제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 3일차

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

다항함수의 등치해석

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

제 2 교시

수학 영역 (수학II)

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.
1번 문항은 개념을 점검하기 위한 문항이다.

1. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]
(20학년도 수능 (나)형 30번 제한시간 7분)

2. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
(22학년도 6월 모의평가 22번 제한시간 7분)

3. $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $\{f(x)\}^2=x^2$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고 허근은 갖지 않는다.
(나) 방정식 $\{f(x)\}^2=x^2$의 서로 다른 실근의 합은 9이다.

$f'(0)<0$일 때, $f(4)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (우주설 자작문항, 제한시간 8분)

일반적 사고과정

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.(1)

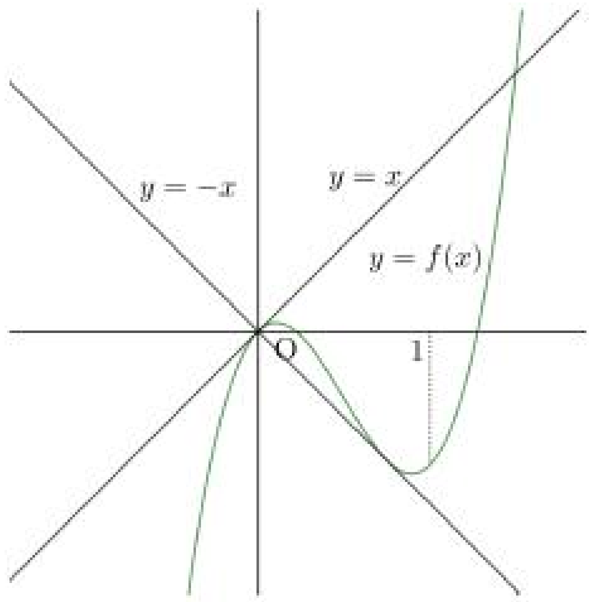
(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(2)
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(3)

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때,(4) $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]
(20학년도 수능 (나)형 30번 제한시간 7분)

(1): 최고차항의 계수가 양수니까 삼차함수 $f(x)$는
극대, 극소 순서의 극값을 갖는 개형이거나
극값이 존재하지 않는 증가함수의 개형일 건데...

(2): 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 접해야하네
(3): 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$가 접해야하네
(4): 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 0)$을 지나야 하네. 정보가 꽤 많아.
이 정도면 개형 몇 개 그려보면서 추론해볼만 하겠어.

(약 4분간 3, 4개의 개형을 긁적이다가 정답개형을 찾는다.)



이제 인수정리로 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 관계,
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 관계를 정리 해보자.
이 과정에서 근과 계수와의 관계를 활용하고
$f'(1)=1$로 정리하면 되겠구나.

$f(x)-(-x)=ax(x-t)^2$ (단, $a>0$), $f'(x)+1=2ax(x-t)+a(x-t)^2$
$f'(1)=a(1-t)^2+2a(1-t)-1$

$f(x)-(x)=ax^2(x-2t)$ (단, $a>0$), $f'(x)-1=2ax(x-2t)+ax^2$
$f'(1)=2a(1-2t)+a+1 \Rightarrow a(3-4t)=0$

$t=\dfrac{3}{4}$이고, $a=\dfrac{32}{9}$ 구나.

이하생략

답: 51

일반적 사고과정

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(1)
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.(2)

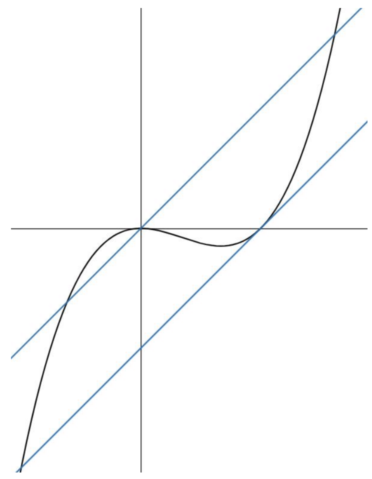
$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때,(3) $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(1): $f(x)=a(x-p)^2(x-q)$라 하자.

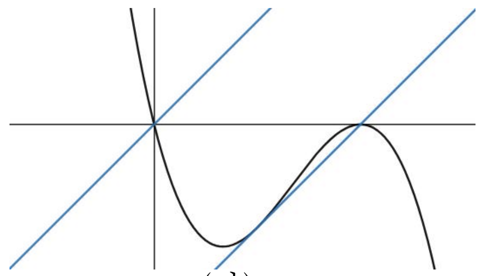
$f(x)=0$의 실근은 $x=p, q$이다.

(2: $f(x-f(x))=0$의 실근은 $x-f(x)=p, q$이므로

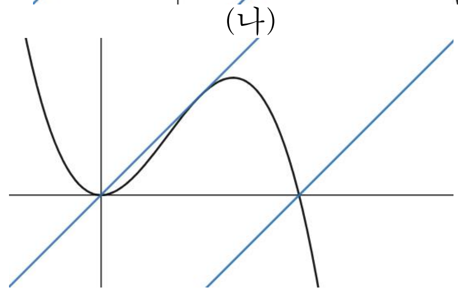
$f(x)=x-p$ 또는 $x-q$의 실근이 3개인 것을 찾자.



(가)



(나)



(다)

(가)와 같이 최고차항의 계수가 양수인 경우에는 조건을 만족시키는 상황이 없네. (그러나 99% 정도의 확신)

(나), (다) 중에서 정답 상황이 있을 것이다.

(3): $f(1)=4$, $f'(1)=1$이려면 (다) 상황이 정답일 것이다.

이하 계산 생략

답: 61

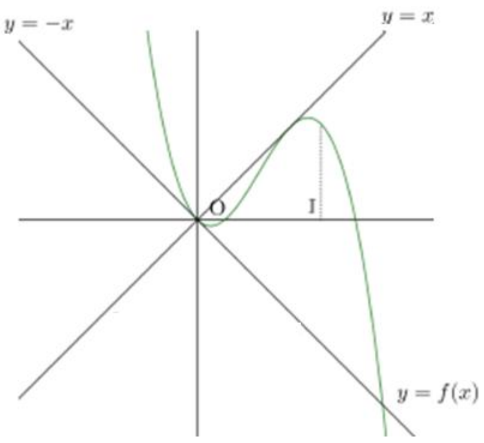
일반적 사고과정

$f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $\{f(x)\}^2=x^2$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고 허근은 갖지 않는다.
(나) 방정식 $\{f(x)\}^2=x^2$의 서로 다른 실근의 합은 9이다.

$f'(0)<0$일 때(3), $f(4)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (우주설 자작문항, 제한시간 8분)

(1): $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$의 서로 다른 실근이 3개구나.
허근을 갖지 않으려면 각각의 경우의 실근이 1개가 되려면
직선 $y=x$, $y=-x$가 변곡접선이 되야하는데
이 경우 조건을 만족시키기 어려우니 각각의 경우 실근은
2개 또는 3개가 되겠어... (3)을 이용하면 아래 상황이네.



(2): 삼차함수 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$에 대하여
$f(x)=g(x)$의 모든 근의 합은 일정.
(이때, 중근은 2번 더해준다. 근과 계수와의 관계)
이것을 이용하면 $y=x$랑 접하는 접점의 x좌표가 t일 때,
$y=-x$를 지나는 점의 x좌표는 $2t$인게 나오고
$t+2t=9$, $t=3$이겠네

$f(x)-x=ax(x-3)^2$, $f(x)+x=ax^2(x-6)$ 에서
$f(4)=4a+4$, $f(4)=-32a-4$
$a=-\frac{2}{9}$, $f(4)=\frac{28}{9}$

답: 37

제시하는 사고과정1

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.$_{(1)}$

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.$_{(2)}$
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.$_{(3)}$

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때,$_{(4)}$ $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]
(20학년도 수능 (나)형 30번 제한시간 7분)

확정된 게 적은 상태에서 무지성으로 개형추론을 시작하는 건 좋지 않아 보이니 수식으로 최대한 뭔가를 알아내보자.

(1)+(2): $f(x)-x=a(x-p)^2(x-q)$ $(a>0,\ p\neq q)$라 해야지.

$f(0)=0$이므로 $p=0$ 또는 $q=0$이니까.

$f(x)-x=ax^2(x-q)$ 또는 $ax(x-p)^2$

(3): $f(x)+x=ax^2(x-q)+2x$ 또는 $ax(x-p)^2+2x$인데

방정식 $f(x)+x=0$의 실근의 개수가 2개 이므로

$f(x)+x=a(\triangle)^2(\triangledown)^1$꼴 이어야 되겠지...

ⅰ) $f(x)+x=ax(x-p)^2+2x$인 경우

$f(x)+x=ax\left\{(x-p)^2+\dfrac{2}{a}\right\}$에서 $\dfrac{2}{a}>0$이므로

$(x-p)^2+\dfrac{2}{a}\neq 0$, $f(x)+x=a(\triangle)^2(\triangledown)^1$꼴이 불가하네.

ⅱ) $f(x)+x=ax^2(x-q)+2x$인 경우

$f(x)+x=ax\left\{x(x-q)+\dfrac{2}{a}\right\}$에서 $\dfrac{2}{a}>0$이므로

이차식$x(x-q)+\dfrac{2}{a}$는 x로 나누어떨어질 수 없고

$f(x)+x=ax\left\{x(x-q)+\dfrac{2}{a}\right\}$

$=ax\left(x-\dfrac{q}{2}\right)^2$ 여야 되겠구나.

이 과정에서 $\dfrac{2}{a}=\dfrac{q^2}{4}$, $a=\dfrac{8}{q^2}$

$f(x)+x=\dfrac{8}{q^2}x\left(x-\dfrac{q}{2}\right)^2$에서 $f'(1)=1$을 사용하면 되겠다.

이하 생략

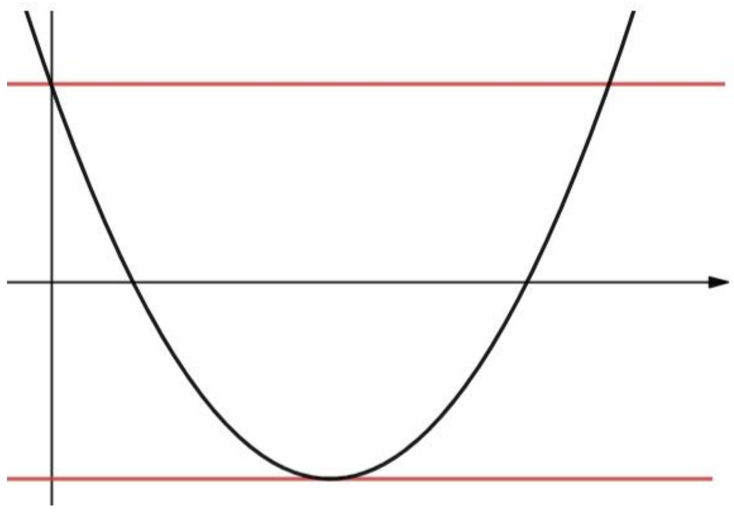
제시하는 사고과정2

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.(1)

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(2)
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(3)

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때,(4) $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]
(20학년도 수능 (나)형 30번 제한시간 7분)

(1): $f(0)=0$이므로 다항함수 $f(x)$는 x로 나누어떨어지게 되네.
$f(x)=xQ(x)$ 라 하고, 조건들을 분석해보자.
(단, $Q(x)$는 최고차항 계수가 양수인 이차함수)
(2): $x(Q(x)-1)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2개
$x(Q(x)+1)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2개.
$Q(x)=\pm1$을 만족시키는 $x\neq0$인 실근은 각각 1개 존재한다.
삼차함수에 비해 이차함수는 개형추론이 매우 쉬우니 해보자.



$y=-1$에 접하고, 점 $(0,1)$을 지나는 이차함수가 나온다.
$Q(x)=a(x-p)^2-1$이라 하자. $Q(0)=1$이므로
$ap^2=2$를 알 수 있는데...
미지수가 2개인데 식이 1개네?

이제는 $f'(1)=1$을 사용하면 a, p가 확정 되겠구나.

이하생략

※중요
곡선 $y=Q(x)$와 직선 $y=-1$은 $x=p$에서 접한다.
(중근 p를 갖는다.) 그러므로 $Q(x)=-1$에서 양변에 x를 곱한 형태인 $f(x)=-x$는 $x=0$이라는 실근이 추가되고, $x=p$에서 접한다. (여전히 중근 p를 갖고 있기 때문)

마찬가지로 $y=Q(x)$와 $y=1$은 $x=0, 2p$에서 만난다.
그러므로 $Q(x)=1$에서 양변에 x를 곱한 형태인 $f(x)=x$는 $x=0$이라는 실근이 추가되고, 결과적으로 $x=0$의 실근을 2개, $x=2p$라는 실근을 1개 갖는다.

따라서 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$에서 접하고, $x=2p$에서 만난다.

제시하는 사고과정1

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(1)
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.(2)

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때,(3) $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(1): $f(x)=a(x-p)^2(x-q)$ $(a>0,\ p\neq q)$라 해야지.

(2): $f(x)=0$의 실근 $x=p,\ q$에 대하여 방정식 $f(x-f(x))=0$의 실근은 $x-f(x)=p$, $x-f(x)=q$의 실근이겠다.
보기 편하게, $f(x)=x-p$ 또는 $x-q$라고 하자.

방정식 $a(x-p)^2(x-q)=x-p$의 실근은
$x=p$와 방정식 $a(x-p)(x-q)=1$ $(x\neq p)$의 실근이고

방정식 $a(x-p)^2(x-q)=x-q$의 실근은
$x=q$와 방정식 $a(x-p)^2=1$ $(x\neq q)$의 실근이니까.

방정식 $a(x-p)(x-q)=1$ $(x\neq p)$
방정식 $a(x-p)^2=1$ $(x\neq q)$의 실근이 총 1개라는 이야기네.

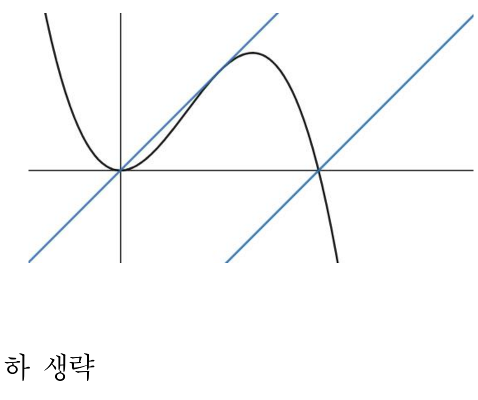
$a<0$이고, 곡선 $y=a(x-p)(x-q)$가 $x=\frac{p+q}{2}$에서
직선 $y=1$에 접하면 조건을 만족시키게 되겠다.

방정식 $a(x-p)^2=1$ $(x\neq q)$의 실근은 0개
양변에 $x-q$를 곱해보면 방정식 $a(x-p)^2(x-q)=x-q$의 실근은
$x=q$ 뿐인게 확인되고,

방정식 $a(x-p)(x-q)=1$ $(x\neq p)$는 $x=\frac{p+q}{2}$를 중근으로 하니
양변에 $x-p$를 곱해보면 방정식 $a(x-p)^2(x-q)=x-p$의 실근은
$x=p,\ \frac{p+q}{2}$인 것을 알 수 있네.

이 중 $\frac{p+q}{2}$가 중근이니 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $x-p$는
$x=\frac{p+q}{2}$에서 접할 거야.

이 정도의 정보면 그래프를 그려서 상황을 파악할 만 하지.



이하 생략

4일차 예습과제

정답을 내지 못하여도 상관없으니 도전하여 봅시다.

4. 함수 $y=f(x)$위의 점 (x, y)를 매개변수 t로 나타내면

$$x=g(t), \qquad y=g'(t) \text{ (단, } t \le 1)$$

이다. $\ln g(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$이고, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$ 일 때, $g(k)=a$를 만족시키는 상수 k에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $e^k+1=-k$

ㄴ. $f(a)=\dfrac{1}{e}$

ㄷ. $b=-\dfrac{1}{k}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.