제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사 3회

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 실수발견 모의고사 3회 문제지

수학 영역

제 2 교시

홀수형

공통과목

1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$ 이다.
(나) 모든 정수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$ 을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k 에 대하여 닫힌구간 $[2k,\ 2k+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_{3}^{6} f(x)dx = a$ 라 할 때, $6a$ 의 값을 구하시오.

[4점][2014년 6월 가30]

2. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_1 = 5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5,$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}a_n & (a_n\text{이 6의 배수일 때}) \\ a_n - 1 & (a_n\text{이 6의 배수가 아닐 때}) \end{cases}$$

이다. $a_k = 1$일 때, k의 값은?

[4점][2009년 7월 나28]

① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38

3. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^4} = 1$
(나) $f(1) = f'(1) = 1$

$-1 \le n \le 4$인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f(x-n) + n \ (n \le x < n+1)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린구간 $(-1,\ 5)$에서 미분가능할 때, $\int_0^4 g(x)dx = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2016년 7월 나30]

4. 수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 0$이고 $a_6 = 1$이다. $a_m = 3$일 때, $a_m + a_{2m} + a_{3m} + \cdots + a_{9m}$의 값을 구하시오.

[4점][2009년 9월 가나22]

선택과목 (미적분)

5. 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

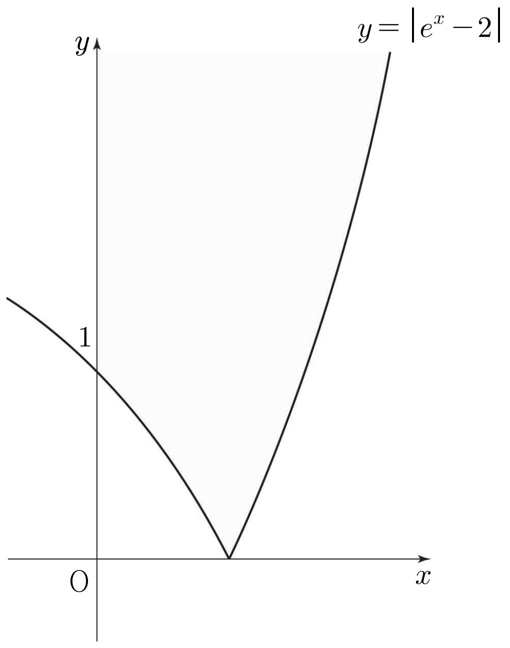
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge |e^x - 2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다.
> (나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

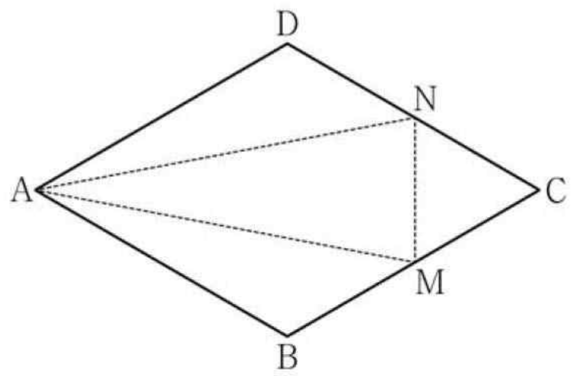
[4점][2016년 4월 가30]

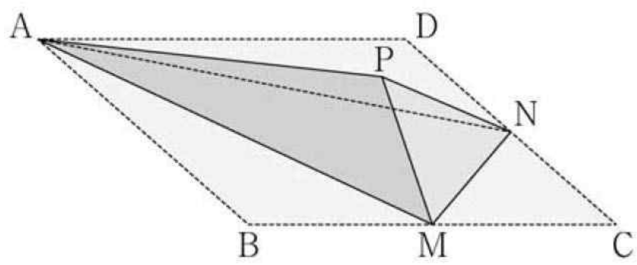


선택과목 (기하)

6. 그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle \mathrm{BAD}=\dfrac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D 가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2020학년도 수능 가27]





> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) 167

함수 $f(x)$ 가 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$ 을 지나고 $1 \le f'(x) \le 3$이므로

⑴ 두 점 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$ 의 기울기가 1 이므로

$3 \le x \le 4$ 에서 $f(x)=x+4$

⑵ 두 점 $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$ 의 기울기가 3 이므로

$5 \le x \le 6$ 에서 $f(x)=3x-5$

⑶ 주어진 조건에 의해 $(4,\ 8)$과 $(5,\ 10)$을 지나는 함수는 이차함수이고

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(4)=8a+b=1$

$f'(5)=-10a+b=3$

$a=1,\ b=-7$

$f(4)=8$에서 $c=20$

⑴, ⑵, ⑶에 의해

$\int_3^6 f(x)dx$

$=\int_3^4 (x+4)dx+\int_4^5 (x^2-7x+20)dx+\int_5^6 (3x-5)dx$

$=\dfrac{167}{6}$

$\therefore\ 6a=167$

2) ②

[출제의도] 수열의 규칙성 추론하기

$a_1=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5$

$a_2=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+4$

$a_3=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+3$

$a_4=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+2$

$a_5=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+1$

$a_6=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+0$

$a_7=5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6^1+5$

$\vdots$

따라서 위와 같은 규칙에 의해서 $a_{35}=1$

3) 137

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1)-1 & (-1 \le x < 0) \\ f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(x-1)+1 & (1 \le x < 2) \\ \quad\vdots & \\ f(x-4)+4 & (4 \le x < 5) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim\limits_{x\to1-} g(x)$이다.

$g(1)=f(0)+1$이고

$\lim\limits_{x\to1-} g(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)=f(1)=1$이므로

$f(0)+1=1$에서 $f(0)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$이다.

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$이고

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

이므로 $f'(0)=1$ …… ㉡

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하자.

㉠, ㉡에 의하여 $c=1,\ d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ …… ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $a=-2,\ b=1$

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

$\int_0^4 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$

$=\dfrac{8}{15}+\left(\dfrac{8}{15}+1\right)+\left(\dfrac{8}{15}+2\right)+\left(\dfrac{8}{15}+3\right)=\dfrac{122}{15}$

그러므로 $p=15,\ q=122$

따라서 $p+q=137$

4) 3

[출제의도] 수학 내적 문제 해결능력-함수의 극한과 연속

$g(x)=|ax^2-3x|$ 라 하면 $a>0$이므로

$$g(x)=\begin{cases} ax^2-3x & \left(x<0 \text{ 또는 } x>\dfrac{3}{a}\right) \\ -ax^2+3x & \left(0 \le x \le \dfrac{3}{a}\right) \end{cases}$$

직선 $y=ax+t$가 t의 값이 $-\infty$부터 증가하여 곡선 $y=|ax^2-3x|$와 처음으로 만날 때의 t의 값을 t_1이라 하자.

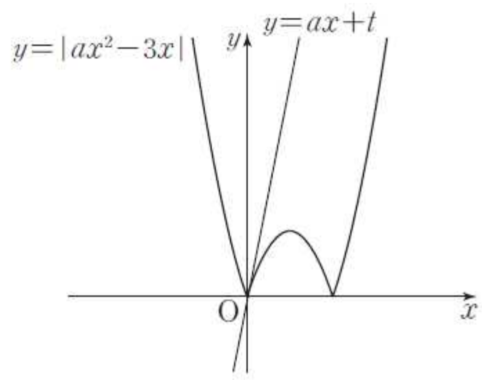
이때 함수 $f(t)$는 $t=t_1$에서 항상 불연속이므로

함수 $f(t)$의 불연속인 실수 t의 개수가 1이려면

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<t_1) \\ 1 & (t=t_1) \\ 2 & (t>t_1) \end{cases}$$

이어야 한다.

따라서 그림과 같이 곡선 $y=-ax^2+3x$의 $x=0$에서의 접선의 기울기가 a이하이어야 한다.



$y'=-2ax+3$에서 $x=0$일 때 $y'=3$이므로 $a \ge 3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

5) 31

$a_m=3$이므로 $\dfrac{m}{3^3}=a$, $\therefore m=3^3\cdot a$

(단, $\dfrac{m}{3^k}=a$를 만족하는 최대 정수 $k=3$이므로 a는 3 배수가 아닌 자연수)

따라서 $a_m=a_{2m}=a_{4m}=a_{5m}=a_{7m}=a_{8m}=3$이고

$a_{3m}=a_{6m}=4$, $a_{9m}=5$이다.

$\therefore\ a_m+a_{2m}+\cdots+a_{9m}=(3\times6)+(4\times2)+5=31$

6) 71

[출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하기

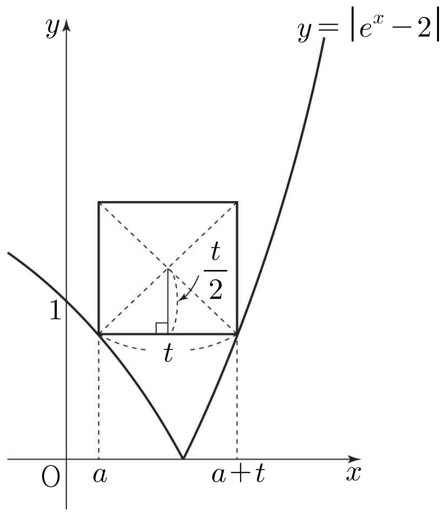
$g(x)=\left|e^x-2\right|$라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$, $(\ln 3,\ 1)$

$f(t)$는 한 변의 길이가 t인 정사각형의 꼭짓점이 $g(x)$의 그래프와 만날 때 정해진다.

$0<t\le\ln 3$이면 두 점에서 만나고 $t>\ln 3$이면 한 점에서 만날 때이다.

ⅰ) $0<t\le\ln 3$일 때



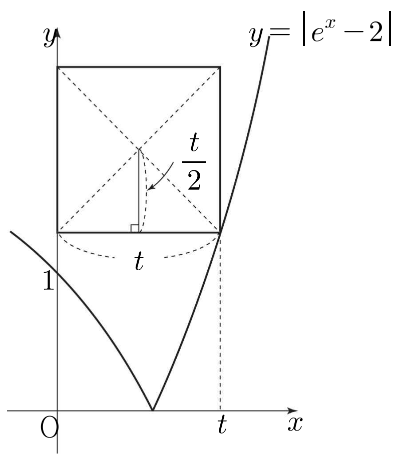
정사각형과 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표를 a와 $a+t$라 하면 두 교점의 좌표는 $(a,\ 2-e^a)$, $(a+t,\ e^{a+t}-2)$

두 교점의 y좌표가 같으므로 $e^a=\dfrac{4}{e^t+1}$이고,

$f(t)=2-e^a+\dfrac{t}{2}$

$\therefore\ f(t)=2-\dfrac{4}{e^t+1}+\dfrac{t}{2}$

ⅱ) $t>\ln 3$일 때



정사각형과 $y=g(x)$의 교점의 좌표는 $(t,\ e^t-2)$

$\therefore\ f(t)=e^t-2+\dfrac{t}{2}$

그러므로 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases}2-\dfrac{4}{e^t+1}+\dfrac{t}{2} & (0<t\le\ln 3)\\ e^t-2+\dfrac{t}{2} & (t>\ln 3)\end{cases}$$

함수 $f(t)$의 도함수 $f'(t)$는

$$f'(t)=\begin{cases}\dfrac{4e^t}{(e^t+1)^2}+\dfrac{1}{2} & (0<t<\ln 3)\\ e^t+\dfrac{1}{2} & (t>\ln 3)\end{cases}$$

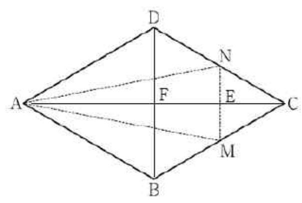
$f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{25}{18}+\dfrac{11}{2}=\dfrac{62}{9}$

따라서 $p=9$, $q=62$이고 $p+q=71$

7) 8

[출제의도] 삼수선의 정리를 활용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수있는가?

$\overline{\mathrm{MN}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{2}\times4=2$



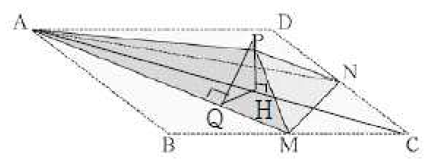
선분 MN의 중점을 E, 선분 AC의 중점을 F라 하면

$\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{2}\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{3}{2}\times2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

이때 삼각형 AMN의 넓이는

$\triangle\mathrm{AMN}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MN}}\times\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\times2\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하자.



삼각형 AME에서

$\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{ME}}$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{ME}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$

삼각형 PAM의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{MP}}\times\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{PQ}$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

한편, $\overline{\mathrm{HE}}=k$ (k는 양수)라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{PE}}^2-\overline{\mathrm{HE}}^2$ 이므로

$4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$

$k=\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$

삼각형 PHE에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PE}}^2-\overline{\mathrm{HE}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$

삼각형 PHQ에서

$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2-\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)^2}=\dfrac{10\sqrt{21}}{63}$

$\overline{\mathrm{PH}} \perp$(평면AMN), $\overline{\mathrm{PQ}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{HQ}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$

평면 AMN과 평면 PAM의 이면각의 크기를 $\theta\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \frac{\frac{10\sqrt{21}}{63}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}} = \frac{5}{9}$$

삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는

$$3\sqrt{3} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로

$p+q=3+5=8$