21. 함수 $f(x)=\sin kx$ $\left(0<k<\dfrac{\pi}{2}\right)$에 대하여 닫힌구간 $[t, t+1]$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$로 정의할 때, 부등식

$$g(1) \leq g(3) \leq g(2)$$

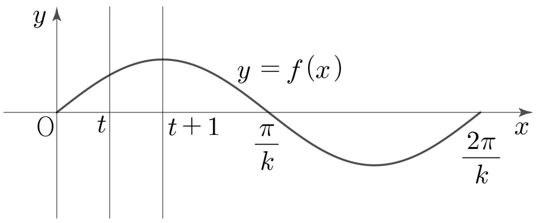
를 만족시키는 k의 값의 범위는 $\alpha \leq k \leq \beta$이다. $\alpha+\beta=\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21/08/03] 우주설님 이벤트 문항 해설 by YoonSol

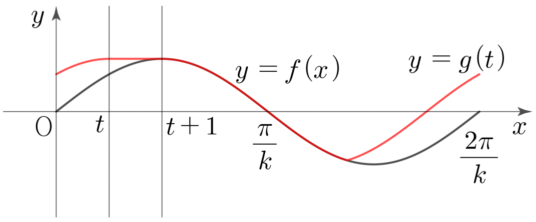
함수 $f(x)$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$인 사인함수이다.

그런데 주기 $\dfrac{2\pi}{k}>4$이므로 우리가 문제 풀이 과정에서 확인해야 하는 x값의 범위인 $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq x \leq 3$, $3 \leq x \leq 4$가 모두 $f(x)$의 양수인 부분에서의 첫 주기 안에 다 들어간다.

$0 \leq x < \dfrac{2\pi}{k}$ 범위에서의 $y=f(x)$를 그리면 다음과 같다.



$g(t)$가 닫힌구간 $[t, t+1]$에서의 최댓값이므로 $x=t$와 $x=t+1$을 t의 값을 0에서부터 늘려가면서 닫힌구간 $[t, t+1]$에서의 최댓값을 빨간색으로 그리면 다음과 같다.



$g(t)$의 식을 구간에 따라 나타내면 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} \sin k(t+1) & \left(0 \le t < \dfrac{\pi}{2k}-1\right) \\ 1 & \left(\dfrac{\pi}{2k}-1 \le t < \dfrac{\pi}{2k}\right) \\ \sin kt & \left(\dfrac{\pi}{2k} \le t < \dfrac{3\pi}{2k}-\dfrac{1}{2}\right) \\ \sin k(t+1) & \left(\dfrac{3\pi}{2k}-\dfrac{1}{2} \le t < \dfrac{2\pi}{k}\right) \end{cases}$$

$\dfrac{\pi}{2k}>1$이므로 $\dfrac{\pi}{2k}$의 값의 범위에 따라서 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$의 위치가 각각 어찌될지를 판단해보자.

ⅰ) $1<\dfrac{\pi}{2k} \le 2 \rightarrow \dfrac{\pi}{4} \le k < \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\pi}{2k}-1 \le 1 < \dfrac{\pi}{2k}$이므로 $g(1)=1$이 된다. 이 상황에서 $g(2) \ge g(1)$이 되기 위해선 $\dfrac{\pi}{2k}=2$가 되어 $g(2)=1$이 되야하는데 이 경우 $g(3)<1$이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

ⅱ) $2<\dfrac{\pi}{2k} \le 3 \rightarrow \dfrac{\pi}{6} \le k < \dfrac{\pi}{4}$

$0 \le 1 < \dfrac{\pi}{2k}-1$이므로 $g(1)=\sin 2k$가 되고

$\dfrac{\pi}{2k}-1 \le 2 < \dfrac{\pi}{2k}$이므로 $g(2)=1$이 된다.

$g(3)$의 경우 $\dfrac{\pi}{2k}=3$일 경우 $g(3)=1$이 되고 $2<\dfrac{\pi}{2k}<3$일 경우

$\dfrac{\pi}{2k} \le 3 < \dfrac{3\pi}{2k}-\dfrac{1}{2}$이므로 $g(3)=\sin 3k$가 된다.

이 상황에서 $g(1) \le g(2)$도 성립하고 $g(3) \le g(2)$도 항상 성립한다.

그러므로 문제 조건을 만족시키려면 $g(1) \le g(3)$만 만족하면 된다.

$\dfrac{\pi}{2k}=3$인 경우 $\rightarrow$ $g(3)=1$이므로 $g(3) \ge g(1)$이다.

$2<\dfrac{\pi}{2k}<3$인 경우 $\rightarrow$ $\sin 2k \le \sin 3k$인 k에서 조건을 만족시킨다.

$\frac{\pi}{6} < k < \frac{\pi}{4}$ 인 구간에서 $\frac{\pi}{6} < k \le \frac{\pi}{5}$ 에서는 $\sin 2k \le \sin 3k$ 이고 $\frac{\pi}{5} < k < \frac{\pi}{4}$ 에서는 $\sin 2k > \sin 3k$ 이므로 위에서 구하고자 하는 k 의 범위는 $\frac{\pi}{6} < k \le \frac{\pi}{5}$ 이다.

$\therefore\ \frac{\pi}{6} \le k \le \frac{\pi}{5}$

ⅲ) $3 < \frac{\pi}{2k} \le 4 \ \rightarrow\ \frac{\pi}{8} \le k < \frac{\pi}{6}$

$0 \le 1 < \frac{\pi}{2k} - 1$ 이므로 $g(1) = \sin 2k$ 가 되고

$0 \le 2 < \frac{\pi}{2k} - 1$ 이므로 $g(2) = \sin 3k$ 가 되고

$\frac{\pi}{2k} - 1 \le 3 < \frac{\pi}{2k}$ 이므로 $g(3) = 1$ 이 된다.

조건 $g(3) \le g(2)$ 을 만족시키지 못하므로 이 경우는 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

ⅳ) $\frac{\pi}{2k} > 4 \ \rightarrow\ k < \frac{\pi}{8}$

$0 \le 1 < \frac{\pi}{2k} - 1$ 이므로 $g(1) = \sin 2k$ 가 되고

$0 \le 2 < \frac{\pi}{2k} - 1$ 이므로 $g(2) = \sin 3k$ 가 되고

$0 \le 3 < \frac{\pi}{2k} - 1$ 이므로 $g(3) = \sin 4k$ 가 된다.

$k < \frac{\pi}{8}$ 에서는 $\sin 2k \le \sin 3k \le \sin 4k$ 이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

$\therefore\ g(1) \le g(3) \le g(2)$ 를 만족시키는 k 의 범위는 $\frac{\pi}{6} \le k \le \frac{\pi}{5}$ 이다.

$\alpha = \frac{\pi}{6},\ \beta = \frac{\pi}{5} \ \rightarrow\ \alpha + \beta = \frac{11}{30}\pi = \frac{q}{p}\pi$

$p = 30,\ q = 11$

$\therefore\ p + q = 41$