제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

1. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(6)=3$이다. $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. [4점]
(2018학년도 사관학교 나형 28번)

2. $\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15} b$를 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]
(2013학년도 사관학교 문과 12번)

① $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

2. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$2^{4x}+a\cdot 2^{2x-1}+10>\frac{3}{4}a$$

를 만족시키는 자연수 a의 최댓값은? [3점]
(2011학년도 사관학교 문과 9번)

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

4. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=a^{2x},\ g(x)=a^{x+1}-2$$

가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를 $h(x)=|f(x)-g(x)|$ 라 하자. $y=h(x)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]
(2012학년도 사관학교 이과 24번/문과 24번)

<보 기>

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때 $y=h(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.

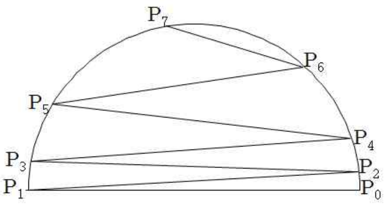
ㄴ. $a=4$일 때 $x_1<x_2<\frac{1}{2}$이면 $h(x_1)>h(x_2)$이다.

ㄷ. $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 a의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학1 - 2. 삼각함수

5. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원에서 지름의 양 끝점을 P_0, P_1이라 하자. 이 때, $\angle P_0P_1P_2 = 1^\circ$, $\angle P_1P_2P_3 = 2^\circ, \cdots$, $\angle P_{k-1}P_kP_{k+1} = (2^{k-1})^\circ$를 만족하는 원주 위의 점 $P_2, P_3, \cdots$, P_7에 대하여 선분 P_6P_7의 길이는? [4점]
(2002학년도 사관학교 이과 21번/문과 21번)



① $2\cos 32^\circ$ ② $2\sin 32^\circ$ ③ $2\cos 63^\circ$
④ $2\cos 64^\circ$ ⑤ $2\sin 64^\circ$

수학1 - 3. 수열

6. 모든 자연수 n 에 대하여 각 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$ 이

$$a_{n+1}{}^2 + 4a_n{}^2 + (a_1 - 2)^2 = 4a_{n+1}a_n$$
$$b_n = \log_{\sqrt{2}} a_n$$

와 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k = 72$ 가 성립하도록 하는 자연수 m 의 값은? [3점]

(2006학년도 사관학교 이과 10번/문과 20번)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

7. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3) = 10$
(나) $f(n+2) = 2f(n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$
(다) $f(n+10) = f(n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\sum_{n=1}^{100} f(n) = 2170$ 일 때, $f(100)$의 값을 구하여라. [4점]

(2012학년도 사관학교 문과 29번)

8. 첫째항이 -8인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = 2^{n+1}(n^2+n+2)\ (n \ge 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식에 의하여

$$a_n - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} = 2^n(n^2-n+2)\ (n \ge 2)$$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} - a_n - \frac{2}{n}a_n = \boxed{(가)}$$

이므로

$$a_{n+1} - \frac{n+2}{n}a_n = \boxed{(가)}$$

이다. $b_n = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면

$$b_{n+1} - b_n = \boxed{(나)}\ (n \ge 2)$$

이고, $b_2 = 0$이므로

$$b_n = \boxed{(다)}\ (n \ge 2)$$

이다.

⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(4)}{g(5)} + h(6)$의 값은? [4점]

(2014학년도 사관학교 A형 17번/B형 16번)

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

9. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$

(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}$ 의 값은? [3점]

(2015학년도 사관학교 A형 9번)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

수학2 - 2. 미분

10. 삼차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

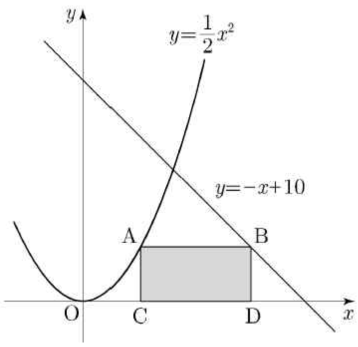
(가) 곡선 $y=f(x)+1$은 $x=1$에서 x축에 접한다.
(나) 곡선 $y=f(x)-1$은 $x=-1$에서 x축에 접한다.

이 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]
(2007학년도 사관학교 이과 28번)

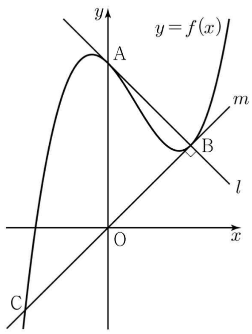
11. 좌표평면에서 직선 $y=mx+8$이 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값은? [3점]
(2011학년도 사관학교 이과 7번)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

12. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{A}\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+10$과 만나는 점을 B라 하고, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 직사각형 ACDB의 넓이가 최대일 때, $10t$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]
(2015학년도 사관학교 A형 28번)



13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.) [4점]
(2016학년도 사관학교 A형 21번)



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

수학2 - 3. 적분

14. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2$이고, $g'(x)=2x$이다. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때, $f(0)-g(0)$의 값들의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]
(2012학년도 사관학교 문과 30번)

15. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $g(1)=2$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ 이다.

이때 $\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}dx$의 값을 구하여라. [4점]
(2013학년도 사관학교 이과 30번/문과 30번)

16. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 $0 \le x < 4$에서

$$h(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 2) \\ f(x) & (2 \le x < 3) \\ g(x) & (3 \le x < 4) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=h(x-4)+k$ (k는 상수)이다.
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(다) $\int_0^4 h(x)dx=6$

$h\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]
(2020학년도 사관학교 나형 30번)

[빠른 정답]

1번: 64
2번: ②
3번: ②
4번: ③
5번: ③
6번: ①
7번: 32
8번: ③
9번: ③
10번: 26
11번: ③
12번: 25
13번: ②
14번: 28
15번: 18
16번: 21

[해설]

(1번)

n이 거듭제곱수인 경우를 관찰해 보자. n이 소수 m의 완전제곱수이면 $(m^2)^{\frac{4}{k}} = m^{\frac{8}{k}}$ 에서 k는 8의 양의 약수인 1, 2, 4, 8 일 때이고, 따라서 $f(n)=4$임을 알 수 있다. 이를 차례대로 적용하면 다음과 같다.

n이 세제곱수 $\rightarrow$ $4\times 3 = 12 = 2^2 \times 3$, 양의 약수의 개수 6
n이 네제곱수 $\rightarrow$ $4\times 4 = 16 = 2^4$, 양의 약수의 개수 5
n이 5제곱수 $\rightarrow$ $4\times 5 = 20 = 2^2\times 5$, 양의 약수의 개수 6
n이 6제곱수 $\rightarrow$ $4\times 6 = 24 = 2^3\times 3$, 양의 약수의 개수 8

따라서 $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값은 $2^6 = 64$이다.

정답 64

(2번)

$\log_{25}(a-b) = \log_9 a = \log_{15} b = k$라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$a-b = 25^k = 5^{2k}$$

$$a = 9^k = 3^{2k}$$

$$b = 15^k = 3^k \cdot 5^k$$

$(a-b)a = b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 + ab - a^2 = 0$

$a>0$이므로 위 식의 양변을 a^2으로 나누면 다음과 같다.

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$a>0,\ b>0 \quad \rightarrow \quad \frac{b}{a} > 0$

$\frac{b}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

정답 ②

(3번)

$2^{2x} = t\,(>0)$이라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$2^{4x} + a\cdot 2^{2x-1} + 10 > \frac{3}{4}a \quad \rightarrow \quad t^2 + \frac{a}{2}t + 10 - \frac{3}{4}a > 0$

함수 $f(t)$를 $f(t) = t^2 + \frac{a}{2}t + 10 - \frac{3}{4}a$ 라 하면 해당 함수의 대칭축이 $t = -\frac{a}{4}$, 즉 음수이므로 $f(0) \geq 0$이면 부등식이 성립한다. 따라서 $10 - \frac{3}{4}a \geq 0$, 즉 $a \leq \frac{40}{3}$ 이므로 조건에 만족하는 자연수 a의 최댓값은 13

정답 ②

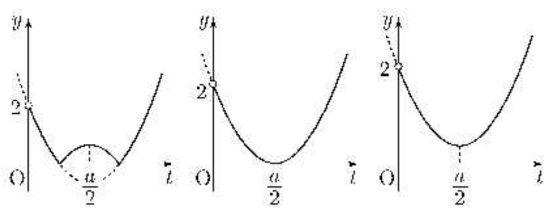
(4번)

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$f(x) - g(x) = a^{2x} - a^{x+1} + 2$

$a^x = t \quad \rightarrow \quad f(x) - g(x) = t^2 - at + 2$
판별식 $D = a^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{2}$
$(\because\ a>1)$

$y = t^2 - at + 2$는 대칭축이 $t = \frac{a}{2}$이고 y절편이 2인 이차함수이므로 a의 크기에 따라서 곡선 $y = |\,t^2 - at + 2\,|$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



$a > 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $a = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $1 < a < 2\sqrt{2}$

이때, $t = a^x$는 모든 실수에서 임의의 양수로의 일대일대응이고 $x_1 < x_2$에 대하여 $t_1 < t_2$를 만족함을 알 수 있다.

ㄱ (참)
$a = 2\sqrt{2}$일 때, $y = |\,t^2 - at + 2\,|$의 그래프는 x축과 한 점에서 접하므로 $y = h(x)$의 그래프도 x축과 한 점에서 만난다.

ㄴ (거짓)
$a = 4$일 때, $t^2 - 4t + 2 = 0$에서 $t = 2\pm\sqrt{2}$이므로
곡선 $y = |\,t^2 - at + 2\,|$의 그래프는 $0 < t < 2 - \sqrt{2}$에서

감소하고 $2-\sqrt{2}<t<2$에서 감소함을 알 수 잇다.

$x<\frac{1}{2}$일 때 $0<t<4^{\frac{1}{2}}=2$이므로 $h(x_1)$, $h(x_2)$의 대소를 비교할 수 없다.

ㄷ (참)
곡선 $y=t^2-at+2$의 그래프가 직선 $y=1$과 접할 때 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만남을 알 수 있다.

$t^2-at+2=1 \quad \rightarrow \quad t^2-at+1=0$

해당 방정식은 $a=2$일 때 중근을 가지므로 $a=2$일 때,
$y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나게 된다.

정답 ③

(5번)

원의 중심을 O라 두면 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2 배이고 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\angle P_0P_1P_2=1^o$, $\angle P_1P_2P_3=2^o$, $\angle P_2P_3P_4=(2^2)^\circ$,

$\cdots, \angle P_{k-1}P_kP_{k+1}=(2^{k-1})^\circ$

$\angle P_5P_6P_7=(2^{6-1})=32^\circ$, $\quad \angle P_6P_7P_8=64^\circ$

호 P_6P_7의 중심각의 크기를 x°라 두면 각 호의 중심각의 크기의 합은 다음과 같이 정리가 가능하다.

$2^\circ+4^\circ+8^\circ+16^\circ+32^\circ+64^\circ+x^\circ=180^\circ$

$x^\circ=54^\circ$이므로 호 P_6P_7의 원주각의 크기는 27°임을 알 수 있다.
그러므로 사인 법칙을 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{P_6P_7}{\sin 27^\circ}=2\times 1 \quad \rightarrow \quad P_6P_7=2\sin 27^\circ=2\cos 63^\circ$$

정답 ③

(6번)

$${a_{n+1}}^2+4{a_n}^2+(a_1-2)^2=4a_{n+1}a_n$$
$$\rightarrow \quad (a_{n+1}-2a_n)^2+(a_1-2)^2=0$$

모든 자연수 n에 대하여 각 항이 실수이므로
$a_{n+1}-2a_n=0$이고, 즉 $a_1-2=0$, $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$인 등비수열이 된다. 이를 정리하면 $a_n=2^n$이므로

$b_n=\log_{\sqrt{2}}2^n=2n$ 이다. 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{m}2k$$
$$=m(m+1)$$
$$=72$$

따라서 $m=8$

정답 ①

(7번)

$f(3)=f(1+2)=2f(1)=10 \quad \rightarrow \quad f(1)=5$

$$\sum_{n=1}^{5}f(2n-1)=5(1+2+2^2+2^3+2^4)$$
$$=5\times 31$$

$$\sum_{n=1}^{5}f(2n)=f(2)(1+2+2^2+2^3+2^4)$$
$$=31f(2)$$

$$\sum_{n=1}^{100}f(n)=10\times\sum_{n=1}^{10}f(n)$$
$$=10\times\sum_{n=1}^{5}\{f(2n-1)+f(2n)\}$$
$$=10\times\{f(2)+5\}\times 31$$
$$=2170$$

$f(2)=2$

$$f(100)=f(10)$$
$$=2^4f(2)$$
$$=32$$

정답 32

(8번)

$$a_{n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2^{n+1}(n^2+n+2)\ (n\geq 1)$$

해당 식에 n대신 $n-1$을 대입하면 다음과 같다.

$$a_n-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=2^n(n^2-n+2)$$

두 식을 빼면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n}a_n=\boxed{2^n(n^2+3n+2)}\ (\ n\geq 2)$$
$$a_{n+1}-\frac{n+2}{n}a_n=2^n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\frac{a_n}{n(n+1)}=2^n$$

이때, $b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면 다음과 같다.

$$b_{n+1}-b_n=\boxed{2^n}\ (n\geq 2)$$
$$b_2=0$$
$$\begin{aligned}b_n&=b_2+\sum_{k=2}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\\&=\sum_{k=2}^{n-1}2^k\\&=\frac{4(2^{n-2}-1)}{2-1}\\&=\boxed{2^n-4}\end{aligned}$$

$$f(n)=2^n(n^2+3n+2)$$
$$g(n)=2^n$$
$$h(n)=2^n-4$$

따라서 $\frac{f(4)}{g(5)}+h(6)=\frac{2^4\cdot 30}{2^5}+(2^6-4)=75$

정답 ③

(9번)

$$\lim_{x\to INF}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1,\ \lim_{x\to INF}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$$

함수 $f(x)-2g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, 함수 $f(x)+3g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\{f(x)+3g(x)\}-\{f(x)-2g(x)\}=5g(x)$$

위의 식을 통해 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{5}$인 삼차함수라는 것을 알 수 있다. 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to INF}\frac{g(x)}{x^3}=\frac{1}{5}$$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to INF}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}&=\lim_{x\to INF}\left\{\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-\frac{2g(x)}{x^3}\right\}\\&=\lim_{x\to INF}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-2\times\lim_{x\to INF}\frac{g(x)}{x^3}\\&=1-\frac{2}{5}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

정답 ③

(10번)

(가): $f(1)=-1,\ f'(1)=0$
(나): $f(-1)=1,\ f'(-1)=0$

$f'(x)=a(x-1)(x+1)$
$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$ (C는 적분상수)

$$f(1)=-\frac{2}{3}a+C=-1$$
$$f(-1)=\frac{2}{3}a+C=1$$
$$C=0,\ a=\frac{3}{2}$$

$$f(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

따라서 $f(4)=32-6=26$

정답 26

(11번)

두 직선과 곡선은 연립시킨 함수를 $f(x)$라고 하면 $f(x)=x^3+2x^2-(3+m)x-8$이다. 해당 함수가 서로 다른 두 실근을 가진다고 했으므로 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha\neq\beta)$으로도 둘 수 있다. 이를 토대로 근과 계수의 정리를 적용하면 다음과 같다.

- 세 근의 합: $2\alpha+\beta=-2$
- 세 근중 두 근의 곱의 합: $\alpha^2+2\alpha\beta=-3-m$
- 세 근의 곱: $\alpha^2\beta=8$

위에서 도출된 식들을 연립하여 계산하면 $\alpha=-2,\ \beta=2$이다.
$m=-\alpha^2-2\alpha\beta-3$이므로 따라서 $m=1$

정답 ③

(12번)

$$\frac{1}{2}x^2 = -x+10 \quad \rightarrow \quad x^2+2x-20=0$$
$$x = -1 \pm \sqrt{21}$$

위의 식에 근거하여 보았을 때, 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=-x+10$는 $x=-1\pm\sqrt{21}$일 때 만나므로 t의 범위는 $0<t<-1+\sqrt{21}$이다. 점 A, B의 y좌표가 같으므로 $-x+10=\frac{1}{2}t^2$에서 $x=10-\frac{1}{2}t^2$이고, 그러므로 점 B의 x좌표는 $10-\frac{1}{2}t^2$이다.

$$\overline{\mathrm{AC}} = \left(10-\frac{1}{2}t^2\right)-t,\ \overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}t^2$$

직사각형 ACDB의 넓이를 $f(t)$라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\begin{aligned} f(t) &= \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{CD}} \\ &= \left(10-\frac{1}{2}t^2-t\right)\times\frac{1}{2}t^2 \\ &= -\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^3+5t^2 \ (0<t<-1+\sqrt{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= -t^3-\frac{3}{2}t^2+10t \\ &= -\frac{t}{2}(2t-5)(t+4) \ (0<t<-1+\sqrt{21}) \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{5}{2}$일 때, 극대이자 최대이므로

$$10t = 10\times\frac{5}{2} = 25$$

정답 25

(13번)

점 B, C의 x좌표를 각각 b, c라 하자. 그러면 직선 m과 곡선 $y=f(x)$가 두 점 B, C에서 만나고 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$f(x)-x=(x-b)^2(x-c)$$

점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 좌표는 (b, b)이며, 직선 l은 점 B를 지나며 직선 $y=x$와 수직이므로 기울기가 -1이다. 따라서 직선 l의 방정식은 $y=-x+2b$이다. 점 A는 직선 l의 y절편이므로 점 A의 좌표는 $(0, 2b)$, 즉 $f(0)=2b$이다.
문제의 조건에서 $f(0)>0$이라고 했으므로 $b>0$이다.

$$f(x)-x=(x-b)^2(x-c)$$
$$f(0) = -b^2c = 2b \quad \rightarrow \quad bc=-2 \ (\because\ b>0)$$

직선 l은 점 A에서 곡선 $y=f(x)$와 접하므로 $f'(0)=-1$이다.
다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

$$f(x)-x=(x-b)^2(x-c)$$
$$f'(x)-1=2(x-b)(x-c)+(x-b)^2$$
$$f'(0)-1=2bc+b^2=-2$$

$$b^2=2 \quad \rightarrow \quad b=\sqrt{2} \ (\because\ b>0)$$
$$c=-\sqrt{2}$$

$$f'(c)-1=(c-b)^2=(-2\sqrt{2})^2=8$$

구하는 값이 $f'(c)$이므로 따라서 $f'(c)=9$

정답 ②

(14번)

$$f'(x)-g'(x)=6x^2-2x$$
$$f(x)-g(x)=2x^3-x^2+C \ (C\text{는 적분상수})$$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나므로, 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가짐을 알 수 있다. 함수 $f(x)-g(x)$는 삼차함수이므로 극대점에서 접하거나 극소점에서 접하는 형태의 그래프여야 한다.

$$f'(x)-g'(x)=2x(3x-1)=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}$$

$$f(0)-g(0)=C=0 \text{ 또는 } f\left(\frac{1}{3}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}-\frac{1}{9}+C=0$$

$$C=0 \text{ 또는 } C=\frac{1}{27}$$

따라서 $\frac{q}{p}=0+\frac{1}{27}=\frac{1}{27}$이므로 $p+q=28$

정답 28

(15번)

1) $x=0$ 대입
$f(1)=h(y)$, y에 x를 대입하면 $h(x)=f(1)$, 즉 $h(x)=1$

2) $y=1$ 대입
$f(x+1)=g(1)x+h(x+1)$, 여기에 $g(1)=2$, $h(x)=1$임을 이용하면 $f(x+1)=2x+1$, 즉 $f(x)=2x-1$

3) $x=1$ 대입
$f(y+1)=g(y)+h(1+y)$, 여기에 $h(x)=1$, $f(x)=2x-1$ 임을 활용하면 $g(x)=2x$

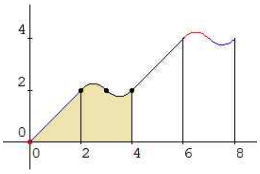
$f(x)=2x-1$, $g(x)=2x$, $h(x)=1$

$$\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}dx = \int_0^3 (4x)dx = 18$$

정답 18

(16번)

문제의 조건을 만족시키기 위해서는 함수 $h(x)$가 다음과 같은 개형이어야 한다.



$$f(x)=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+b$$

$$f'(x)=2a\left(x-\frac{5}{2}\right) \quad \rightarrow \quad f'(2)=2a\left(2-\frac{5}{2}\right)=-a=1$$

$$f(2)=a\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+b=2,$$

$$b=\frac{9}{4}$$

$$f(x)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

$$g(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$k=2$

$$h\left(\frac{13}{2}\right)=h\left(\frac{5}{2}\right)+2=f\left(\frac{5}{2}\right)+2=\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}=\frac{q}{p}$$

그러므로 $p+q=4+17=21$

정답 21