제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

수학 영역

제 2 교시 홀수형

공통과목

1. [1]함수 $f(x)=|3x-9|$ 에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$의 값의 합을 구하시오. (단, $k>0$)
[4점][2017년 10월 나30]

(가) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=15$

2. 3 보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

(가) $a \geqq 3$
(나) 두 점 $(2,\ 0)$, $(a,\ \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5)=4$ 이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오.[2]
[4점][2012년 6월 가나30]

3. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$ 이고, $n \geqq 1$ 일 때, a_{n+1} 은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k 의 개수이다. a_{10} 의 값을 구하시오.3)

[4점][2012년 6월 가나28]

4. a가 양수일 때, 실수 t에 대하여 곡선 $y = |ax^2 - 3x|$ 와 직선 $y = ax + t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 불연속인 실수 t의 개수가 1이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

[4점][2017년 전북10월 나30]

선택과목 (미적분)

5. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2013년 6월 가30]

선택과목 (기하

6. 좌표평면에서 곡선 C: $y=\sqrt{8-x^2}\,(2\le x\le 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.
점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.
영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.)

〔4점〕〔2019년 6월 가29〕

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1) 64

[출제의도] 도형의 평행이동과 함수의 미분가능성을 이해하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$\lim_{x\to 0+} g(x)=9,\ \lim_{x\to 0-} g(x)=\frac{3}{2}|3k-9|$ 이므로

$9=\frac{3}{2}|3k-9|$

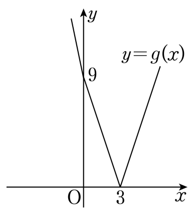
$|k-3|=2$

$k=1$ 또는 $k=5$

(i) $k=1$인 경우

함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3+}\frac{(3x-9)h(x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3+}3h(x)=3h(3)$$



$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3-}\frac{(9-3x)h(x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3-}\{-3h(x)\}=-3h(3)$$

$3h(3)=-3h(3)$ 이므로

$h(3)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(9-3x)h(x)-9h(0)}{x}=9h'(0)-3h(0)$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{3}{2}(6-3x)h(x)-9h(0)}{x}$$
$$=9h'(0)-\frac{9}{2}h(0)$$

$9h'(0)-3h(0)=9h'(0)-\frac{9}{2}h(0),\ h(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $h(x)=x(x-3)(x+\alpha)$

(단, α는 상수)이고, 조건 (나)에 의해

$h'(3)=27+6(\alpha-3)-3\alpha=15,\ 3\alpha=6,\ \alpha=2$

$h(x)=x(x-3)(x+2)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=1$일 때 $h(1)=-6$

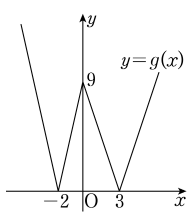
(ii) $k=5$인 경우

(i)과 같은 방법으로

$h(3)=h(0)=h(-2)=0$이고

$h(x)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=5$일 때 $h(5)=70$



(iii) $k\neq 1,\ k\neq 5$인 경우

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니고

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x)h(x)=g(0)h(0)$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h(0)=9h(0)$

$h(0)=0$ …… ㉢

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=9h'(0)$$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)=9h'(0)$이므로 $h'(0)=0$ …… ㉣

함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

㉠과 같은 방법으로 $h(3)=0$ …… ㉤

㉢, ㉣, ㉤에 의하여 $h(x)$는 x^2과 $x-3$을 인수로 가지므로

$h(x)=x^2(x-3)$, $h'(3)=9$

조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $h(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 모든 $h(k)$의 값의 합은

$(-6)+70=64$

2) 86

주어진 조건에서 $\frac{\log_n a}{a-2}\leqq\frac{1}{2}$이어야 한다,

$\log_n a\leqq\frac{1}{2}(a-2)\ \ (a\geqq 3)$

$(1,\ 0)$을 지나는 로그함수와 기울기 $\frac{1}{2}$이고 $(2,\ 0)$을 지나는 직선의 위치관계를 만족하는 가장 작은 자연수 a를 $f(n)$이라 정의하고 있다.

$y=\log_n a$와 $y=\frac{1}{2}(a-2)$는

$a=4,\ n=4$일 때 교점$(4,1)$을, $a=3,\ n=9$일 때 교점$(3,\ \frac{1}{2})$을

지나므로

$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=4$

$f(9)=f(10)=\cdots=f(30)=3$

그러므로 $f(x)=\begin{cases}4 & (4\leq n\leq 8)\\ 3 & (n\geq 9)\end{cases}$

$\therefore\ \sum_{n=4}^{30}f(n)=4\times 5+3\times 22=86$

3) 513

주어진 부등식에서 자연수 k의 범위는

$na_n<k<(n+2)a_n$이므로 k의 개수 a_{n+1}은

$a_{n+1}=(n+2)a_n-na_n-1=2a_n-1$

$\therefore\ a_n=2^{n-1}+1$

$\therefore\ a_{10}=2^9+1=513$

4) 3

[출제의도] 수학 내적 문제 해결능력-함수의 극한과 연속

$g(x)=|ax^2-3x|$라 하면 $a>0$이므로

$$g(x)=\begin{cases}ax^2-3x & \left(x<0 \text{ 또는 } x>\frac{3}{a}\right)\\ -ax^2+3x & \left(0\leq x\leq\frac{3}{a}\right)\end{cases}$$

직선 $y=ax+t$가 t의 값이 $-\infty$부터 증가하여 곡선 $y=|ax^2-3x|$와 처음으로 만날 때의 t의 값을 t_1이라 하자.

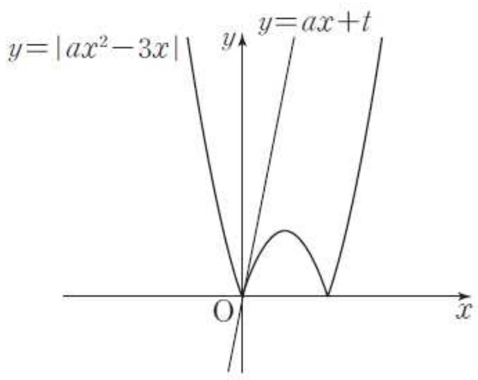
이때 함수 $f(t)$는 $t=t_1$에서 항상 불연속이므로

함수 $f(t)$의 불연속인 실수 t의 개수가 1이려면

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<t_1)\\ 1 & (t=t_1)\\ 2 & (t>t_1)\end{cases}$$

이어야 한다.

따라서 그림과 같이 곡선 $y=-ax^2+3x$ 의 $x=0$ 에서의 접선의 기울기가 a 이하이어야 한다.



$y'=-2ax+3$ 에서 $x=0$ 일 때 $y'=3$ 이므로 $a\geq 3$

따라서 a 의 최솟값은 3이다.

5) 109

구하려고 하는 부분의 넓이는

(선분 OB와 포물선으로 둘러싸인 도형)

$-$(선분 OA와 포물선으로 둘러싸인 도형)

이므로 $\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}s^3$이다.

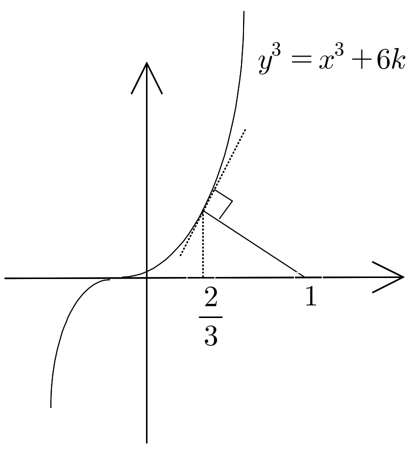
($\because$ 포물선과 이차곡선으로 둘러싸인 도형 넓이$=\frac{1}{6}|a|(\beta-\alpha)^3$)

이 값이 k이므로 $(s,\ t)$가 그리는 도형 C의 방정식은

$x^3-y^3=-6k$

$y^3=x^3+6k$ $\cdots$ ①

곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$ 과의 거리가 최소인 점의 x 좌표가 $\frac{2}{3}$ 이려면 그림에서와 같이 $x=\frac{2}{3}$인 그래프 위의 점에서 접선과 수직인 직선이 $(1,\ 0)$을 지나야 한다.



①의 식을 미분하면 $3y^2y'=3x^2$, $y'=\frac{x^2}{y^2}$

$x=\frac{2}{3}$에서 $y=a$ 라 두면 접선의 기울기는 $\frac{4}{9a^2}$

따라서 접선에 수직인 접선의 기울기는 $-\frac{9a^2}{4}$

직선의 식은 $y-a=-\frac{9}{4}a^2(x-\frac{2}{3})$

$(1,\ 0)$을 지나므로 $-a=-\frac{9}{4}a^2\times\frac{1}{3}$

$a\neq 0$ 이므로 $a=\frac{4}{3}$

$\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3+6k$

$\therefore\ 6k=\frac{56}{27}$, $k=\frac{28}{81}$

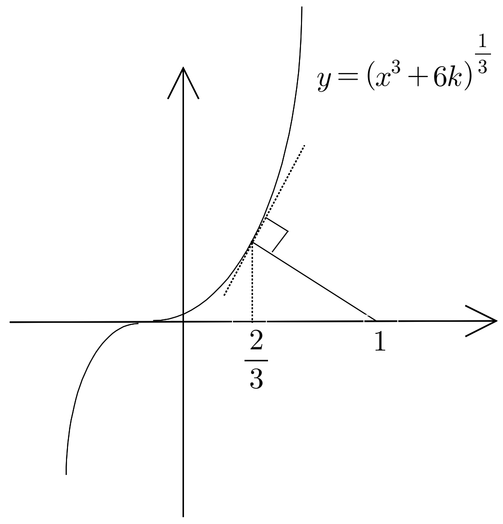
$\therefore\ p+q=109$

(다른 풀이1)

$y^3=x^3+6k$ $\cdots$ ①

$y=(x^3+6k)^{\frac{1}{3}}$

곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$ 과의 거리가 최소인 점의 x 좌표가 $\frac{2}{3}$ 이려면 그림에서와 같이 $x=\frac{2}{3}$인 그래프 위의 점에서 접선과 수직인 직선이 $(1,\ 0)$을 지나야 한다.



$f(x)=(x^3+6k)^{\frac{1}{3}}$ 라 두면

$f(\frac{2}{3})=\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3+6k)^{-\frac{2}{3}}\times(3x^2)=x^2(x^3+6k)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(\frac{2}{3})=(\frac{2}{3})^2\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{-\frac{2}{3}}$

$\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{\frac{1}{3}}=a$라 두면

$f(\frac{2}{3})=a$,

$f'(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}a^{-2}=\frac{4}{9a^2}$

따라서 주어진 직선의 기울기를 m 이라 두면

$f'(\frac{2}{3})\times m=-1$

$\therefore\ m=-\frac{9a^2}{4}$

따라서 직선의 식은 $y-a=-\frac{9}{4}a^2(x-\frac{2}{3})$

$(1,\ 0)$을 지나므로 $-a=-\frac{9}{4}a^2\times\frac{1}{3}$

$a\neq 0$ 이므로 $a=\frac{4}{3}$

$\left\{(\frac{2}{3})^3+6k\right\}^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$

$(\frac{2}{3})^3+6k=\frac{64}{27}$

$\therefore\ 6k=\frac{56}{27}$, $k=\frac{28}{81}$

$\therefore\ p+q=109$

(다른 풀이2)

곡선 C 위의 점 $(x,\ y)$에서 $(1,\ 0)$까지의 거리를 l이라고 하면

$l^2=(x-1)^2+y^2$이다. $y=(x^3+6k)^{\frac{1}{3}}$을 대입하면 ($\because$ ①)

$l^2=(x-1)^2+(x^3+6k)^{\frac{2}{3}}$이다.

$f(x)=(x-1)^2+(x^3+6k)^{\frac{2}{3}}$라고 하면 l^2이 최소일 때 $f(x)$도 최소이므로 주어진 조건에 의해서 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$이다.

$$f'(x)=2(x-1)+\frac{2}{3}(x^3+6k)^{-\frac{1}{3}}\cdot(3x^2)$$

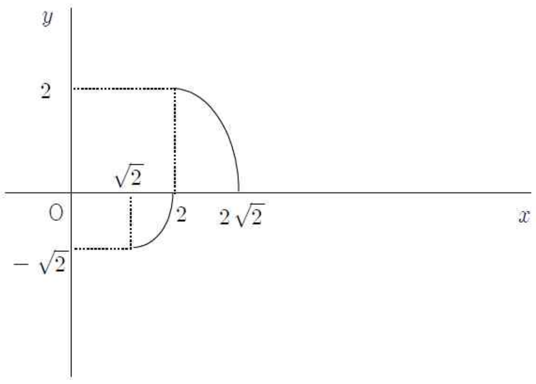
$$f'\left(\frac{2}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(6k+\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3\cdot\frac{4}{9}=0$$에서

$k=\frac{28}{81}$이다.

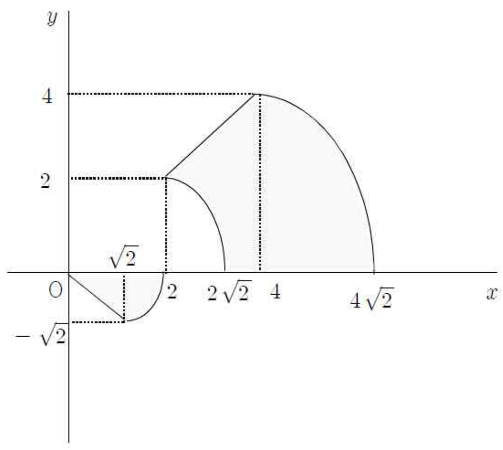
6) 24

[출제의도] 벡터의 연산에서 종점의 위치를 이해하고 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

좌표평면에서 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선은 그림과 같다.

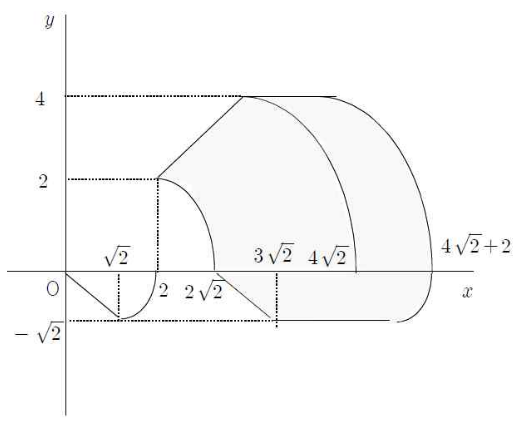


이때, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}$라 하면 점 A와 $\overrightarrow{OY}$가 나타내는 점 Y는 그림의 색칠된 부분에 존재한다.



따라서

$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D의 그림의 색칠된 부분이다.



따라서 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점 R$(2,\ 2)$이므로 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최솟값 m은 점 Z가 두 점 $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(3\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$을 잇는 선분 위의 점일 때이므로

$m=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최댓값 M은 점 Z$(6,\ 4)$일 때이므로

$\mathrm{M}=2\times6+2\times4=20$

따라서 $\mathrm{M}+m=20+4\sqrt{2}$이므로 $a=20,\ b=4$

즉, $a+b+24$