제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

1. 세 실수 a, b, c가 $abc \neq 0$, $ab+bc+ca=abc$를 만족시킨다. $\log_2 x=a$, $\log_3 x=b$, $\log_5 x=c$일 때, 양수 x의 값은?
(2010학년도 경찰대학 2번)

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

수학1 - 2. 삼각함수

2. 삼각형 ABC의 넓이는 12이고, 이 삼각형의 외접원의 넓이는 15π이다. 이 외접원의 중심을 O라고 할 때, 다음 식의 값은? **(2013학년도 경찰대학 2번)**

$$\sin(\angle AOB)+\sin(\angle BOC)+\sin(\angle COA)$$

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

수학1 - 3. 수열

3. 모든 항이 양수이고 공비가 서로 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n b_n = \frac{(a_{n+1})^2 + 4(b_{n+1})^2}{5}$$

를 만족시킬 때, 공비의 최댓값은? [4점]
(2021학년도 경찰대학 7번)

① $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 1

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

4. 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$과 $\mathrm{P}\left(t, \frac{t+1}{2}\right)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}$의 값은? [3점]
(2018학년도 경찰대학 4번)

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

수학2 - 2. 미분

5. 이차함수 $f(x)=x^2-4x+7$의 그래프 위의 두 점 A$(1,4)$, B$(6,19)$가 있다. 직선 AB와 평행하고 포물선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 두 직선 $x=1$, $x=6$과 만나는 점을 각각 D, C라 할 때, 평면사변형 ABCD의 넓이는? [4점]
(2019학년도 경찰대학 7번)

① 30 ② $\frac{125}{4}$ ③ $\frac{65}{2}$ ④ $\frac{135}{4}$ ⑤ 35

수학2 - 3. 적분

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양수 a가 다음 조건을 만족할 때, a의 값은? [4점]
(2020학년도 경찰대학 14번)

(가) 모든 실수 t에 대하여 $\int_{a-t}^{a+t} f(x)\,dx = 0$이다.
(나) $f(a) = f(0)$
(다) $\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 144$

① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

[1번] - ③

$abc \neq 0$ 이므로 $ab+bc+ca=abc$의 양변을 abc로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

$$\log_2 x = a \quad \rightarrow \quad \log_x 2 = \frac{1}{a}$$

$$\log_3 x = b \quad \rightarrow \quad \log_x 3 = \frac{1}{b}$$

$$\log_5 x = c \quad \rightarrow \quad \log_x 5 = \frac{1}{c}$$

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = \log_x 30$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$이므로 $\log_x 30 = 1$이며, 따라서 $x=30$

정답 ③

[2번] - ③

외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\pi r^2 = 15\pi \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{15}$

(△ABC의 넓이)
=(△AOB의 넓이)+(△BOC의 넓이)+(△COA의 넓이)

$= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} \sin(\angle \mathrm{AOB}) + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}} \cdot \overline{\mathrm{OC}} \sin(\angle \mathrm{BOC})$

$\quad + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OC}} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \sin(\angle \mathrm{COA})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{15})^2\{\sin(\angle \mathrm{AOB}) + \sin(\angle \mathrm{BOC}) + \sin(\angle \mathrm{COA})\}$

$= 12$

$\sin(\angle \mathrm{AOB}) + \sin(\angle \mathrm{BOC}) + \sin(\angle \mathrm{COA}) = 12 \times \frac{2}{15} = \frac{8}{5}$

정답 ③

[3번] - ③

$a_n = ar^{n-1}$, $b_n = br^{n-1}$ 라고 하자. 이를 토대로 정리하면 다음과 같다.

$$abr^{2n-2} = \frac{a^2r^{2n} + 4b^2r^{2n}}{5}$$

$$r^2 = \frac{5ab}{a^2+4b^2} = \frac{5}{\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}} \le \frac{5}{2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{4b}{a}}} = \frac{5}{4}$$

위에서의 등호는 $\frac{a}{b} = \frac{4b}{a}$, 즉 $a^2 = 4b^2$일 때 성립하고

따라서 구하는 r의 최댓값은 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이다.

정답 ③

[4번] - ③

$y=-2(x-t)+\frac{t+1}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Q}\left(0, \frac{5t-1}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{1+\left(\frac{5t-1}{2}\right)^2}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t+1)^2+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}$

$\lim_{t \to INF} \frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\sqrt{5}$

정답 ③

[5번] - ②

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 A, B의 x좌표가 각각 1, 6이다. 직선 AB의 기울기와 동일한 $y=f(x)$ 위의 접선은 두 x좌표 값의 평균을 구함으로써 알 수 있다. 그러므로 직선 AB와 평행하고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 점 $\left(\frac{7}{2},\ f\left(\frac{7}{2}\right)\right)$을 지나며 그 기울기는 $f'\left(\frac{7}{2}\right)$이다. 직선 AB의 기울기가 $\frac{19-4}{6-1}=3$이므로 $f'\left(\frac{7}{2}\right)=3$이며, 정리하면 다음과 같다.

$$y=f'\left(\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)$$
$$=3x-\frac{21}{4}$$

해당 접선을 함수 $g(x)=3x-\frac{21}{4}$라고 하자. 그러면 점 D는 $\mathrm{D}(1,\ g(1))$가 되고, 점 C는 $\mathrm{C}(6,\ g(6))$이다.
$g(1)=-\frac{9}{4}$, $g(6)=\frac{51}{4}$이므로 따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 구하면 $\frac{125}{4}$

정답 ②

[6번] - ①

$$\int_{a-t}^{a+t} f(x)dx = \int_{-t}^{t} f(x+a)dx = 0$$

곡선 $y=f(x)$를 x축으로 $-a$만큼 평행이동하면 원점에 대하여 대칭인 함수가 된다. 즉 함수 $f(x)$가 $(a,\ 0)$ 점대칭이라는 것을 의미한다. $f(a)=f(0)$이므로 식을 세우면 다음과 같다.

$$f(x) = x(x-a)(x-2a)$$

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{a^4}{4} = 144$$

$$a^4 = 4 \times 144 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{6}$$

정답 ①