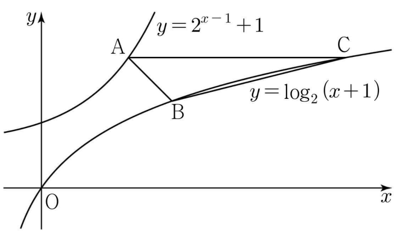
제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

1. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-1}+1$위의 점 A와 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 두 점 B, C에 대하여 두 점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AC는 x축과 평행하다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (p, q)일 때, $p+q$의 값은? [4점]
(2016학년도 사관학교 A형 18번)



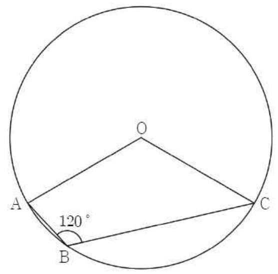
① $\frac{16}{3}$　② $\frac{17}{3}$　③ 6　④ $\frac{19}{3}$　⑤ $\frac{20}{3}$

수학1 - 2. 삼각함수

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle ABC = 120^{\circ},\ \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 $OABC$의 넓이는? [4점]
(2021학년도 사관학교 가형 15번)



① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

수학1 - 3. 수열

3. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$
(나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

(2021학년도 사관학교 가형 18번)

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

4. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$
(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

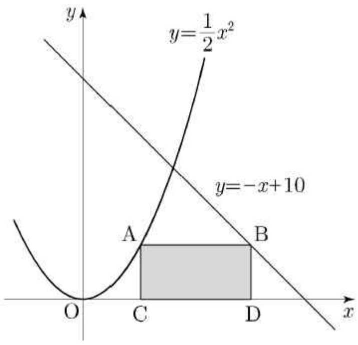
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}$ 의 값은? [3점]

(2015학년도 사관학교 A형 9번)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

수학2 - 2. 미분

5. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{A}\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+10$과 만나는 점을 B라 하고, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 직사각형 ACDB의 넓이가 최대일 때, $10t$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]
(2015학년도 사관학교 A형 28번)



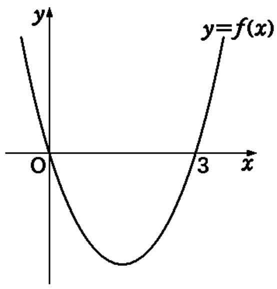
수학2 - 3. 적분

6. 그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만날 때, 함수

$$S(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$$

의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=6$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{S(x)}{x-1}$의 값은? [3점]

(2013학년도 사관학교 문과 13번)



① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ -2 ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

[1번] - ⑤

점 A의 좌표는 $(a, 2^{a-1}+1)$라 하자. 점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는 $(2^{a-1}+1, a)$이다. 점 B가 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로 정리하면 다음과 같다.

$$a=\log_2(2^{a-1}+2) \quad \rightarrow \quad 2^a=2^{a-1}+2$$
$$2^{a-1}=2$$
$$a=2$$

이를 통해 점 A의 y좌표는 $2^{2-1}+1=3$이라는 것을 알 수 있다. 직선 AC가 x축과 평행하므로 점 C의 y좌표는 3이다. 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

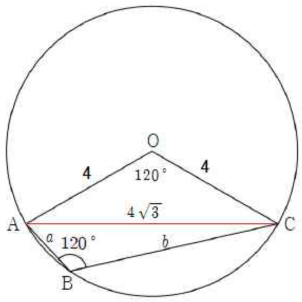
$$\log_2(x+1)=3 \quad \rightarrow \quad x=2^3-1=7$$
$$\mathrm{A}(2, 3),\ \mathrm{B}(3, 2),\ \mathrm{C}(7, 3)$$

$$p=\frac{2+3+7}{3}=4,\ q=\frac{3+2+3}{3}=\frac{8}{3}$$

따라서 $p+q=\dfrac{20}{3}$

정답 ⑤

[2번] - ⑤



사인법칙과 코사인법칙을 이용하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\overline{AC} = 8 \times \sin 120^\circ$
$= 4\sqrt{3}$

$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ$
$= a^2 + b^2 + ab$
$= (a+b)^2 - ab$
$= 48$

$ab = (2\sqrt{15})^2 - (4\sqrt{3})^2 = 12$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}(4 \times 4 + ab)\sin 120^\circ = 7\sqrt{3}$

정답 ⑤

[3번] - ①

(가) 조건과 (나) 조건의 식을 더하면 다음과 같다.

$$a_{2n+1}+a_{2n+2}=2a_{n+1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16}a_n &= a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{15}+a_{16})\\ &=3+2(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_8)\\ &=7+2(a_3+a_4+a_5+\cdots+a_8)\\ &=7+4(a_2+a_3+a_4)\\ &=7+12a_2\\ &=31\end{aligned}$$

정답 ①

[4번] - ③

$\lim_{x \to INF} \frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$, $\lim_{x \to INF} \frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

함수 $f(x)-2g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, 함수 $f(x)+3g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$\{f(x)+3g(x)\}-\{f(x)-2g(x)\}=5g(x)$

위의 식을 통해 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{5}$인 삼차함수라는 것을 알 수 있다. 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to INF} \frac{g(x)}{x^3}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to INF} \frac{f(x)+g(x)}{x^3} &= \lim_{x \to INF}\left\{\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-\frac{2g(x)}{x^3}\right\} \\ &= \lim_{x \to INF}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-2\times\lim_{x \to INF}\frac{g(x)}{x^3} \\ &= 1-\frac{2}{5} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

정답 ③

[5번] - 25

$$\frac{1}{2}x^2 = -x+10 \quad \rightarrow \quad x^2+2x-20=0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{21}$$

위의 식에 근거하여 보았을 때, 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=-x+10$는 $x=-1\pm\sqrt{21}$일 때 만나므로 t의 범위는 $0 < t \leftarrow 1+\sqrt{21}$이다. 점 A, B의 y좌표가 같으므로 $-x+10=\frac{1}{2}t^2$에서 $x=10-\frac{1}{2}t^2$이고, 그러므로 점 B의 x좌표는 $10-\frac{1}{2}t^2$이다.

$$\overline{\mathrm{AC}} = \left(10-\frac{1}{2}t^2\right)-t,\ \overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}t^2$$

직사각형 ACDB의 넓이를 $f(t)$라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\begin{aligned} f(t) &= \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{CD}} \\ &= \left(10-\frac{1}{2}t^2-t\right) \times \frac{1}{2}t^2 \\ &= -\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^3+5t^2 \ (0 < t \leftarrow 1+\sqrt{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= -t^3-\frac{3}{2}t^2+10t \\ &= -\frac{t}{2}(2t-5)(t+4) \ (0 < t < -1+\sqrt{21}) \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{5}{2}$일 때, 극대이자 최대이므로

$$10t = 10 \times \frac{5}{2} = 25$$

정답 25

[6번] - ①

$S(x)=\int_1^x f(t)dt$
$S'(x)=f(x)$

이때, $S(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 이를 정리하여 계산하면 다음과 같다.

$M=S(0)=\int_1^0 f(t)dt$
$m=S(3)=\int_1^3 f(t)dt$

$$\begin{aligned} M-m &= \int_1^0 f(t)dt-\int_1^3 f(t)dt \\ &= -\int_0^3 f(t)dt \\ &= 6 \end{aligned}$$

$\int_0^3 f(t)dt=-6$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라고 하자. 식을 세우면 $f(x)=ax(x-3)$이고, 이를 토대로 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= -\frac{a}{6}\cdot 3^3 \\ &= -\frac{9a}{2} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$a=\frac{4}{3}$

$f(x)=\frac{4}{3}x(x-3)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\frac{S(x)}{x-1} &= S'(1) \ (\because\ S(1)=0) \\ &= f(1) \\ &= \frac{4}{3}\cdot 1\cdot (1-3) \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

정답 ①