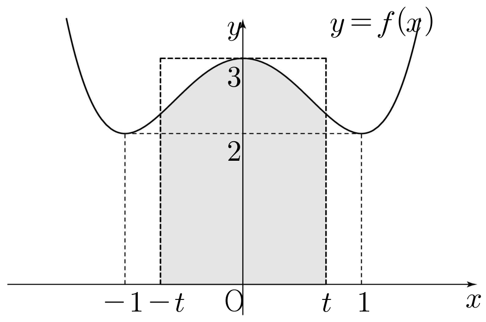
$f(1)=2$, $C=3$

$f(x)=x^4-2x^2+3$

$f(-x)=f(x)$ 이므로

$\displaystyle\int_{-k}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{k}f(x)dx$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 의 그래프는 그림과 같다.



$x=-t$, $x=t$, x축, $y=f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이

$\displaystyle\int_{-t}^{t}f(x)dx$ 는 $x=-t$, $x=t$, x축, $y=3$ 으로 둘러싸인 직사각형의 넓이 $6t$ 보다 작다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

5)

6) ②

$f'(x)=\dfrac{8x(x^2+3)-4x^2\times2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{24x}{(x^2+3)^2}$

양의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

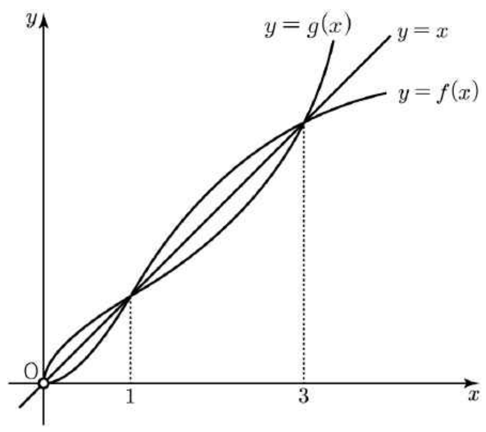
$f(x)=x$에서 $x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)=0$이므로

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이다.

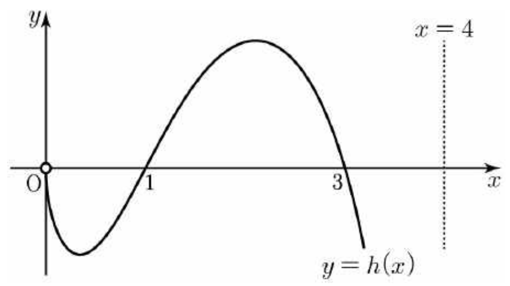
$f''(x)=\dfrac{24(x^2+3)^2-24x\times2(x^2+3)\times2x}{(x^2+3)^4}=\dfrac{72(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}$

곡선 $y=f(x)$는 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하고, 열린 구간 $(1,\ \infty)$에서 위로 볼록하며, 변곡점은 $(1,\ 1)$이다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서만 $h(x)\ge0$이고, 함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이므로

$f(1)=g(1)=1$

$h(1)=0$ (참)

ㄴ. 두 양수 a, b에 대하여 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대가 되려면 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 $h(x)\ge0$이고 $b-a$의 값이 최대이어야 하므로 $a=1$, $b=3$

그러므로 $b-a=2$ (참)

ㄷ. $f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이고 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{f'(g(x))}$

$g''(x)=-\dfrac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$에서만 변곡점을 가지므로 $f''(1)=0$

$f(1)=g(1)=1$이므로

$g''(1)=-\dfrac{f''(g(1))g'(1)}{\{f'(g(1))\}^2}=-\dfrac{f''(1)g'(1)}{\{f'(1)\}^2}=0$

$h''(1)=f''(1)-g''(1)=0$

(ⅰ) $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여

$f''(x)>0,\ g'(x)>0,\ 0<g(x)<1$이므로

$g''(x)=-\dfrac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}<0$

열린 구간 $(0,\ 1)$에서

$h''(x)=f''(x)-g''(x)>0$

(ⅱ) $1<x<4$인 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)>0,\ g(x)>1$이고 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

$f''(x)<0$이므로

$g''(x)=-\dfrac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}>0$

열린 구간 $(1,\ 4)$에서

$h''(x)=f''(x)-g''(x)<0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $h'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$h''(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	

함수 $h'(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.

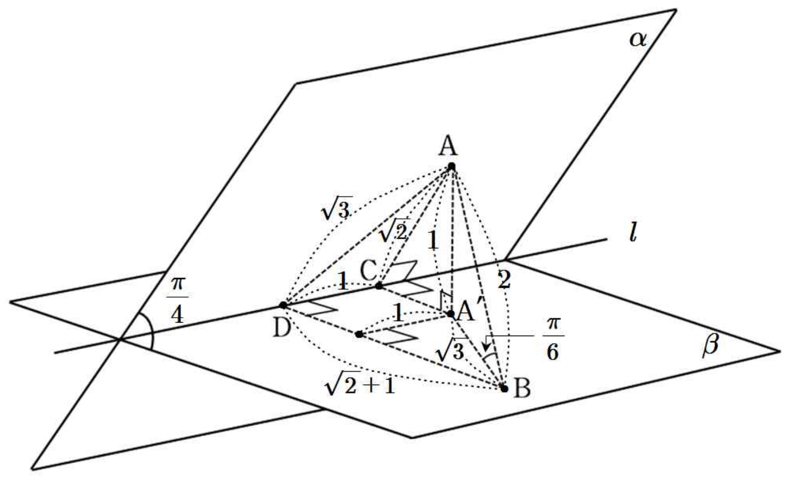
$f'(1)=\dfrac{3}{2}$이므로

$h'(1)=f'(1)-\dfrac{1}{f'(g(1))}=f'(1)-\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{5}{6}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

7)
6)

8) 12



A 에서 C 를 지나고 직선 l 에 수직이며 β 에 포함되는 직선에 수선의 발을 내리고 그 수선의 발을 A′ 이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 A 에서 평면 β 에 내린 수선의 발이 A′ 이 된다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 직선 AB 와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$\angle\mathrm{ABA'}=\dfrac{\pi}{6}$ 이고 $\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AA'}}=1$ 이다.

또한 α 와 β 가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$ 이므로 이면각의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{ACA'}=\dfrac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{CA'}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

한편, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$ 이므로

직각삼각형 ACD 에서 $\overline{\mathrm{CD}}=1$ 이다.

사면체 ABCD 의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{BCD}$의 넓이$)\times\mathrm{AA'}$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\right)\times\overline{\mathrm{AA'}}$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times(\sqrt{2}+1)\right)\times1$

$=\dfrac{1}{6}(\sqrt{2}+1)$

따라서 $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{6}$ 이므로 $36(a+b)=12$이다.