제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 6일차

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

다변수의 적분

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

다변수의 적분

제 2 교시　수학 영역 (미적분)

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.

1. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}},\ \infty\right)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|\,dx$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오.

(2019년 사관학교 가30 제한시간 12분)

2. 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^x & (0\le x<1) \\ e^{2-x} & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

에 대하여 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

(19학년도 3월 모의평가 (가)형 30번 제한시간 12분)

3. 함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 $x \ge 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-tx|\,dt$$

는 $x=a$에서 극값을 갖는다. $a=k\times e^k$일 때, $16k^2$의 값을 구하시오. (우주설 자작 제한시간 8분)

일반적 사고과정 (널리 알려진 풀이)

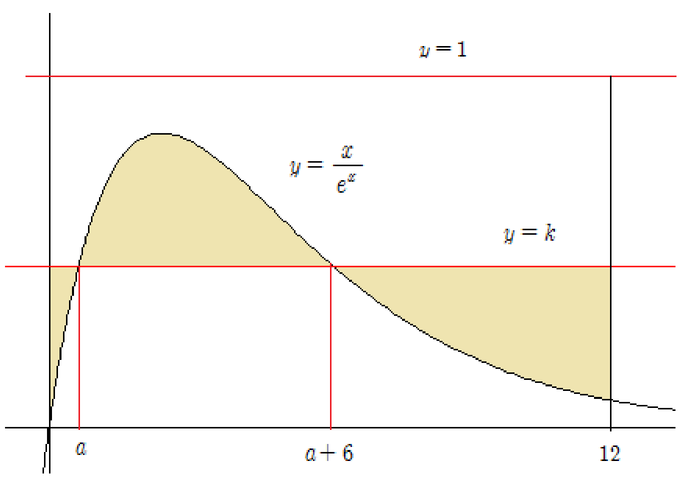
함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}},\ \infty\right)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|\,dx\ {}_{(1)}$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다.$_{(2)}$ 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오.

(2019년 사관학교 가30 제한시간 12분)

(1): $g(t)$는 그림과 같이 색칠한 영역의 넓이이다.



(2): $f(x)=\dfrac{x}{e^x}=xe^{-x}$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ 이므로

극댓값(최댓값)은 $f(1)=\dfrac{1}{e}<1$이므로

$f(x)=\dfrac{x}{e^x}=xe^{-x}$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ 이므로

극댓값(최댓값)은 $f(1)=\dfrac{1}{e}<1$이므로

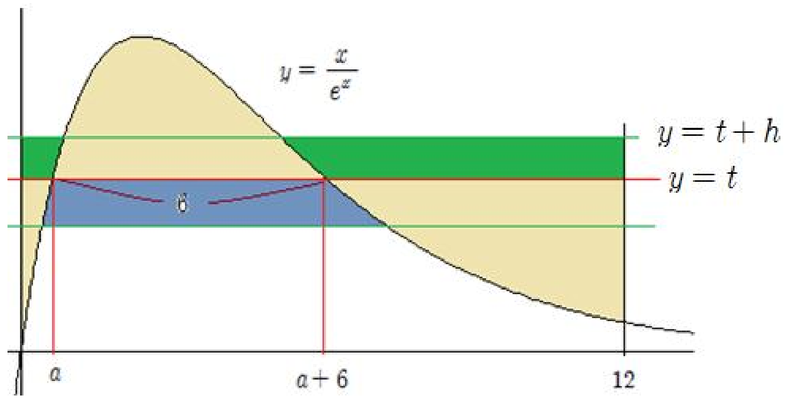
ⅰ) $t>\dfrac{1}{e}$이면

$g(t)=\displaystyle\int_0^{12}(t-f(x))dx=12t-\int_0^{12}f(x)dx$ 이므로

$g'(1)=12$

ⅱ) $\dfrac{12}{e^{12}}\le t\le\dfrac{1}{e}$일 때

$f(x)=t$는 두 실근 a, b $(a<b)$를 갖는다.



0에 한 없이 가까운 양수 h에 대하여 $t<t+h$이므로
$g(t)<g(t+h)$이면 $g(t)$는 증가하고,
$g(t)>g(t+h)$이면 $g(t)$는 감소하는 것이다.

$g(t)<g(t+h)$인 상황은 새로 생기는 **초록색 부분의 넓이**가 사라지는 **파란색 부분의 넓이**보다 큰 상황이고,
$g(t)>g(t+h)$인 상황은 새로 생기는 **초록색 부분의 넓이**가 사라지는 **파란색 부분의 넓이**보다 작은 상황이다.

우리가 찾는 극소의 순간은 $g(t)$가 감소하다가 증가하는 순간.
즉, 파랑넓이 > 초록넓이 에서 파랑넓이 < 초록넓이가
되는 순간이다. $\displaystyle\lim_{h\to0+}$ 에서 파랑넓이 = 초록넓이인 순간을 찾자.

$\displaystyle\lim_{h\to0+}$에서 각 부분의 넓이를 직사각형의 넓이처럼 근사하면,
파랑넓이가 가로가 6인 직사각형이어야 조건을 만족시키는 것을 알 수 있다.

$\therefore b-a=6$, $b=a+6$
따라서 $f(a)=f(a+6)$이므로
$\dfrac{a}{e^a}=\dfrac{a+6}{e^{a+6}}$, 즉 $\dfrac{a+6}{a}=e^6$
즉 $\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)=\ln e^6=6$ 이다.

일반적 사고과정 (널리 알려진 풀이)

함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & (0 \le x < 1) \\ e^{2-x} & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

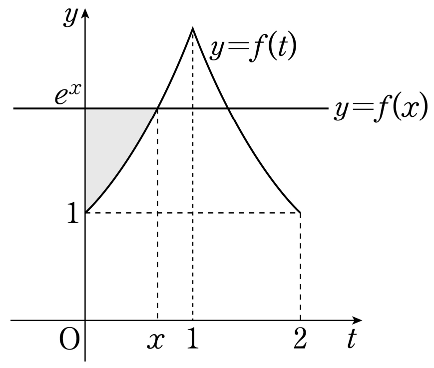
에 대하여 열린구간 $(0,\ 2)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

(19학년도 3월 모의평가 (가)형 30번 제한시간 12분)

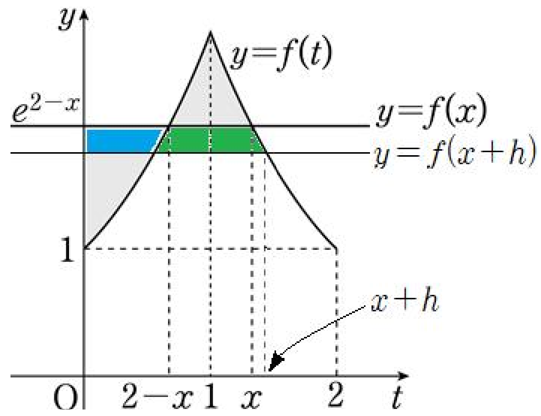
(i) $0<x\le 1$일 때,



x값이 증가함에 따라 상수함수 $y=f(x)$가 증가하고,
색칠한 부분의 면적도 증가할 것이다.

$g(0)=0$에서 $g(1)=e-\int_0^1 e^t dt=1$ 까지 증가 할 것이다.

(ii) $1<x<2$일 때,



$g(x)$는 감소를 하게 되어 $g(1)$이 $g(x)$의 극대임을 알 수 있다.

0에 한 없이 가까운 양수 h에 대하여 $t<t+h$이므로
$g(t)<g(t+h)$이면 $g(t)$는 증가하고,
$g(t)>g(t+h)$이면 $g(t)$는 감소하는 것이다.

$g(t)<g(t+h)$인 상황은 새로 생기는 **초록색 부분의 넓이**가
사라지는 **파란색 부분의 넓이**보다 큰 상황이고,
$g(t)>g(t+h)$인 상황은 새로 생기는 **초록색 부분의 넓이**가
사라지는 **파란색 부분의 넓이**보다 작은 상황이다.

우리가 찾는 극소의 순간은 $g(t)$가 감소하다가 증가하는 순간.
즉, 파랑넓이 > 초록넓이 에서 파랑넓이 < 초록넓이가
되는 순간이다. $\lim_{h\to 0+}$ 에서 파랑넓이 = 초록넓이인 순간을 찾자.

$x=2\times(2-x)$를 만족시킬 때이다. $x=\frac{4}{3}$일 때이다.

극솟값 : $\int_0^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2}{3}}-e^t dt+2\int_{\frac{2}{3}}^{1} e^t-e^{\frac{2}{3}} dt \ =2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$

제시하는 사고과정

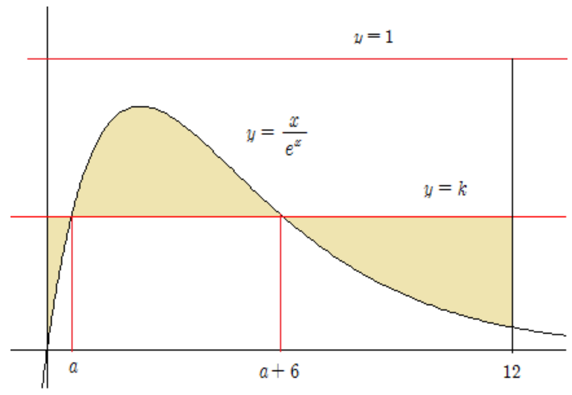
함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}},\ \infty\right)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|\,dx_{(1)}$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다.$_{(2)}$ 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오.

(2019년 사관학교 가30 제한시간 12분)

(1): $g(t)$는 그림과 같이 색칠한 영역의 넓이이다.



(2): $f(x)=\dfrac{x}{e^x}=xe^{-x}$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$

극댓값(최댓값)은 $f(1)=\dfrac{1}{e}<1$이므로

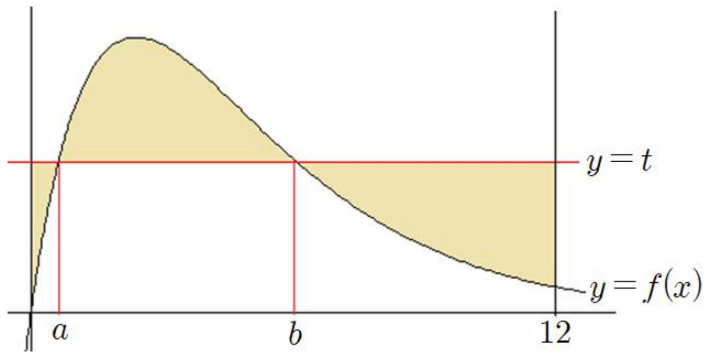
ㄱ) $t>\dfrac{1}{e}$이면

$g(t)=\displaystyle\int_0^{12}(t-f(x))dx=12t-\int_0^{12}f(x)dx$ 이므로

$g'(1)=12$

ㄴ) $\dfrac{12}{e^{12}}\le t\le\dfrac{1}{e}$일 때

$f(x)=t$는 두 실근 a, b $(a<b)$를 갖는다. (a, b는 t에 대한 변수)



$$g(t)=\int_0^a(t-f(x))dx+\int_a^b(f(x)-t)dx+\int_b^{12}(t-f(x))dx$$
$$=\int_0^{12}(t-f(x))dx+2\int_a^b(f(x)-t)dx$$
$$=t\int_0^{12}dx-\int_0^{12}f(x)dx+2\int_a^b f(x)dx-2t\int_a^b dx$$

$$g'(t)=12-0+2f(b)\frac{db}{dt}-2f(a)\frac{da}{dt}-2(b-a)-2t\left(\frac{db}{dt}-\frac{da}{dt}\right)$$

$f(a)=f(b)=t$이므로,

$g'(t)=12-2(b-a)$

$g'(k)=12-2(b-a)=0$

$\therefore b-a=6$, $b=a+6$

따라서 $f(a)=f(a+6)$이므로

$\dfrac{a}{e^a}=\dfrac{a+6}{e^{a+6}}$, 즉 $\dfrac{a+6}{a}=e^6$

즉 $\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)=\ln e^6=6$ 이다.

제시하는 사고과정

함수

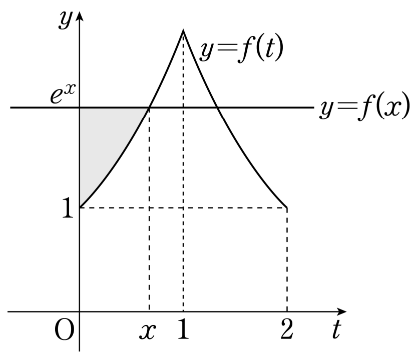
$$f(x)=\begin{cases} e^x & (0\le x<1) \\ e^{2-x} & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

에 대하여 열린구간 $(0,\ 2)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]
(19학년도 3월 모의평가 (가)형 30번 제한시간 12분)

(ⅰ) $0<x\le 1$일 때,

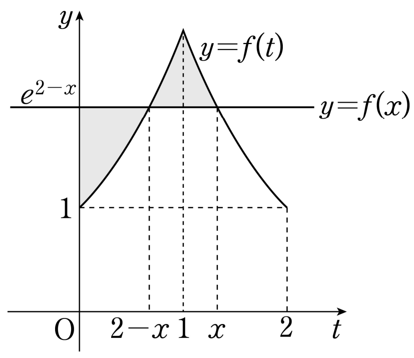


그림에서 $0<t\le x$일 때, $f(x)\ge f(t)$이므로

$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt=\int_0^x \{f(x)-f(t)\}dt$

$=\int_0^x (e^x-e^t)dt=\Big[te^x-e^t\Big]_0^x=(x-1)e^x+1$

(ⅱ) $1<x<2$일 때,



그림에서
$0<t<2-x$일 때, $f(x)\ge f(t)$
$2-x\le t<x$일 때, $f(x)\le f(t)$이므로

$g(x)=\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt+\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt$

위의 (ⅰ)에 의하여

$\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt=(1-x)e^{2-x}+1$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt=2\int_1^x\{f(t)-f(x)\}dt$

$=2\int_1^x(e^{2-t}-e^{2-x})dt=2\Big[-e^{2-t}-te^{2-x}\Big]_1^x$

$=2e-2xe^{2-x}$ 따라서

$g(x)=(1-x)e^{2-x}+1+2e-2xe^{2-x}$

$=(1-3x)e^{2-x}+2e+1$

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+1 & (0<x\le 1)\\ (1-3x)e^{2-x}+2e+1 & (1<x<2)\end{cases}$$ 이므로

$$g'(x)=\begin{cases} xe^x & (0<x<1)\\ (3x-4)e^{2-x} & (1<x<2)\end{cases}$$

$(\text{극댓값})=g(1)=(1-1)e+1=1$

$(\text{극솟값})=g\left(\frac{4}{3}\right)=(1-4)e^{\frac{2}{3}}+2e+1=2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$1-\left(2e-3e^{\frac{2}{3}}+1\right)=-2e+3e^{\frac{2}{3}}=-2e+3\sqrt[3]{e^2}$

제시하는 사고과정

함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-tx|\,dt$$

는 $x=a$에서 극값을 갖는다. $a=k\times e^k$일 때, $16k^2$의 값을 구하시오. (우주설 자작 제한시간 8분)

$g(x)=\int_0^1 |f(t)-tx|\,dt$에서

dt이므로 t축에 대하여 그래프를 그려 곡선 $y=f(t)$와 $y=tx$의 교점의 좌표를 구해야 한다.

$f(t)=t^2e^t$에 대하여 t에 관한 방정식 $f(t)=tx$를 풀면

$t^2e^t=tx \quad \Rightarrow \quad te^t=x$ 에서

방정식의 실근을 $t=k$라 하면 $(0<k<1)$,

$ke^k=x$를 만족시키고 $(k+1)e^k=\dfrac{dx}{dk}$이다.

한편 $g(x)=\int_0^k tx-f(t)dt+\int_k^1 f(t)-tx\,dt$ 이고,

$$g(x)=\int_0^k tx-t^2e^tdt+\int_k^1 t^2e^t-tx\,dt$$

$$=\left[\frac{x}{2}t^2-(t^2-2t+2)e^t\right]_0^k+\left[(t^2-2t+2)e^t-\frac{x}{2}t^2\right]_k^1$$

$$=xk^2-(2k^2-4k+4)e^k+2+e-\frac{x}{2}$$ 를 얻는다.

$g(x)=xk^2-(2k^2-4k+4)e^k+2+e-\dfrac{x}{2}$ 의 양변을

x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=k^2+2xk\frac{dk}{dx}-(2k^2)e^k\frac{dk}{dx}-\frac{1}{2}$$

$$=k^2+2k(x-ke^k)\frac{dk}{dx}-\frac{1}{2},$$ $ke^k=x$이므로

$$g'(x)=k^2-\frac{1}{2}$$

$g(x)$는 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 극값을 갖고 $ke^k=x$이므로,

$g(x)$는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 에서 극값을 갖는다.

답: 8

7일차 예습과제

정답을 내지 못하여도 상관없으니 도전하여 봅시다.

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=-e^{2-x}+1,\quad g(x)=e^{x+a}+1$$

에 대하여 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\le mx+k\le g(x)$$

가 성립하기 위한 m의 값의 범위가 $0\le m\le h(a)$일 때, $\dfrac{a}{h(a)}$는 극댓값 p와 극솟값 q를 갖는다. $\dfrac{q^2}{p^3}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.