제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

1. 기울기가 -1인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 $\mathrm{A}(a, b)$, 직선 l이 곡선 $y=\log_4(x+2)$와 만나는 점을 $\mathrm{B}(c, d)$라고 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$일 때, $a+c$의 값은? (단, $1<a<c$)
(2009학년도 경찰대학 19번)

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2. 지수부등식 $a\cdot 4^x+12\cdot 2^x+b>0$의 해가 $1<x<2$일 때, $a+b$의 값은?
(2002학년도 경찰대학 11번)

3. 지수방정식 $9^x-2(a+4)3^x-3a^2+24a=0$의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하여라. [4점]
(2014학년도 경찰대학 24번)

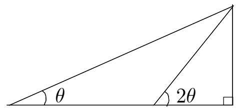
수학1 - 2. 삼각함수

4. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=x+1$, $\overline{AC}=x+2$이고 $\angle B=2\theta$, $\angle C=\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은? [5점]
(2016학년도 경찰대학 19번)

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

5. $\tan x=\sqrt{3}$ 일 때, $\sin^4 x+\cos^4 x$ 의 값은?
(1999학년도 경찰대학 16번)

6. 오른쪽 그림을 이용하여 $\cos 2\theta$의 값을 $\cos\theta$를 써서 나타낼 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $0^o < \theta < 45^o$)
(2006학년도 경찰대학 9번)



① $\cos^2\theta$ ② $1-\cos^2\theta$
③ $1+\cos^2\theta$ ④ $1-2\cos^2\theta$ ⑤ $2\cos^2\theta-1$

수학1 - 3. 수열

7. $\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{121\sqrt{120}+120\sqrt{121}}$ 의 값은? [3점]
(2018학년도 경찰대학 1번)

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{11}{10}$ ④ $\frac{12}{11}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

8. $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$의 값은?
(2013학년도 경찰대학 16번)

① 250 ② 254 ③ 258 ④ 262 ⑤ 266

9. 정수 d 는 다음 조건을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차이다.

(가) $a_1=-2016$
(나) $\sum_{k=n}^{2n}a_k=0$ 인 자연수 n 이 존재한다.

모든 d 의 합을 k 라 할 때, k 를 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라. [5점]
(2017학년도 경찰대학 25번)

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

10. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a}{\sqrt{x^2+b}-\sqrt{c^2+b}} & (x \neq c) \\ 4c & (x=c) \end{cases}$ 가 $x=c$ 에서 연속이 되도록 하는 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 최솟값은? [4점]
(2017학년도 경찰대학 6번)

① 0 ② $-\frac{1}{8}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

수학2 - 2. 미분

11. 삼차함수 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|P'(x)| \le 1$을 만족할 때, a의 최댓값은? (단, a, b, c, d는 실수이다.) [4점]
(2020학년도 경찰대학 11번)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

12. 곡선 $y=x^2-8x+17$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-8t+17)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 R라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하자. $1 \le t \le 3$일 때, $S(t)$가 최대가 되는 t의 값은? [4점]
(2019학년도 경찰대학 10번)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

13. $1 \le k < l < m \le 10$인 자연수 k, l, m에 대하여 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)kx^l(x-1)^m$$

일 때, $x=0$에서 $f(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 순서쌍 $(k,\ l,\ m)$의 개수를 구하시오. [4점]
(2018학년도 경찰대학 24번)

14. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P는 B를 출발하여 매초 1의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 $\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{A}$의 방향으로 움직이고, 점 Q는 C를 출발하여 매초 $\frac{2}{3}$의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 $\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}$의 방향으로 움직인다. 두 점 P, Q가 각각 B, C에서 동시에 출발한 후 시각 t초일 때 삼각형 APQ의 넓이를 $f(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? $\left(\text{단, } 0 \le t \le \frac{3}{2}\right)$ [5점]
(2015학년도 경찰대학 19번)

<보 기>

ㄱ. $f(t)$는 구간 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(t)$는 $t=\frac{3}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학2 - 3. 적분

15. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\int_0^x |f(t)-2t|dt$ 로 정의하자. 다음 조건을 만족시키는 이차함수 f 중에서 $f(1)$ 의 최솟값은? [4점]
(2017학년도 경찰대학 11번)

$g'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 곡선 $y=x^3$ 에 있는 점 $\mathrm{A}(a,\ a^3)$에서의 접선이 이 곡선과 점 B에서 만나고, 점 B에서의 접선은 이 곡선과 점 C에서 만난다고 하자. 선분 BC와 이 곡선 사이의 넓이를 선분 AB와 이 곡선 사이의 넓이로 나눈 값은? (단, $a\neq 0$이다.)
(2013학년도 경찰대학 23번)

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

17. 음이 아닌 정수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1인 n차 다항함수 $P_n(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$
(나) 음이 아닌 서로 다른 정수 $m,\ n$에 대하여 $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx=0$

$\int_0^1 P_3(x)dx$ 의 값은? [5점]
(2018학년도 경찰대학 17번)

① $-\frac{1}{20}$ ② $-\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

18. 직선 l이 함수 $f(x)=x^4-2x^2-2x+3$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 접할 때, 직선 l과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이가 A이다. $30A$의 값을 구하시오. [5점]
(2015학년도 경찰대학 25번)

[빠른 정답]

1번: ⑤
2번: −18
3번: 19
4번: ③
5번: $\frac{5}{8}$
6번: ⑤
7번: ②
8번: ①
9번: 120
10번: ①
11번: ⑤
12번: ⑤
13번: 20
14번: ④
15번: ②
16번: ③
17번: ①
18번: 32

[해설]

(1번)

직선 l을 $y=-x+m$이라 하자. 그러면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\mathrm{A}(a,\ -a+m)$, $\mathrm{B}(c,\ -c+m)$
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-c)^2+(a-c)^2}$

$\sqrt{2(a-c)^2}=\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a-c=-1 \ (\because 1<a<c)$

또한 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이고 점 $\mathrm{B}(c,\ d)$는 곡선 $y=\log_4(x+2)$ 위의 점이므로
$b=\log_2 a$, $d=\log_4(c+2)$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기가 -1이므로 종합하여 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{\log_2 a-\log_4(c+2)}{a-c}=-1$$

$$\log_2 a-\frac{1}{2}\log_2(c+2)=1 \quad (\because a-c=-1)$$

$$2\log_2 a-\log_2(c+2)=2 \quad \rightarrow \quad \log_2\frac{a^2}{c+2}=2$$

$$a^2=4(c+2)$$

$a^2-4a-12=(a-6)(a+2)=0 \quad (\because c=a+1)$
$a=6 \quad (\because 1<a)$

따라서 $a+c=6+7=13$

정답 ⑤

(2번)

$2^x=t\ (t>0)$에 대하여 함수 $f(t)$를 $f(t)=at^2+12t+b$라 하자.
그러면 $f(t)=at^2+12t+b>0$ 의 해가 $2<t<4$ 이므로
정리하면
다음과 같다.

$a>0$, $a(t-2)(t-4)>0$

$at^2+12t+b=a(t-2)(t-4)=at^2-6at+8a$

$a=-2,\ b=-16$

따라서 $a+b=-18$

정답 -18

(3번)

$3^x=t$라 하면 주어진 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$t^2-2(a+4)t-3a^2+24a=0$

x가 양수일 때 $t>1$이므로 해당 방정식의 서로 다른 해는 모두 1보다 커야한다는 점을 알 수 있다. 그러므로 해당 방정식의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이고, 함수 $f(t)$를
$f(t)=t^2-2(a+4)t-3a^2+24a$라 하면 판별식 외에도 다음 2가지 조건, 즉 $f(1)>0$, 이차함수 $f(t)$의 축 $x=a+4>1$이어야 한다.
판별식부터 확인하면 다음과 같다.

1) 판별식 $D>0$
$D=(a+4)^2-(-3a^2+24a)>0 \quad \rightarrow \quad 4a^2-16a+16>0$
$4(a-2)^2>0$

그러므로 $a\neq 2$인 모든 실수 a에 대하여 성립한다.

2) $f(1)>0$
$f(1)=1-2(a+4)-3a^2+24a>0 \quad \rightarrow \quad 3a^2-22a+7<0$
$(3a-1)(a-7)<0$
$\frac{1}{3}<a<7$

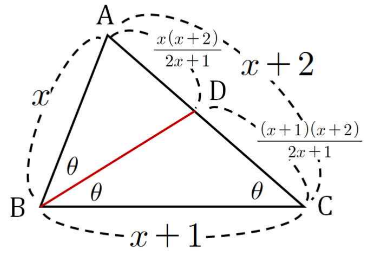
3) $a+4>1$
$a>-3$

위의 3가지 조건을 전부 정리하면 $a\neq 2,\ \frac{1}{3}<a<7$이다.
따라서 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이고, 구하는 합은 19

정답 19

(4번)

각 B를 이등분하는 선을 그어 선분AC와 만나는 점을 D라 하면, 삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의하여 다음과 같이 정리가 가능하다.



$\mathrm{AD}=\dfrac{x(x+2)}{2x+1}$

$\mathrm{CD}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{2x+1}$

이때, 삼각형 ABD와 삼각형 ACB가 AA닮음이므로 닮음의 성질과 코사인법칙을 사용하면 다음과 같다.

$x+2:x=2x+1:x+2 \quad \rightarrow \quad x=4$

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

정답 ③

(5번)

주어진 식을 바꿔주면 다음과 같다.

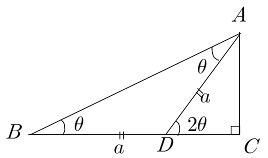
$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\tan x=\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos x=\pm\dfrac{1}{2}$ (복호동순)

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{5}{8}$$

정답 $\dfrac{5}{8}$

(6번)



$\angle\mathrm{ADB}$에 대하여 코사인 법칙을 사용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\cos(\pi-2\theta)&=\frac{a^2+a^2-(2a\cos\theta)^2}{2a^2}\\&=\frac{(2-4\cos^2\theta)a^2}{2a^2}\\&=1-2\cos^2\theta\end{aligned}$$

$\cos 2\theta=-\cos(\pi-2\theta)=2\cos^2\theta-1$

정답 ⑤

(7번)

문제에서 주어진 식을 일반화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}&=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{120}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)&=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{121}}\\&=\frac{10}{11}\end{aligned}$$

정답 ②

(8번)

$$\sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{1}(2k+1)\left(\frac{1}{1}\right)+\sum_{k=1}^{2}(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{3}(2k+1)\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+\sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{20}n(n+2)\times\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{20}(n+2)$$

$$=250$$

정답 ①

(9번)

$$\sum_{k=n}^{2n}a_k=\frac{(n+1)(a_{2n}+a_n)}{2}=0$$

$a_n+a_{2n}=0\ (\because\ n+1\neq 0) \quad \rightarrow \quad 4032=(3n-2)d$

$(\because\ a_1=-2016)$

$4032=2^7\times 3^2\times 7$

$(3n-2,\ d)$의 가능한 순서쌍은 다음과 같다.

$(1,4032),\ (4,1008),\ (7,576),\ (16,252),\ (28,144),$
$(64,63),\ (112,36),\ (448,9)$

모든 d의 합은 6120이다. 따라서 6120을 1000으로 나눈 나머지는 120

정답 120

(10번)

$x=c$에서 연속이므로 $\lim_{x\to c}\dfrac{x^2-a}{\sqrt{x^2+b}-\sqrt{c^2+b}}=4c$이다. 또한 (분모)→0이므로 분자 역시 0으로 가기에 $a=c^2$이며, 정리하면 $2\sqrt{c^2+b}=4c$이므로 $b=3c^2$이다. ($\sqrt{c^2+b}\ge 0$ 이므로 $c\ge 0$이다.)

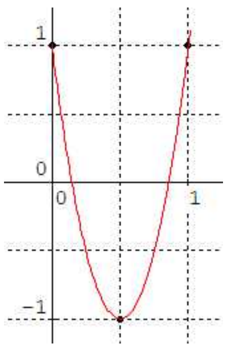
그러므로 $a+b+c=4c^2+c$이며, 정리하면 아래로 볼록이고 축이 $c=-\dfrac{1}{8}$인 이차함수이므로 $c=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

정답 ①

(11번)

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$P'(x)=3ax^2+2bx+c \quad\to\quad \begin{aligned}&P'(0)=c\\&P'(1)=3a+2b+c\\&P'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}a+b+c\end{aligned}$$



$a=\dfrac{2}{3}P'(1)+\dfrac{2}{3}P'(0)-\dfrac{4}{3}P'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$P'(0)=P'(1)=1$, $P'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$일 때 a는 최댓값 $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$을 갖는다.

정답 ⑤

(12번)

$y=x^2-8x+17 \quad\to\quad y'=2x-8$

$y=(2t-8)(x-t)+t^2-8t+17$

위의 식을 통해 Q의 y좌표는 $y=-t^2+17$, R의 y좌표는 $y=t^2-8t+17$임을 알 수 있다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}t(-2t^2+8t)\\&=-t^3+4t^2\end{aligned}$$

$S'(t)=-3t^2+8t$

따라서 $t=\dfrac{8}{3}$일 때 극솟값, 즉 최솟값을 갖는다.

정답 ⑤

(13번)

$f'(x)=(x+1)^k x^l (x-1)^m$에서 도함수의 부호와 함수의 증감이 다음과 같아야 함을 알 수 있다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		0	+	0	−	0	+
$f(x)$			↗	극대	↘		↗

따라서 l과 m은 홀수라는 것을 파악할 수 있다.
$1\le k<l<m\le 10$을 만족하는 경우는 다음 두 가지 경우로 나누어진다.

case 1) k,l,m이 모두 홀수인 경우
10가지

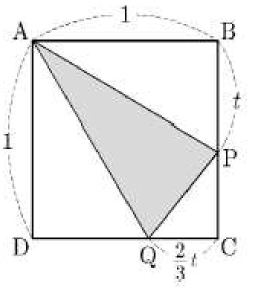
case 2) k가 짝수, l,m가 홀수인 경우
$k=2 \quad\to\quad$ 6가지
$k=4 \quad\to\quad$ 3가지
$k=6 \quad\to\quad$ 1가지

따라서 구하는 모든 순서쌍의 개수는 20

정답 20

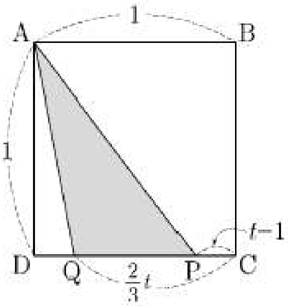
(14번)

1) $0 \le t \le 1$



$$f(t)=1-\left\{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t\cdot(1-t)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}t\right)\right\}$$
$$=\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ \ (0 \le t \le 1)$$

2) $1 < t \le \frac{3}{2}$



$$f(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{t}{6}$$

ㄱ (거짓)

$$\lim_{t\to1-0}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\lim_{t\to1+0}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=-\frac{1}{6}$$
따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ (참)

$0<t<1 \quad \to \quad f'(t)=\frac{2}{3}t-\frac{1}{2}$

따라서 $t=\frac{3}{4}$에서 함수 $f(t)$는 극솟값을 갖는다.

ㄷ (참)

함수 $f(t)$가 $t=1$에서 연속이고, $t=1$를 기준으로 $f'(t)$의 부호가 양에서 음으로 변하므로 $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다.

정답 ④

(15번)

$$g(x)=\int_0^x |f(t)-2t|\,dt$$
$$g'(x)=|f(x)-2x|$$

이때, 실수 전체에서 미분가능하기 위해서는 모든 x에서 $f(x)-2x \ge 0$ 이어야 한다. 따라서 $f(1)-2 \ge 0$, 즉 $f(1) \ge 2$

정답 ②

(16번)

실수 t에 대하여 점 (t, t^3)에서 곡선 $y=x^3$에 접하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$y=3t^2(x-t)+t^3=3t^2x-2t^3$

$$x^3=3t^2x-2t^3 \quad \to \quad x^3-3t^2x+2t^3=0$$
$$(x-t)^2(x+2t)=0$$

따라서 해당 직선이 곡선 $y=x^3$과 만나는 또 다른 점의 x좌표는 $-2t$이다. 해당 정리를 다시 한 번 사용하면 점 B의 x좌표는 $-2a$이고 점 C의 x좌표는 $4a$임을 알 수 있다. 문제에서 요구하는
넓이의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\left|\int_{-2a}^{4a}(x+2a)^2(x-4a)dx\right|}{\left|\int_{a}^{-2a}(x-a)^2(x+2a)dx\right|}=16$$

정답 ③

(17번)

1) $m=0,\ n=2$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_0(x)P_2(x)dx &= \int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx\\ &=2\int_0^1(x^2+b)dx\\ &=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_0^1\\ &=\frac{2}{3}+2b\\ &=0\\ &\rightarrow \qquad b=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2) $m=1,\ n=2$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)dx &= \int_{-1}^{1}\left(x^3+ax^2-\frac{1}{3}x\right)dx\\ &=2\int_0^1(ax^2)dx\\ &=2\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^1\\ &=\frac{2}{3}a\\ &=0\\ &\rightarrow \qquad a=0\end{aligned}$$

위의 두 과정을 거친 결과 $P_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$이라는 사실을 알 수 있다. 이제 본격적으로 $P_3(x)$를 구해보자. 실수 $c,\ d,\ e$에 대하여 $P_3(x)=x^3+cx^2+dx+e$라고 하자.

1) $m=0,\ n=3$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_0(x)P_3(x)dx &= \int_{-1}^{1}(x^3+cx^2+dx+e)dx\\ &=2\int_0^1(cx^2+e)dx\\ &=2\left[\frac{1}{3}cx^3+ex\right]_0^1\\ &=\frac{2}{3}c+2e\\ &=0\\ &\rightarrow \qquad e=-\frac{1}{3}c\end{aligned}$$

2) $m=1,\ n=3$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_1(x)P_3(x)dx &= \int_{-1}^{1}\left(x^4+cx^3+dx^2-\frac{1}{3}cx\right)dx\\ &=2\int_0^1(x^4+dx^2)dx\\ &=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}dx^3\right]_0^1\\ &=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}d\\ &=0\\ &\rightarrow \qquad d=-\frac{3}{5}\end{aligned}$$

3) $m=2,\ n=3$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_2(x)P_3(x)dx &= \int_{-1}^{1}\left\{x^5+cx^4+\left(d-\frac{1}{3}\right)x^3-\frac{2}{3}cx^2-\frac{1}{3}dx+\frac{1}{9}c\right\}dx\\ &=2\int_0^1\left(cx^4-\frac{2}{3}cx^2+\frac{1}{9}c\right)dx\\ &=2\left[\frac{1}{5}cx^5-\frac{2}{9}cx^3+\frac{1}{9}cx\right]_0^1\\ &=\frac{8}{45}c\\ &=0\\ &\rightarrow \qquad c=0,\ e=0\end{aligned}$$

이를 토대로 정리하면 $P_3(x)=x^3-\dfrac{3}{5}x$라는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^1P_3(x)dx &= \int_0^1\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)dx\\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{10}x^2\right]_0^1\\ &=-\frac{1}{20}\end{aligned}$$

정답 ①

(18번)

직선 l의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 직선 l과 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 접하므로 이 두 점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 $f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이 성립한다.
그런데 $g(x)$는 1차함수이므로 다항식 $f(x)-g(x)$의 x^3과 x^2항의 계수는 $f(x)$와 같다. $f(x)-g(x)$의 x^3의 계수는 0이므로
근과 계수와의 관계에서 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 중근을 포함한 모든 근의 합은 $2(\alpha+\beta)=0$이다. 그러므로 $\beta=-\alpha$이다.
정리하면 다음과 같다.

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2$$
$$=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$$

$-2\alpha^2=-2 \quad \rightarrow \quad \alpha=-1,\ \beta=1\ (\because\ \alpha<\beta)$

$$f(x)-g(x)=x^4-2x^2+1$$

$$A=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx$$
$$=2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{16}{15}$$

따라서 $30A=32$

정답 32