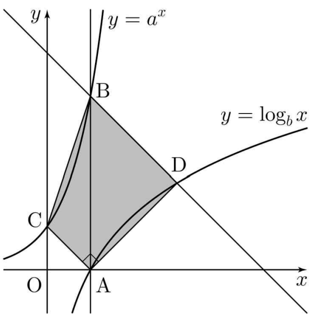
제 2 교시

Ambitious Penguin

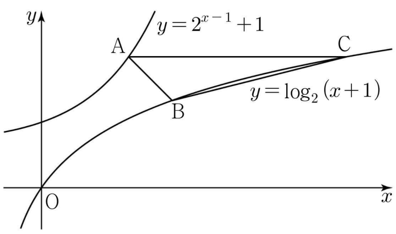
수학1 - 1. 지수와 로그

1. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 A(1, 0)을지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 C(0, 1)에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AC} \perp \overline{AD}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a \times b$의 값은? [4점]
(2020학년도 사관학교 가형 16번)



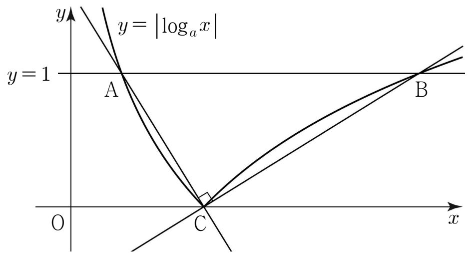
① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

2. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-1}+1$위의 점 A와 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 두 점 B, C에 대하여 두 점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AC는 x축과 평행하다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (p, q)일 때, $p+q$의 값은? [4점]
(2016학년도 사관학교 A형 18번)



① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

3. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 x축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은? (단, $a \neq 1$) [3점]
(2017학년도 사관학교 가형 13번)



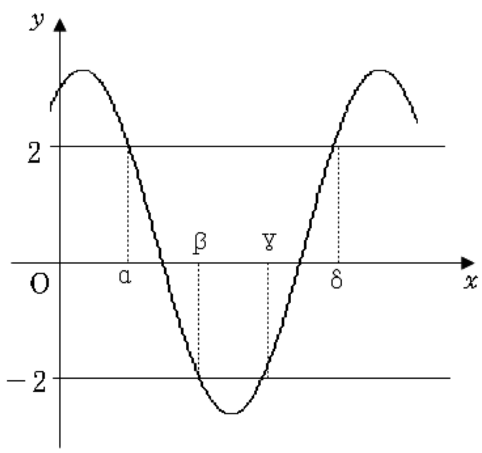
① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

4. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P(x, y)에 대하여 $\log_{\frac{1}{2}}(y+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$의 최솟값을 m이라 할 때, 2^m의 값은? (단, $y \neq -1$이다.) [4점]
(2008학년도 사관학교 문과 9번)

① 3 ② $\frac{3}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

수학1 - 2. 삼각함수

5. 곡선 $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$와 두 직선 $y=2$, $y=-2$가 만나는 점의 x좌표를 원점에서 가까운 것부터 차례대로 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값은? [3점]
(2004학년도 사관학교 문과 9번)



① $\frac{5\pi}{2}$ ② 3π ③ $\frac{7\pi}{2}$ ④ 4π ⑤ $\frac{9\pi}{2}$

수학1 - 3. 수열

6. 수열 $\{a_n\}$은 a_1이 자연수이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-d & (a_n \geq 0) \\ a_n+d & (a_n<0) \end{cases} \ (d\text{는 자연수})$$

이다. $a_n<0$인 자연수 n의 최솟값을 m이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=3$
(나) $a_1+a_{m-1}=-9(a_m+a_{m+1})$
(다) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} a_k=45$

a_1의 값을 구하시오. (단, $m \geq 3$) [4점]
(2020학년도 사관학교 나형 29번)

7. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

(가) $a_1=0$, $b_1=2$
(나) n이 짝수이면
$a_n=a_{n-1}+\dfrac{b_{n-1}}{n}$, $b_n=b_{n-1}-\dfrac{b_{n-1}}{n}$ 이다.
(다) n이 1보다 큰 홀수이면
$a_n=a_{n-1}-\dfrac{a_{n-1}}{n}$, $b_n=b_{n-1}+\dfrac{a_{n-1}}{n}$ 이다.

$a_{41}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]
(2013학년도 사관학교 이과 23번/문과 23번)

① 79 ② 80 ③ 81 ④ 82 ⑤ 83

8. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-\dfrac{5}{3}$이고

$$a_{n+1}=-\frac{3a_n+2}{a_n} \ (n \geq 1) \cdots\cdots (*)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

(*)에서

$$a_{n+1}+2=-\frac{a_n+\boxed{(가)}}{a_n} \ (n \geq 1)$$

이다. 여기서

$$b_n=\frac{1}{a_n+2} \ (n \geq 1)$$

이라 하면 $b_1=3$이고

$$b_{n+1}=2b_n-\boxed{(나)} \ (n \geq 1)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=\boxed{(다)} \ (n \geq 1)$$

이므로

$$a_n=\frac{1}{\boxed{(다)}}-2 \ (n \geq 1)$$

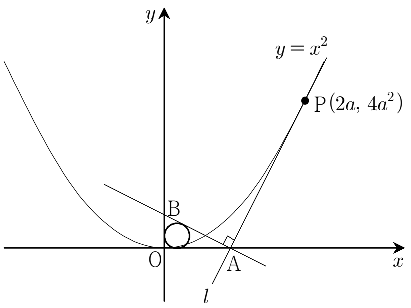
이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p \times q \times f(5)$의 값은? [4점]
(2016학년도 사관학교 A형 19번/B형 17번)

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

9. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(2a, 4a^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty} r(a)$의 값은? (단, $a>0$, O는 원점이다.) [4점]
(2010학년도 사관학교 이과 18번)



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

수학2 - 2. 미분

10. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 도함수이고, $h(x)$는 $g(x)$의 도함수라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$이 성립할 때, $f(-1)$의 값을 구하여라. [4점]
(2012학년도 사관학교 문과 27번)

11. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$를 만족시킨다. $f(1)=4$, $g(0)=1$일 때, $f'(2)$의 값은? [4점]
(2012학년도 사관학교 문과 20번)

① 20 ② 24 ③ 38 ④ 32 ⑤ 36

12. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$가 있다. 실수 t에 대하여 함수
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ t-f(x) & (x \geq a) \end{cases}$$
가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수를 $h(t)$라 하자. 예를 들어 $h(0)=3$이다. $h(t)=3$을 만족시키는 모든 정수 t의 개수는? [4점]
(2017학년도 사관학교 나형 21번)

① 55 ② 57 ③ 59 ④ 61 ⑤ 63

13. $a \leq 35$인 자연수 a와 함수 $f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+4$에 대하여 함수 $g(x)$를
$$g(x)=|f(x)-a|$$
라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b\,(b>0)$이 서로 다른 4개의 점에서 만난다.
(나) 함수 $|g(x)-b|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 4이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]
(2018학년도 사관학교 나형 30번)

수학2 - 3. 적분

14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $f'(1)=2$
> (나) 모든 실수 x, y에 대하여
> $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)-3$

이 때, $f(3)$의 값은? [3점]
(2008학년도 사관학교 이과 4번)

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

15. 양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x)=2x^2+ax$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]
(2021학년도 사관학교 나형 28번)

16. 0이 아닌 실수 k에 대하여 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가
$$f'(x)=3(x-k)(x-2k)$$
이다. 함수
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1 \text{ 또는 } x \ge 4) \\ \dfrac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1) & (1<x<4) \end{cases}$$
의 역함수가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha \le k < \beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은? [4점]
(2021학년도 사관학교 나형 20번)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[빠른 정답]

1번: ②
2번: ⑤
3번: ③
4번: ④
5번: ①
6번: 17
7번: ③
8번: ④
9번: ③
10번: 54
11번: ①
12번: ⑤
13번: 36
14번: ③
15번: 17
16번: ④

[해설]

(1번)

곡선 위의 네 점을 $A(1, 0)$, $B(1, a)$, $C(0, 1)$, $D(k, k-1)$라 하면 다음과 같이 계산이 가능하다.

$$1+a=k+(k-1)$$
$$6=\frac{1}{2}\times a\times k$$
$$k-1=\log_b k$$

해당식들을 연립하여 풀면 $k=3$, $a=4$, $b=\sqrt{3}$이다. 따라서 $ab=4\sqrt{3}$

정답 ②

(2번)

점 A의 좌표는 $(a, 2^{a-1}+1)$라 하자. 점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는 $(2^{a-1}+1, a)$이다. 점 B가 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로 정리하면 다음과 같다.

$$a=\log_2(2^{a-1}+2) \quad\to\quad 2^a=2^{a-1}+2$$
$$2^{a-1}=2$$
$$a=2$$

이를 통해 점 A의 y좌표는 $2^{2-1}+1=3$이라는 것을 알 수 있다. 직선 AC가 x축과 평행하므로 점 C의 y좌표는 3이다. 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

$$\log_2(x+1)=3 \quad\to\quad x=2^3-1=7$$
$$A(2, 3),\ B(3, 2),\ C(7, 3)$$

$$p=\frac{2+3+7}{3}=4,\ q=\frac{3+2+3}{3}=\frac{8}{3}$$

따라서 $p+q=\frac{20}{3}$

정답 ⑤

(3번)

점C: $(1, 0)$

$a>1 \quad\to\quad A\left(\frac{1}{a}, 1\right), B(a, 1)$

$0<a<1 \quad\to\quad A(a, 1),\ B\left(\frac{1}{a}, 1\right)$

$$\overline{AC}\text{ 기울기}\times\ \overline{BC}\text{ 기울기}=\frac{1}{\frac{1}{a}-1}\times\frac{1}{a-1}=-1$$
$$a^2-3a+1=0$$

따라서 근과 계수의 관계를 이용하면 a값의 합은 3

정답 ③

(4번)

$$\log_{\frac{1}{2}}(y+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+3}\right)$$

해당 식의 밑은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{y+1}{x+3}$이 최대일때 주어진 식은 최솟값을 갖는다는 것을 알 수 있다.
이때 $\frac{y+1}{x+3}$는 $\frac{y-(-1)}{x-(-3)}$, 즉 원 위의 점 $P(x, y)$와 $(-3, -1)$을 이은 직선의 기울기의 최댓값을 구하라는 것으로도 볼 수 있다.
기울기의 최댓값은 $(-3, -1)$을 지나면서 기울기가 k인 직선이 원과 접할 때의 k값이다. 정리하면 다음과 같다.

$$y+1=k(x+3),\ kx-y+3k-1=0$$

즉 원의 중심으로부터 직선까지의 거리가 1이 되는 m값을 찾아주면 된다. 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \quad\to\quad 4k^2-3k=0$$
$$k=\frac{3}{4}(\because y\neq-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+3}\right)\geq\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}=m \quad\to\quad 2^m=\frac{4}{3}$$

정답 ④

(5번)

$$y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=3\cos2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

위의 함수는 함수 $y=3\cos2x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 평행이동한 그래프이며 주기는 π이다.

$\frac{\pi}{8}$ 에서 α까지의 거리를 k라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\alpha=\frac{\pi}{8}+k$

$\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}-k$

$\gamma=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}+k$

$\delta=\pi+\frac{\pi}{8}+k$

따라서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$

정답 ①

(6번)

조건에 맞도록 (가)의 수들을 정리하면 $a_{m-2}=d+1$, $a_{m-1}=1$, $a_m=1-d$이다.
조건 (나)를 정리하면 다음과 같다.

$a_1=a_{m-1}+(m-2)d=1+(m-2)d$

$2+(m-2)d=9(d-2) \quad \rightarrow \quad d=\frac{20}{11-m}$

조건 (다)에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$(m-1)\frac{9(d-2)}{2}=45 \quad \rightarrow \quad (m-1)(d-2)=10$$
$$(m-1)\left(\frac{20}{11-m}-2\right)=10$$
$$m^2+3m-54=0$$
$$(m-6)(m+9)=0$$
$$m=6,\ d=4$$

따라서 $a_1=1+(6-2)\times4=17$

정답 17

(7번)

조건 (나)의 두 식을 더하면 모든 짝수의 n에 대하여 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$라는 것을 알 수 있다.
또한 조건 (다)의 두 식을 더하면 모든 1보다 큰 홀수의 n에 대하여 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$라는 것을 알 수 있다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$이 성립한다. 문제에서 $a_1=0$, $b_1=2$, 즉 $a_1+b_1=2$라고 했으므로 결국 $a_n+b_n=2$다.
(나)의 식들은 짝수의 n에 대하여 성립하므로 해당 식에 $2n$을 대입하면 다음과 같다.

$$a_{2n}=a_{2n-1}+\frac{b_{2n-1}}{2n}$$
$$=a_{2n-1}+\frac{2-a_{2n-1}}{2n}$$
$$=\frac{2n-1}{2n}\times a_{2n-1}+\frac{1}{n}$$

그리고 (다)의 식들은 홀수의 n에 대하여 성립하므로 해당 식에 $2n+1$을 대입하면 다음과 같다.

$$a_{2n+1}=a_{2n}-\frac{a_{2n}}{2n+1}$$
$$=\frac{2n}{2n+1}\times a_{2n}$$
$$=\frac{2n}{2n+1}\times\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-1}+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{2n-1}{2n+1}\times a_{2n-1}+\frac{2}{2n+1}$$

$(2n+1)a_{2n+1}=(2n-1)a_{2n-1}+2$

이때 수열 c_n을 $c_n=(2n-1)a_{2n-1}$이라고 하면 다음과 같이 정리가
가능하다.

$c_{n+1}-c_n=2$

즉 공차가 2인 등차수열이 된다. 첫째항은 $c_1=a_1=0$이므로 정리하면 $c_n=2n-2$이다. 이를 $c_n=(2n-1)a_{2n-1}$에 대입하면 다음과 같다.

$a_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}$

$\rightarrow \quad a_{41}=\frac{40}{41}=\frac{q}{p}$

따라서 $p+q=81$

정답 ③

(8번)

(*)에서의 식을 정리하면 다음과 같다.

$a_{n+1}+2=-\frac{3a_n+2}{a_n}+2=-\frac{a_n+\boxed{2}}{a_n}\ (n\geq1)$

이때 수열 b_n을 $b_n=\frac{1}{a_n+2}\ (n\geq1)$라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$a_1=-\frac{5}{3} \quad\rightarrow\quad b_1=\frac{1}{-\frac{5}{3}+2}=3$

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{1}{a_{n+1}+2}\\&=-\frac{a_n}{a_n+2}\\&=-\frac{(a_n+2)-2}{a_n+2}\\&=-1+\frac{2}{a_n+2}\\&=2b_n-\boxed{1}\quad(n\ge 1)\end{aligned}$$

$b_{n+1}-1=2b_n-2=2(b_n-1)$

결국 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 $b_1-1=2$이고 공비가 2인 등비수열이라는 것을 알 수 있다. 일반항을 정리하면 다음과 같다.

$b_n-1=2^n \quad\rightarrow\quad b_n=\boxed{2^n+1}\quad(n\ge 1)$

$a_n=\frac{1}{2^n+1}-2\ (n\ge 1)$

위에 근거하여 $p=2$, $q=1$, $f(n)=2^n+1$이고, 따라서
$p\times q\times f(5)=2\times 1\times(2^5+1)=66$

정답 ④

(9번)

$y'=2x$ 이므로 점P $(2a, 4a^2)$에서의 접선은 다음과 같다.

$y=4a(x-2a)+4a^2=4ax-4a^2$
$y=0 \quad\rightarrow\quad x=a$
A$(a, 0)$

점 A를 지나고 접선에 수직인 직선은 다음과 같다.

$y=-\frac{1}{4a}(x-a)=-\frac{1}{4a}x+\frac{1}{4}$

$x=0 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{4}$

B$\left(0, \frac{1}{4}\right)$

$\overline{\mathrm{OA}}=a, \overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{4}, \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+\frac{1}{16}}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot a=\frac{1}{8}a$

원의 반지름을 구하면 다음과 같다.

$$r(a)=\frac{2\cdot\frac{1}{8}a}{a+\frac{1}{4}+\sqrt{a^2+\frac{1}{16}}}$$

$$\lim_{a\to INF}r(a)=\lim_{a\to INF}\frac{\frac{1}{4}a}{a+\frac{1}{4}+\sqrt{a^2+16}}=\frac{1}{8}$$

정답 ③

(10번)

$f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$

$f(x)+h(x)$의 최고차항 = $f(x)$의 최고차항

$g(x)$의 차수 < $f(x)$의 차수
→ $2g(x)+x^4+1$의 최고차항은 x^4
→ $f(x)$는 최고차항이 x^4인 사차함수

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
$g(x)=f'(x)$
$=4x^3+3ax^2+2bx+c$
$h(x)=g'(x)$
$=12x^2+6ax+2b$

$f(x)+h(x)=x^4+ax^3+(b+12)x^2+(6a+c)x+2b+d$
$2g(x)+x^4+1=x^4+8x^3+6ax^2+4bx+2c+1$

$a=8$
$b+12=6a$
$6a+c=4b$
$2b+d=2c+1$

$a=8$, $b=36$, $c=96$, $d=121$이고, 따라서
$f(-1)=54$

정답 54

(11번)

먼저 해당 식의 양변을 $4y$로 나누어 주면 다음과 같다.

$$x\times\frac{f(x+y)-f(x-y)}{4y}=f(x)+g(y)$$

그 다음에는 양변에 극한을 취해준다. 먼저 좌변부터 정리한다.

$$\lim_{y\to0}\left\{x\times\frac{f(x+y)-f(x-y)}{4y}\right\}$$
$$=\lim_{y\to0}x\left\{\frac{f(x+y)-f(x)-f(x-y)+f(x)}{4y}\right\}$$
$$=\lim_{y\to0}\frac{x}{4}\left\{\frac{f(x+y)-f(x)}{y}+\frac{f(x-y)-f(x)}{-y}\right\}$$
$$=\lim_{y\to0}\frac{x}{4}\left\{\frac{f(x+y)-f(x)}{y}+\frac{f(x-y)-f(x)}{-y}\right\}$$
$$=\frac{x}{4}\{f'(x)+f'(x)\}$$
$$=\frac{1}{2}xf'(x)$$

우변 역시 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{y\to0}\{f(x)+g(y)\}=f(x)+g(0)=f(x)+1\ (\because g(0)=1)$$

위에서 정리한 식들을 정리하면 $\frac{1}{2}xf'(x)=f(x)+1$이다. 이제 다항함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^n+\cdots$ $(a\neq0,\ n$은 자연수$)$라고 하면 위의 식을 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\frac{1}{2}xf'(x)=f(x)+1$$
$$\to\qquad \frac{1}{2}x\times nax^{n-1}=ax^n$$
$$\to\qquad \frac{an}{2}x^n=ax^n$$

$a\neq0$이므로 계수비교에 의하여 $n=2$이다. 즉, $f(x)$는 이차함수이고, 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $f(x)$를 $f(x)=ax^2+bx+c$ 이라고 할 수 있다.
그런데 위의 식 $\frac{1}{2}xf'(x)=f(x)+1$을 보면 양변에 $x=0$을 대입함으로써 $f(0)=-1$이라는 것을 알 수 있고, 문제에서 $f(1)=4$라고 했으므로, 대입하여 $f'(1)=10$인 것 역시 알 수 있다. 이제 위의 조건들을 대입하여 $f(x)$의 식을 세울 수 있다. 곧 $f(x)=5x^2-1$이며, 따라서 $f'(2)=20$

정답 ①

(12번)

함수 $g(x)$는 $y=\frac{t}{2}$에 대하여 선대칭인 함수이다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수가 3개, 즉 $h(t)=3$을 만족시키기 위해서는 방정식 $f(x)=\frac{t}{2}$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 해야 한다.

$$f(x)=x^3+3x^2-9x$$
$$f'(x)=3x^2+6x-9$$
$$=3(x^2+2x-3)$$
$$=3(x+3)(x-1)$$

$$f(-3)=27$$
$$f(1)=-5$$

$$-5<\frac{t}{2}<27\quad\to\quad-10<t<54$$

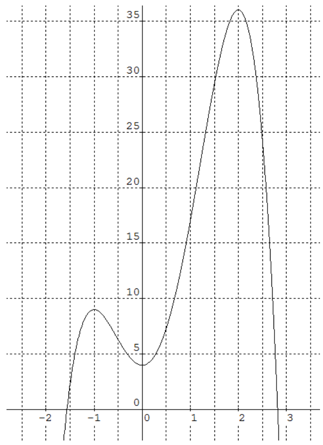
따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 t의 개수는 63

정답 ⑤

(13번)

$$f(x)=-3x^4+4x^3+12x+4$$
$$f'(x)=-12x(x+1)(x-2)$$

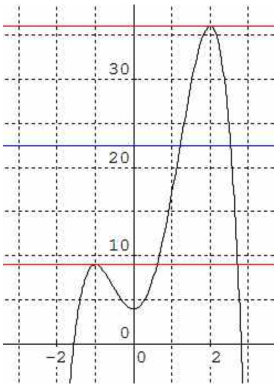
이를 토대로 곡선 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



함수 $g(x)=|f(x)-a|$는 곡선 $y=f(x)$의 그래프를 $y=a$에서 접어 올린다음 $y=a$를 x축으로 본 그래프와 같다.
이때 직선 $y=a$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이 $y=f(x)$의 극점이 아니면 접힌 점은 모두 첨점이 되어 미분가능하지 않다.
마찬가지로, 곡선 $y=g(x)$에서 $y=b$에서 접어 올린다음 $y=b$를 x축으로 본 그래프가 $y=|g(x)-b|$이다. 이것은 $y=f(x)$의 그래프를 $y=a,\ y=a+b,\ y=a-b$의 3곳에서 접은 것과 같다.
그러므로 (가)에서 $y=a+b,\ y=a-b$와 곡선 $y=f(x)$는 교점이 4개이고, (나)에서 $y=a,\ y=a+b,\ y=a-b$와 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 4곳만 꺾어져서 미분가능하지 않은 점이라야 하고, 다른 점은 $y=f(x)$의 극점이다.

위의 결과를 다 만족하는 경우는 다음과 같은 두 가지이다.

case 1)



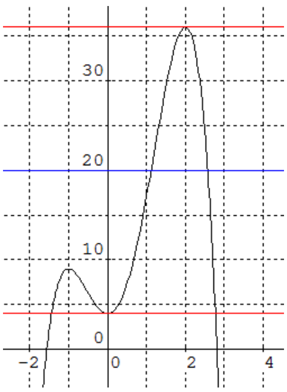
$a+b=36$, $a-b=9$

$a=\frac{45}{2}$ ($\neq$ 자연수)

$b=\frac{27}{2}$

이는 성립하지 않는다.

case 2)



$a+b=36$, $a-b=4$

$a=20$ (자연수)

$b=16$

성립한다.

따라서 $a+b=36$

정답 36

(14번)

먼저 식에 $y=0$을 대입한다. 그러면 $f(x)=f(x)+f(0)-3$, 즉 $f(0)=3$이라는 것을 알 수 있다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)-f(0)$$

이제 우변에 있는 $f(x)$를 좌변으로 옮겨준다.

$$f(x+y)-f(x)=f(y)-f(0)+xy(x+y)$$

그 다음에 양변을 y로 나누어준다.

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-f(0)}{y}+x(x+y)$$

그리고 양변에 극한을 취해준다. 먼저 좌변부터 정리하도록 한다.

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=f'(x)$$

우변도 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{y\to 0}\left\{\frac{f(y)-f(0)}{y}+x(x+y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+x(x+y)\right\}$$
$$=x^2+f'(0)$$

즉, $f'(x)=x^2+f'(0)$이다. (가)에서 $f'(1)=2$라고 했으므로 대입하면 $f'(x)=x^2+1$이다. 해당식을 적분하면

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+f(0)$이고, $f(0)=3$이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+3$이다. 따라서 $f(3)=15$

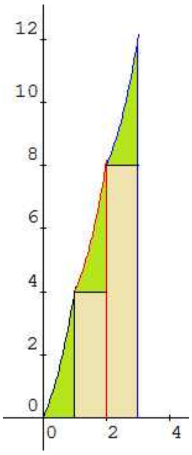
정답 ③

(15번)

해당 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 정리하면 다음과 같다.

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x) \quad\rightarrow\quad 2+a=a^2$$
$$a=2$$

이를 토대로 함수 $y=f(x)$의 개형을 추론하면 다음과 같다.



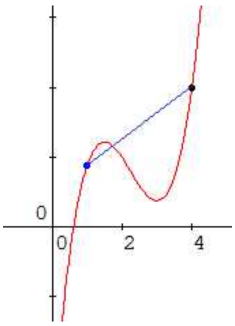
따라서 구하는 넓이 S는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
S &= 3\int_0^1 (2x^2+2x)dx + 12 \\
&= 3\left[\frac{2}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 + 12 \\
&= 5 + 12 \\
&= 17
\end{aligned}
$$

정답 17

(16번)

문제의 조건을 만족시키기 위해서는 해당 함수의 그래프가 다음과 같아야 한다.



이를 정리하면 다음과 같다.

$1 \le k,\ f(1) < f(4)$

$f'(x) = 3(x-k)(x-2k)$

$f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}kx^2 + 6k^2x + C$

$$
\begin{aligned}
f(4) - f(1) &= (64 - 72k + 24k^2) - \left(1 - \frac{9}{2}k + 6k^2\right) \\
&= 18k^2 - \frac{135}{2}k + 63 \\
&= \frac{9}{2}(4k^2 - 15k + 14) \\
&= \frac{9}{2}(k-2)(4k-7) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

따라서 $1 \le k < \dfrac{7}{4}$이고, $\beta - \alpha = \dfrac{3}{4}$

정답 ④