제 2 교시

2022학년도 실수발견 모의고사

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

–

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

2022학년도 실수발견 모의고사 1회 문제지

제 2 교시

수학 영역

홀수형

공통과목

1. 좌표평면 위의 점 $(0,\ t)$를 지나고 곡선

$y=x^3-ax^2+3x-5$ (a는 자연수)

에 접하는 서로 다른 모든 직선의 개수를 $f(t)$라 할 때,
함수 $f(t)$에 대하여 합성함수 $g(t)=(f\circ f)(t)$라 하자.
다음 조건을 만족시키는 a의 최솟값을 m이라 할 때,
$m+g(m)$의 값은?

[4점][2019년 7월 나21]

(가) 모든 실수 t에 대하여 $g(t)>1$이다.
(나) 함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a,\ b)\ \middle|\ 2^a=\frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2017년 3월 나21]

< 보 기 >

ㄱ. $A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$
ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.
ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

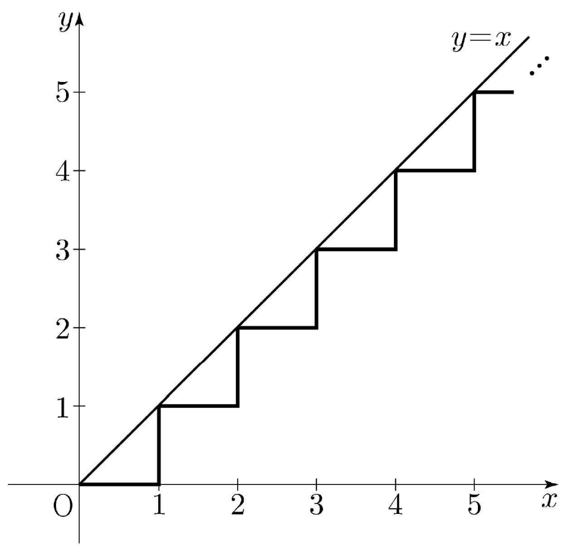
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (i) A_0은 원점이다.
> (ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \dfrac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오.

[4점][2018년 9월 나29]



4. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 5이하의 모든 자연수 n에 대하여
> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$이다.
> (나) $n=3,\ 4$일 때, $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 <u>양수가 아니다.</u>

$128\times f\left(\dfrac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오.

[4점][2018년 6월 나30]

선택과목 (미적분)

5. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2014학년도 수능 가30]

선택과목 (기하)

6. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔4점〕〔2019학년도 수능 가29〕

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2) ⑤

[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 명제의 참과 거짓을 추론한다.

ㄱ. A_4는 $2^a=\dfrac{4}{b}$에서 $4=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$4=2^1\times 2,\ 4=2^2\times 1$

$A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$ (참)

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

A_m은 $2^a=\dfrac{2^k}{b}$에서

$2^k=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$A_m=\{(1,\ 2^{k-1}),\ (2,\ 2^{k-2}),\ (3,\ 2^{k-3}),\ \cdots,(k,\ 2^0)\}$ 이다.

따라서 $n(A_m)=k$ (참)

ㄷ. A_m은 $2^a=\dfrac{m}{b}$에서

$m=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m)=1$이 되기 위해서는

$b=\dfrac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가 오직 하나만 존재하므로

$k=1$이어야 한다.

따라서 $m=2^1\times$(홀수)이어야 한다.

두 자리 자연수 중에서 $2^1\times$(홀수)인 자연수는

$2\times 5,\ 2\times 7,\ 2\times 9,\ \cdots,\ 2\times 49$ 이다.

따라서 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 5, 7, 9, $\cdots$, 49의 개수와 같다.

5, 7, 9, $\cdots$, 49는 첫째항이 5이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제23항을 나타낸 것이므로 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

3) 8

점 A_n이 이동한 거리가 2의 배수가 될 때 점 A_n은 $y=x$ 위의 점이 된다.

즉, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=2m$ (m : 자연수)이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=\frac{n^2}{25}=2m$이므로 $n^2=50m$이다.

$m,\ n$은 모두 자연수이므로 $n=10,\ 20,\ \cdots$ 이다.

따라서 $y=x$ 위에 있는 점 A_n 중 원점에서 두 번째로 가까운 점은 A_{20}이다.

$50m=400$에서 $m=8$이고 A_{20}까지 이동거리의 합은 16이므로

$\mathrm{A}_{20}=(8,\ 8)$이다.

따라서 $a=8$이다.

4) 65

조건 (가)에 의해

$f(1)+\cdots+f(n-1)+f(n)=f(n)f(n+1)$ $\cdots$ ①

$f(1)+\cdots+f(n-1)=f(n-1)f(n)$ $\cdots$ ②

①$-$②를 하면

$f(n)=f(n)\{f(n+1)-f(n-1)\}$이다.

따라서 $f(n)=0$ 또는 $f(n+1)-f(n-1)=1$ $\cdots(*)$이어야 한다.

조건 (나)에 의해

$n=3$일 때 $\dfrac{f(5)-f(3)}{5-3}\le 0$에서 $f(5)\le f(3)$

$n=4$일 때 $\dfrac{f(6)-f(4)}{6-4}\le 0$에서 $f(6)\le f(4)$

이므로 $(*)$에 의해 $f(4)=0,\ f(5)=0$이 된다.

조건 (가)에 $n=1,\ 2,\ 3$을 각각 대입하여 정리하면

$n=1$일 때 $f(1)=f(1)f(2)$

$n=2$일 때 $f(1)+f(2)=f(2)f(3)$

$n=3$일 때 $f(1)+f(2)+f(3)=0$ ($\because\ f(4)=0$)

(ⅰ) $f(3)=0$인 경우

$f(1)+f(2)=0$에서 $f(1)=-\{f(1)\}^2$이므로

$f(1)=0$ 또는 $f(1)=-1$이다.

$f(1)=0$이면 $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0$이 되어

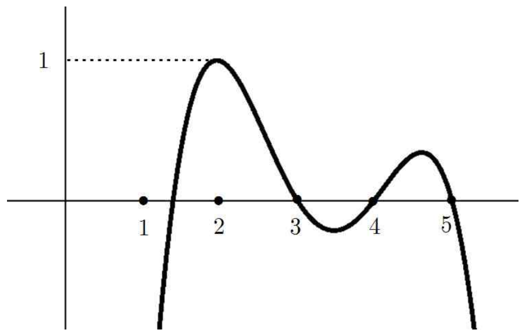
사차함수라는 조건에 위배된다.

따라서 $f(1)=-1,\ f(2)=1,\ f(3)=f(4)=f(5)=0$ $\cdots$ ③

이 성립한다.

그래프를 그려보면 사잇값 정리에 의해 $(1,\ 2)$에서 근을 갖고

$f(6)-f(4)\le 0$을 만족한다.



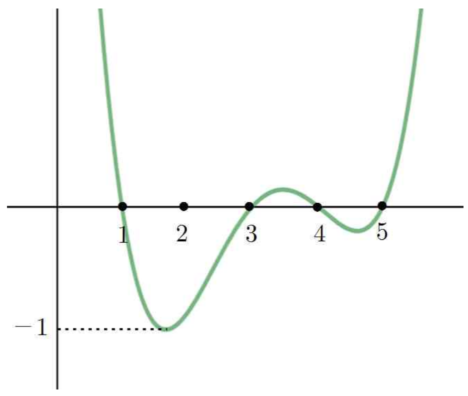
(ⅱ) $f(3)\ne 0$인 경우

$f(1)+f(2)=-f(2)\{f(1)+f(2)\}$에서

$f(2)=-1$이므로 $f(1)=0$이 된다.

따라서 $f(1)=0,\ f(2)=-1,\ f(3)=1,\ f(4)=f(5)=0$이 성립한다.

그래프를 그려보면 $f(6)-f(4)\le 0$을 만족하지 않는다.



(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $f(x)=(ax+b)(x-3)(x-4)(x-5)$이 된다.

③을 대입하면

$f(1)=-24(a+b)=-1,\ f(2)=-6(2a+b)=1$에서

$a=-\dfrac{5}{24},\ b=\dfrac{6}{24}$을 얻는다.

$\therefore\ f(x)=-\dfrac{1}{24}(5x-6)(x-3)(x-4)(x-5)$

$128\times f\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^7\times\left(-\dfrac{1}{24}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{25}{2}-6\right)=65$

5) 72

[출제의도] 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

$g(x)=f(x)e^{-x},\ g'(x)=f'(x)-f(x)e^{-x}$

$g''(x)=f''(x)-2f'(x)+f(x)e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$로 놓으면

$g''(x)=ax^2+(b-4a)x+2a-2b+ce^{-x}$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1,\ x=4$를 두 근으로 갖는다. 근과 계수의 관계에서

$\dfrac{4a-b}{a}=5,\ \dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로 $b=-a,\ c=0$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고 $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t,\ g(t))$에서 그은 접선의 방정식은

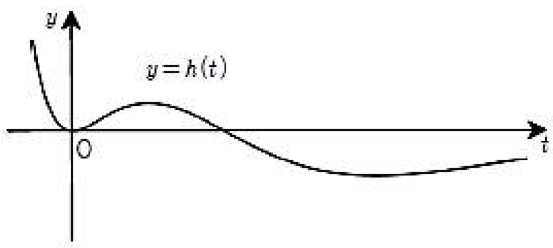
$y-g(t)=g'(t)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

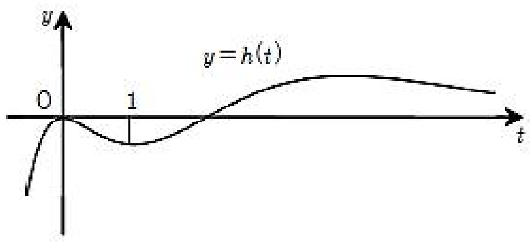
$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서 $k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

$a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.

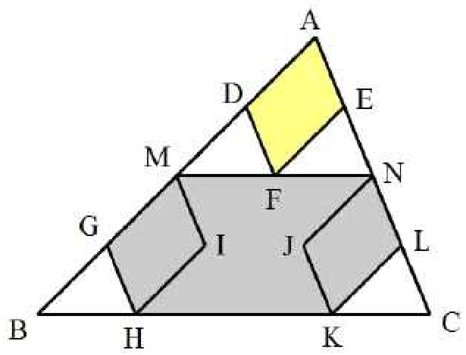


$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$\therefore g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}=72a^2e^{-2}=72e^2e^{-2}=72$

6) 53

[출제의도] 벡터의 위치벡터를 이용하여 점이 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있는가?



두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 AM, AN, MN의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 또, 두 선분 MB, NC의 중점을 각각 G, L이라 하자.

이때 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AR}$라 하면 점 S는 위 그림의 평행사변형 $ADFE$의 내부 (경계선 포함)에 있다.

또, 점 Q가 점 B에 있으면 $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AM}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 $MGHI$의 내부 (경계선 포함)에 있다.

마찬가지로 점 Q가 점 C에 있으면 $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AN}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 $NJKL$의 내부 (경계선 포함)에 있다.

한편, $\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$라 하면 점 T는 선분 MN위를 움직이므로 점 X가 나타내는 영역은 위 그림의 육각형 $MGHKLN$의 내부 (경계선 포함)에 있다.

이때 삼각형 AMN의 넓이는 $\dfrac{9}{4}$이고, 두 삼각형 GBH, LKC의 넓이는 각각 $\dfrac{9}{16}$이므로 구하는 넓이는

$9-\dfrac{9}{4}-2\times\dfrac{9}{16}=\dfrac{45}{8}$

따라서 $p=8$, $q=45$이므로

$p+q=53$