제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사 4회

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ······································ 1~2쪽

○ 선택과목

미적분 ······································ 3쪽

기하 ······································ 3쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 실수발견 모의고사 4회 문제지

제 2 교시

수학 영역

홀수형

공통과목

1. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
> (나) $n \le x < n+1$일 때,
> $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$
> 이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k\,(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)\,dx$라 할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오.

[4점][2018학년도 수능 나30]

2. 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자.
$m>2$인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C(p, q), D(r, s)라고 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.)

[4점][2008년 6월 가나17]

< 보 기 >

ㄱ. $p<-\dfrac{1}{3}$, $r>\dfrac{1}{2}$
ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기는 같다.
ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.

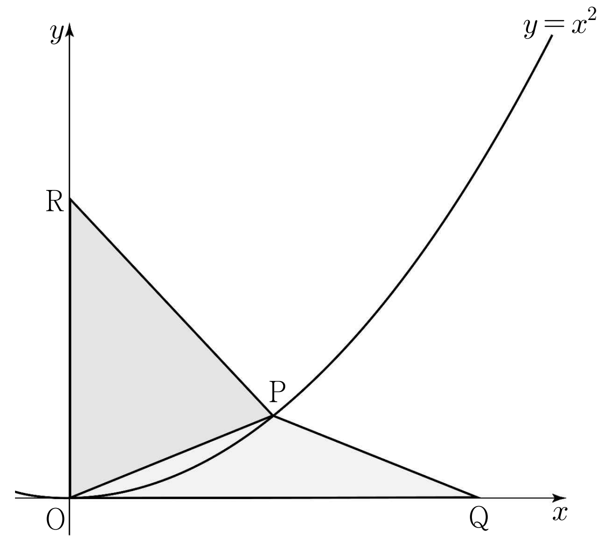
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)(t>0)$에 대하여 x축 위의 점 Q, y축 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 POQ는 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이다.
> (나) 삼각형 PRO는 $\overline{\mathrm{RO}}=\overline{\mathrm{RP}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 POQ와 삼각형 PRO의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{T(t)-S(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2017년 4월 나21]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

4. 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 검은 타일과 흰 타일이 있다.

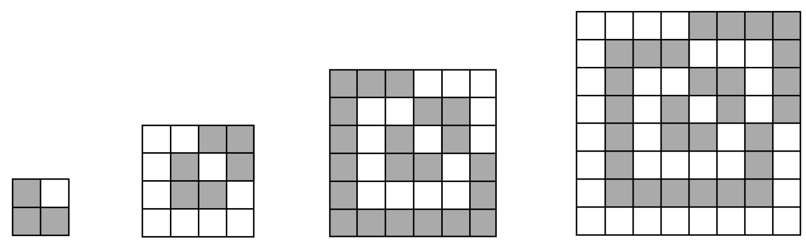
(가) [그림1]과 같이 검은 타일 3개와 흰 타일 1개를 붙여 한 변의 길이가 2인 정사각형이 되도록 한다.

(나) [그림2]와 같이 [그림1]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 4인 정사각형이 되도록 한다.
이때 [그림1]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을,
검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

(다) [그림3]과 같이 [그림2]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 6인 정사각형이 되도록 한다.
이때 [그림2]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을,
검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

이와 같은 과정을 계속하여 전체 타일의 개수가 400개가 되었을 때, 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수 사이의 관계를 옳게 나타낸 것은?

[4점][2005년 6월 가나14]



[그림1] [그림2] [그림3]

① 검은 타일과 흰 타일의 개수가 같다.
② 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 18개 많다.
③ 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 20개 많다.
④ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 18개 많다.
⑤ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.

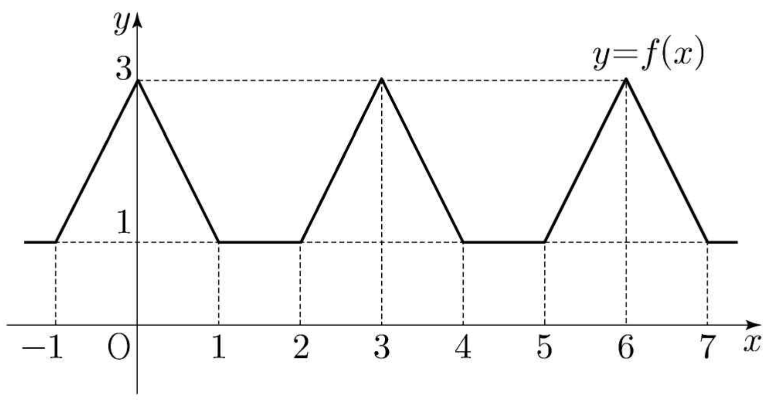
선택과목 (미적분)

5. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린 구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 6월 가30]



선택과목 (기하)

6. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 양수 x에 대하여 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$x\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

를 만족시킨다. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$의 값이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하자. $50S$의 값을 구하시오.

[4점][2019년 7월 가29]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) 9

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 정하고 극한값을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

직선 $y=x$와 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{n^2}{2}$이다.

$2\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{2}\right)=\frac{241}{768}$이므로

$F(x)=h(x)-x=\begin{cases} g(x)-x & (0\le x<5,\ x\ge k) \\ x-g(x) & (5\le x<k) \end{cases}$

로 놓으면

$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx=\frac{241}{768}$이다.

$n\le x<n+1$일 때

$g(x)-x=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}$

$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{3}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2-(x-n)\right\}$

$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2\right\}$

$=\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(1+n-x)$

$=-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$

이므로

$\int_n^{n+1}\{g(x)-x\}\,dx$

$=\int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))\right\}dx$

$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1)\right\}dx$

$=-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 x(x-1)\,dx$

$=\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{1}{6}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편,

$\int_0^n F(x)\,dx$

$=\int_0^1(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_4^5(x-g(x))\,dx$

$+\int_5^6(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{k-1}^k(x-g(x))\,dx$

$+\int_k^{k+1}(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{n-1}^n(x-g(x))\,dx$

이때, ㉠은 $n=0$일 때도 성립하므로 ㉠에서

$2\int_0^n F(x)\,dx$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}-\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$+\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$이므로

$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$

$=\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}$

즉, $\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{241}{768}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{1}{16}$이므로

$k-5=4$에서

$k=9$

2) ④

$y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$의 교점의 x좌표를 구하면

$|5x|=x+2$ 에서

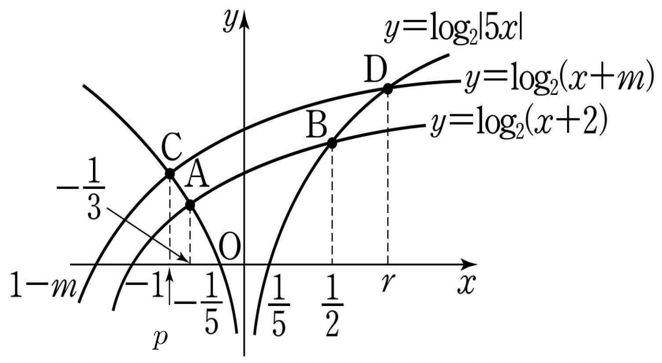
$x>0$일 때 $5x=x+2$, $x=\frac{1}{2}$

$x<0$일 때 $-5x=x+2$, $x=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{3},\ \log_2\frac{5}{3}\right)$ $\therefore$ $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ \log_2\frac{5}{2}\right)$

$y=\log_2|5x|$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로

$y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$, $y=\log_2(x+m)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $m>2$이므로 그림에서 $r>\frac{1}{2}$, $p<-\frac{1}{3}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+m)$의 교점을 구하면

$|5x|=x+m$에서 $x=\frac{m}{4}$, $-\frac{m}{6}$

$\therefore$ $\mathrm{C}\left(-\frac{m}{6},\ \log_2\frac{5m}{6}\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{m}{4},\ \log_2\frac{5m}{4}\right)$

직선 AB의 기울기는

$\frac{\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{6}{5}\log_2\frac{3}{2}$

직선 CD의 기울기는

$$\frac{\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}}{\frac{m}{4}-\left(-\frac{m}{6}\right)}=\frac{12}{5m}\log_2\frac{3}{2}$$

$m>2$이므로 $\frac{12}{5m}<\frac{6}{5}$

따라서, 두 직선의 기울기는 서로 다르다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. B의 y좌표와 C의 y좌표가 같으므로

$\log_2\frac{5}{2}=\log_2\frac{5m}{6}$ $\therefore\ m=3$

$\overline{BC}$가 공통이므로 $\overline{BC}$를 밑변으로 하면

$\triangle$ABC의 높이는 $\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}=\log_2\frac{3}{2}$

$\triangle$DBC의 높이는 $\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}=\log_2\frac{3}{2}$

따라서 $\triangle$ABC, $\triangle$DBC의 넓이는 같다. $\therefore$ 참

3) ②

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로 점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$

삼각형 POQ의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\times2t\times t^2=t^3$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$이고

직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이므로

직선 MR의 방정식은

$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{t}{2}\right)$

$y=-\frac{1}{t}x+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$

$\therefore\ R\left(0,\ \frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$

삼각형 PRO의 넓이는

$T(t)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\times t=\frac{1}{4}(t^3+t)$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}$$

4) ⑤

각 정사각형에서 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수의 차를 구해 보자.

한 변의 길이가 2인 정사각형은 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 2개 많다.

한 변의 길이가 4인 정사각형은 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 4개 많다.

한 변의 길이가 6인 정사각형은 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 6개 많다.

⋮

한 변의 길이가 20인 정사각형은 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.

따라서, 전체 타일의 개수가 400개가 되었을 때, 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.

[다른풀이]

a_n =n단계에서의 흰타일개수-검은타일개수 라고 하면

$a_1=-2$

$a_2=-2+6=4$

$a_3=-2+6-10=-6$

$a_4=-2+6-10+14=8$

⋮

$a_{10}=(-2+6)+(-10+14)+(-18+22)+(-26+30)+(-34+38)$

$=4\times5=20$

7) 331

[출제의도] 합성함수의 미분법과 미분가능성의 정의를 알고 있는가?

함수 $f(2^x)$에서 $p(x)=2^x$이라 하면 함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 연속이다.

한편, 자연수 m에 대하여

$3m-3<x<3m-2$일 때, $f'(x)=-2$

$3m-2<x<3m-1$일 때, $f'(x)=0$

$3m-1<x<3m$일 때, $f'(x)=2$

이고,

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(p(x+h))-f(p(x))}{h}\right|$$

$=|f'(p(x))\times p'(x)|$

$=|f'(p(x))|\times2^x\ln2$

$=|f'(2^x)|\times2^x\ln2$

이므로 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

(i) $3m-3\le2^x<3m-2$일 때

$g(x)=|f'(2^x)|\times2^x\ln2=2\ln2\times2^x$

(ii) $3m-2\le2^x<3m-1$일 때,

$g(x)=|f'(2^x)|\times2^x\ln2=0\times2^x=0$

(iii) $3m-1\le2^x<3m$일 때,

$g(x)=|f'(2^x)|\times2^x\ln2=2\ln2\times2^x$

이때

$\lim_{x\to\log_2(3m-2)-}g(x)\neq\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)$

, $\lim_{x\to\log_2(3m-1)-}g(x)\neq\lim_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)$,

$\lim_{x\to(\log_2 3m)-}g(x)=\lim_{x\to(\log_2 3m)+}g(x)=g(\log_2 3m)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2(3m-2)$와 $x=\log_2(3m-1)$에서 불연속이다.

그런데 $-5<x<5$에서 $\frac{1}{32}<2^x<32$ 이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2 k$ $(k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$에서 불연속이다.

즉, $a_k=\log_2 k$ $(k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$이므로

$n=31-10=21$ 이고, $g(a_k)$는 다음과 같다.

(i) $2^{a_k}=3m-2$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-2<2^x<3m-1$일 때 $g(x)=0$이므로

$g(a_k)=\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)=0$

(ii) $2^{a_k}=3m-1$, 즉 $a_k=\log_2(3m-1)$일 때

$3m-1<2^x<3m$일 때 $g(x)=2\ln2\times2^x$이므로

$g(a_k)=\lim\limits_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)=2\ln2\times(3m-1)$

이상에서

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{g(a_k)}{\ln2}=\sum\limits_{k=1}^{21}\dfrac{g(a_k)}{\ln2}$

$=2(2+5+8+11+14+\cdots+29)$

$=2\times\dfrac{10(2+29)}{2}=310$

따라서

$\therefore n+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{g(a_k)}{\ln2}=21+310=331$

다른풀이 :

함수 $f(x)$는

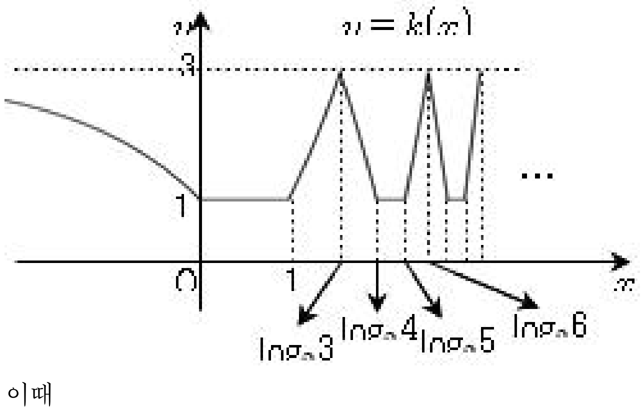
$$f(x)=\begin{cases}\vdots & \\ -2x+3 & (0\le x<1)\\ 1 & (1\le x<2)\\ 2x-3 & (2\le x<3)\\ -2(x-3)+3 & (3\le x<4)\\ 1 & (4\le x<5)\\ 2(x-3)-3 & (5\le x<6)\\ -2(x-6)+3 & (6\le x<7)\\ 1 & (7\le x<8)\\ 2(x-6)-3 & (8\le x<9)\\ \vdots & \end{cases}$$

이다.

$k(x)=f(2^x)$이라 하면

$$k(x)=f(2^x)=\begin{cases}-2\times2^x+3 & (x<\log_2 1)\\ 1 & (\log_2 1\le x<\log_2 2)\\ 2\times2^x-3 & (\log_2 2\le x<\log_2 3)\\ -2(2^x-3)+3 & (\log_2 3\le x<\log_2 4)\\ 1 & (\log_2 4\le x<\log_2 5)\\ 2(2^x-3)-3 & (\log_2 5\le x<\log_2 6)\\ -2(2^x-6)+3 & (\log_2 6\le x<\log_2 7)\\ 1 & (\log_2 7\le x<\log_2 8)\\ 2(2^x-6)-3 & (\log_2 8\le x<\log_2 9)\\ \vdots & \end{cases}$$

이므로 함수 $y=k(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때

$$k'(x)=\begin{cases}-2\times2^x\times\ln2 & (x<\log_2 1)\\ 0 & (\log_2 1<x<\log_2 2)\\ 2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 2<x<\log_2 3)\\ -2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 3<x<\log_2 4)\\ 0 & (\log_2 4<x<\log_2 5)\\ 2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 5<x<\log_2 6)\\ -2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 6<x<\log_2 7)\\ 0 & (\log_2 7<x<\log_2 8)\\ 2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 8<x<\log_2 9)\\ \vdots & \end{cases}$$

이고

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|=\lim_{h\to0+}\frac{|k(x+h)-k(x)|}{h}$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}-2\times2^x\times\ln2 & (x<\log_2 1)\\ 0 & (\log_2 1\le x<\log_2 2)\\ 2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 2\le x<\log_2 4)\\ 0 & (\log_2 4\le x<\log_2 5)\\ 2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 5\le x<\log_2 7)\\ 0 & (\log_2 7\le x<\log_2 8)\\ 2\times2^x\times\ln2 & (\log_2 8\le x<\log_2 10)\\ \vdots & \end{cases}$$

이다. 이때

$\lim\limits_{x\to\log_2(3m-2)-}g(x)\ne\lim\limits_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)$,

$\lim\limits_{x\to\log_2(3m-1)-}g(x)\ne\lim\limits_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)$,

$\lim\limits_{x\to(\log_2 3m)-}g(x)=\lim\limits_{x\to(\log_2 3m)+}g(x)=g(\log_2 3m)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2(3m-2)$와 $x=\log_2(3m-1)$에서 불연속이다.

그런데 $-5<x<5$에서 $\dfrac{1}{32}<2^x<32$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2 k$ $(k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$ 에서 불연속이다.

즉, $a_k=\log_2 k$ $(k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$이므로

$n=31-10=21$이고, $g(a_k)$는 다음과 같다.

(i) $2^{a_k}=3m-2$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-2<2^x<3m-1$일 때 $g(x)=0$이므로

$g(a_k)=\lim\limits_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)=0$

(ii) $2^{a_k}=3m-1$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-1<2^x<3m$일 때 $g(x)=2\ln2\times2^x$이므로

$g(a_k)=\lim\limits_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)=2\ln2\times(3m-1)$

이상에서

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{g(a_k)}{\ln2}=\sum\limits_{k=1}^{21}\dfrac{g(a_k)}{\ln2}$

$=2(2+5+8+11+14+\cdots+29)$

$=2\times\dfrac{10(2+29)}{2}=310$

따라서

$n+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{g(a_k)}{\ln2}=21+310=331$

8)

9) 60

[출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 삼각형의 넓이 추론하기

세 점 A, B, C는 원 위의 점이므로

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$

$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}=-3\overrightarrow{OC}$ 에서

$x^2|\overrightarrow{OA}|^2+10x(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})+25|\overrightarrow{OB}|^2=9|\overrightarrow{OC}|^2$

$x^2+10x(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})+25=9$ 이고

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{-x^2-16}{10x}=-\dfrac{1}{10}\left(x+\dfrac{16}{x}\right)$

$x>0$이므로

$x+\frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{16}{x}}=8$

(등호는 $x=4$ 일 때 성립한다.)

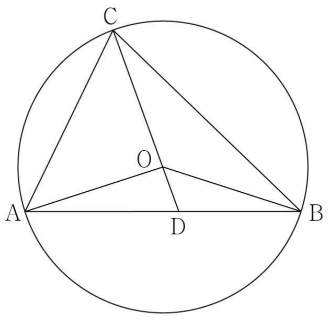
$-\frac{1}{10}\left(x+\frac{16}{x}\right) \leq -\frac{4}{5}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 $-\frac{4}{5}$ 를 갖는다.

$x=4$ 일 때 주어진 식은

$4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{CO}=\frac{4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{9}$



선분 AB 를 $5:4$ 로 내분하는 점을 D 라 하면

$\overrightarrow{OD}=\frac{4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{9}$ 이다.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OD}$ 에서 $\overline{CO}:\overline{OD}=3:1$ 이므로

$\overline{CD}:\overline{OD}=4:1$ ……㉠

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$ 에서

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$ 이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

삼각형 OAB 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta=\frac{3}{10}$

㉠에 의하여 삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{6}{5}$

따라서 $50S=60$