제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

1. 연립방정식

$$\begin{cases} \log_x y = \log_3 8 \\ 4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, $\alpha>1$이다.) [3점]
(2016학년도 사관학교 A형 10번)

① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 1 보다 큰 세 실수 a, b, c 에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^2 b^3 = 64 \\ 3(\log_a c)^2 - 2(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

이 성립하도록 하는 두 수 a와 b에 대하여 $\log_2 ab$ 의 값은? [4점]
(2006학년도 사관학교 문과 18번)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. 자연수 n에 대하여 $2^n \leqq x \leqq 2^{n+10}$에서 $|\log_2 x - 2n|$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [4점]
(2009학년도 사관학교 문과 30번)

4. 두 지수함수 $f(x) = 9^x + a$, $g(x) = b \cdot 3^x + 2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표가 $x=\log_3 2$, $x=\log_3 k$ (단, $k>2$) 일 때, <보기>에서 실수 a, b에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]
(2006학년도 사관학교 이과 23번/문과 23번)

<보 기>

ㄱ. $b^2 = 4a - 8$
ㄴ. $a = 2b - 2$
ㄷ. $a > 6$

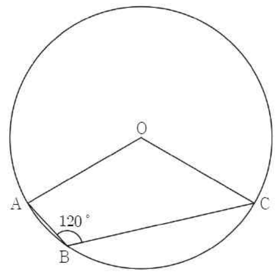
① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학1 - 2. 삼각함수

5. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle ABC = 120^\circ,\ \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

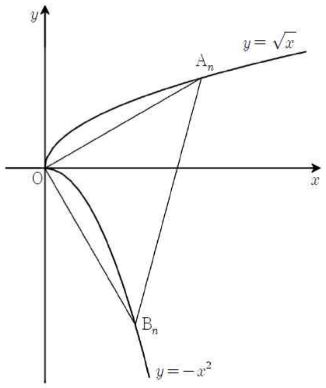
일 때, 사각형 $OABC$의 넓이는? [4점]
(2021학년도 사관학교 가형 15번)



① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

수학1 - 3. 수열

6. 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}_n(n^2,\ n)$과 곡선 $y=-x^2\ (x\geq 0)$ 위의 점 B_n이 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}$을 만족시킨다. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{2S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]
(2021학년도 사관학교 가형 27번)



7. 첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 하자. $\sum_{k=1}^{20}b_k$의 값을 구하여라. [4점]
(2014학년도 사관학교 A형 29번)

8. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}\leq\frac{(2n)!}{2^n}\quad\cdots\ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{{}_{2}\mathrm{P}_1}{2^1}=1$이고, (우변)$=\boxed{(가)}$ 이므로

$(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}\leq\frac{(2m)!}{2^m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!}\\&\leq\frac{(2m)!}{2^m}+\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!}\\&=\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{\boxed{(다)}}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}\\&<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}\leq\frac{(2n)!}{2^n}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(2)}{g(4)}$의 값은? [4점]
(2021학년도 사관학교 가형 17번/나형 18번)

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

9. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3-2x^2+3x-4}=1\ ,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=4$$

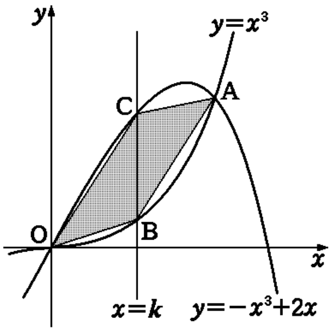
이 성립하고, 극한 $\lim_{x\to2}\frac{13f(x)}{x^2-3x+2}$ 이 α 로 수렴할 때, 상수 α 의 값을 구하시오. [3점]

(2006학년도 사관학교 이과 29번)

수학2 - 2. 미분

10. 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^3+2x$의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 A라 하고, 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^3+2x$와 직선 $x=k$ $(0<k<1)$의 교점을 각각 B, C라 하자. 사각형 OBAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 실수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

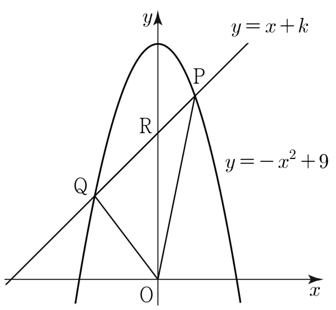
(2014학년도 사관학교 A형 19번)



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 그림과 같이 직선 $y=x+k\ (3<k<9)$가 곡선 $y=-x^2+9$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, y축과 만나는 점을 R라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [4점]

(2017학년도 사관학교 나형 20번)



<보 기>

ㄱ. 선분 PQ의 중점의 x좌표는 $-\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $k=7$일 때, 삼각형 ORQ의 넓이는 삼각형 OPR의 넓이의 2배이다.

ㄷ. 삼각형 OPQ의 넓이는 $k=6$일 때 최대이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq a) \\ 2a-f(x) & (f(x)<a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.

(나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\frac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은? [4점]

(2020학년도 사관학교 나형 20번)

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

13. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

(2021학년도 사관학교 나형 30번)

수학2 - 3. 적분

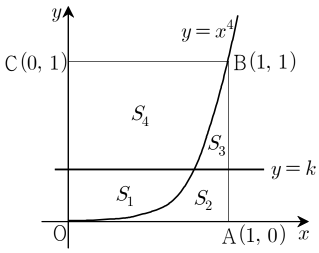
14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=ax^2$ $(0 \le x < 2)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이다.

$\int_1^7 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]
(2016학년도 사관학교 A형 17번)

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

15. 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(1,1)$, $\mathrm{C}(0,1)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y=x^4$과 직선 $y=k$ $(0<k<1)$에 의해 정사각형 OABC를 네 영역 으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값은? [4점]
(2010학년도 사관학교 이과 16번)



① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

16. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 1$에서 $f(x)=x^2+1$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이다.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n} f(x)dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, $a_7=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]
(2014학년도 사관학교 A형 28번)

[빠른 정답]

1번: ③
2번: ④
3번: 75
4번: ③
5번: ⑤
6번: 395
7번: 230
8번: ②
9번: 65
10번: ⑤
11번: ③
12번: ②
13번: 36
14번: ③
15번: ③
16번: 29

[해설]

(1번)

$\log_x y = \log_3 8 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\log_3 y}{\log_3 x} = 3\log_3 2$

$$\begin{aligned}\log_3 y &= 3\log_3 2 \cdot \log_3 x \\ &= 3\log_3 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 3} \\ &= 3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 x\end{aligned}$$

$4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3 \quad \rightarrow \quad 4(\log_2 x)\left\{3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 x\right\} = 3$

$$(\log_2 x)^2 = \frac{1}{4(\log_3 2)^2} = \left(\frac{\log_2 3}{4}\right)^2$$

위의 방정식의 해에 대하여 $\alpha > 1$이므로, $\log_2 \alpha > 0$이다. 그러므로 $\log_2 x = \dfrac{\log_2 3}{2} = \log_2 \sqrt{3}$ 이고, 따라서 $x = \sqrt{3}$, 즉 $\alpha = \sqrt{3}$ 이다.
$x = \sqrt{3}$ 을 위의 식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\log_3 y &= 3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \\ &= \frac{3}{2}\log_3 2 \\ &= \log_3 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식에 따르면 $y = 2\sqrt{2}$, 즉 $\beta = 2\sqrt{2}$ 이다. 따라서
$\alpha\beta = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

정답 ③

(2번)

$a^2b^3 = 64 \quad \rightarrow \quad 2\log_2 a + 3\log_2 b = 6$

$(\log_a c)^2 - 2(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c)$

$$\begin{aligned}\rightarrow \quad & 3\frac{\log_a c}{\log_b c} - 2\frac{\log_b c}{\log_a c} = -1 \\ & 3\frac{\log_c b}{\log_c a} - 2\frac{\log_c a}{\log_c b} = -1 \\ & 3\frac{\log_2 b}{\log_2 a} - 2\frac{\log_2 a}{\log_2 b} = -1 \\ & 3(\log_2 b)^2 - 2(\log_2 a)^2 = -\log_2 a \log_2 b\end{aligned}$$

$$3(\log_2 b)^2 - 2\left\{3 - \frac{3}{2}log_2 b\right\}^2 = -\left\{3 - \frac{3}{2}log_2 b\right\}\log_2 b$$

$\log_2 b = x$라고 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$3x^2 - 2(3 - \frac{3}{2}x)^2 = -3x + \frac{3}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \quad & x^2 - 7x + 6 = 0 \\ & x = 1 \text{ or } 6\end{aligned}$$

$x = 1$, 즉, $\log_2 b = 1$이면 다음과 같다.

$$\log_2 a = 3 - \frac{3}{2}log_2 b = \frac{3}{2}$$

$x = 6$, 즉, $\log_2 b = 6$이면 다음과 같다.

$$\log_2 a = 3 - \frac{3}{2}log_2 b = -6$$

문제의 조건에서 a, b, c 가 1보다 크다고 했으므로
$\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c$ 역시 0보다 크다. 그러므로 모순이다.

$\log_2 a = \dfrac{3}{2}$, $\log_2 b = 1$

$\log_2 ab = \log_2 a + \log_2 b = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$

정답 ④

(3번)

부등식에 밑을 2로 하는 로그를 취해주면 다음과 같다.

$n \leqq \log_2 x \leqq n+10 \quad \rightarrow \quad -n \leqq \log_2 x - 2n \leqq 10-n$
$n < 5$일 때는 $10-n$의 절댓값이 더 크므로 $a_n = 10-n$
$n = 5$일 때는 $-n$과 $10-n$의 절댓값이 같으므로 $a_n = 5$
$n > 5$일 때는 $-n$의 절댓값이 더 크므로 $a_n = n$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 9+8+7+6+5+6+7+8+9+10 = 75$$

정답 75

(4번)

ㄱ (거짓)
$f(x) = 9^x + a$, $g(x) = b \cdot 3^x + 2$ 가 만나는 교점은 연립하면 다음과
같다.

$9^x + a = b \cdot 3^x + 2 \quad \rightarrow \quad \log_3 2, \ \log_3 k$

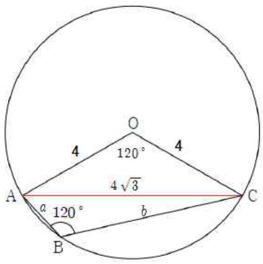
$3^x = t\ (t>0)$ 라고 하면 방정식 $t^2 - bt + (a-2) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 2, k 이므로, 판별식 $D = b^2 - 4(a-2) > 0$ 에서 $b^2 > 4a - 8$ 이다.

ㄴ (참)
근과 계수와의 관계에 의하여 두 근의 합은 $2 + k = b$, 두 근의 곱은 $2k = a - 2$이다. 두 식에서 k 를 소거하면 $a = 2b - 2$ 이다.

ㄷ (참)
문제의 조건에서 $k > 2$ 이므로 $k = \dfrac{a-2}{2} > 2$ 에서 $a > 6$ 이다.

정답 ③

(5번)



사인법칙과 코사인법칙을 이용하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\overline{AC} = 8 \times \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= (a+b)^2 - ab \\ &= 48\end{aligned}$$

$$ab = (2\sqrt{15})^2 - (4\sqrt{3})^2 = 12$$

따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}(4 \times 4 + ab)\sin 120^\circ = 7\sqrt{3}$

정답 ⑤

(6번)

직삼각형 OA_nB_n은 직각이등변삼각형이므로 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_n = \frac{1}{2}(n^2 + n^4)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} \frac{2S_n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{10} (1 + n^2) \\ &= 10 + \frac{1}{6}(10)(11)(21) \\ &= 395\end{aligned}$$

정답 395

(7번)

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열이므로 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\begin{aligned}b_{2k} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \\ &= 3 + 3 + \cdots + 3 \\ &= 3k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{2k-1} &= a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \cdots + (-a_{2k-2} + a_{2k-1}) \\ &= 20 + (-3) + (-3) + \cdots + (-3) \\ &= 23 - 3k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} b_k &= \sum_{k=1}^{10} b_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} b_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (b_{2k-1} + b_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} 23 \\ &= 230\end{aligned}$$

정답 230

(8번)

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= \dfrac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1} = 1$, (우변)$= \dfrac{2!}{2^1} = 1$ 이므로 $(*)$이 성립한다.
(ii) $n = m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2m)!}{2^m}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}+\frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{\mathrm{m+1}}}{2^{m+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$
$$\le\frac{(2m)!}{2^m}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$
$$=\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{(2m+1)(m+1)}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}$$
$$<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다
.

$p=1,\ f(m)=(2m+2)!,\ g(m)=(2m+1)(m+1)$

따라서 $p+\dfrac{f(2)}{g(1)}=1+\dfrac{6!}{9\times5}\ =1+16=17$

정답 ②

(9번)

$$\lim_{x\to INF}\frac{f(x)}{x^3-2x^2+3x-4}=1$$
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)}=4$$
$$\lim_{x\to2}\frac{13f(x)}{(x-1)(x-2)}=\alpha$$

위의 식들에 근거하여 추론하면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1 인 삼차식이며 $f(1)=0$,$f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$
라고 두면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x+a)}{(x-1)(x-2)}=4\quad\rightarrow\quad a=3$$
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$$

$$\alpha=\lim_{x\to2}\frac{13(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=13\cdot5=65$$

정답 65

(10번)

$x^3=-x^3+2x\quad\rightarrow\quad x(x-1)(x+1)=0$

위의 식에 의하여 점 A의 x좌표는 1이다.
점 O와 점 A에서 직선 $x=k$에 이르는 거리를 각각 a, b라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

(사각형 OBAC의 넓이)=(△OBC의 넓이)+(△ABC의 넓이)
$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times a+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times b$$
$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\ \ (\because\ a+b=1)$$
$$=\frac{1}{2}\{(-k^3+2k)-k^3\}$$
$$=-k^3+k\ \ (0<k<1)$$

$f(k)=-k^3+k(0<k<1)$라고 하자. 도함수는
$f'(k)=-3k^2+1$이고
$f'(k)=0$에서 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이며, $f(k)$는 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때, 극대이자 최대이다. 따라서 구하는 k의 값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

정답 ⑤

(11번)

ㄱ. (참)
직선 $y=x+k$와 동일한 기울기의 접선을 곡선 $y=-x^2+9$에서 구하면 $y=-2x\quad\rightarrow\quad x=-\dfrac{1}{2}$일 때 기울기가 1이므로 이차함수의 대칭성 성질에 의하여 선분 PQ의 중점의 x좌표는 $x=-\dfrac{1}{2}$이다.

ㄴ. (참)
삼각형 ORQ의 넓이와 삼각형 OPR의 넓이의 차는 결국 점 Q의 x좌표와 점 P의 x좌표의 차이와 같다. 둘 다 밑변이 선분 OR인 삼각형이기 때문에 삼각형의 높이, 즉 x좌표의 값만 알면 그 차이를 알 수 있다.
k의 값이 7일 경우 해당 직선 $y=x+7$과 곡선 $y=-x^2+9$의 교점을 구하면 점 P와 점 Q의 x좌표의 값을 구할 수 있다. 연립하면 $(x+2)(x-1)=0$이고, 이에 따라 점 Q의 x좌표는 -2, 점 P의 x좌표는 1이다. 점 Q의 x좌표, 즉 삼각형 ORQ의 높이가 삼각형 OPR의 높이보다 2배 더 크다.

ㄷ. (거짓)
삼각형 OPQ의 넓이는 삼각형 ORQ의 넓이와 삼각형 OPR의 넓이의 합과 같다. ㄴ에서 구한 방식과 똑같은 방식으로 두 삼각형의 넓이를 구하자. 먼저 직선 $y=x+k$와 $y=-x^2+9$를 연립한 뒤 두 점의 x좌표를 구하자. 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P} \quad \rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{37-4k}-1}{2}$$

$$\mathrm{Q} \quad \rightarrow \quad x=\frac{-\sqrt{37-4k}-1}{2}$$

이를 토대로 삼각형 OPQ의 넓이를 구하면 다음과 같다.

$$\triangle\mathrm{OPQ} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\times k\times\frac{\sqrt{37-4k}-1}{2}+\frac{1}{2}\times k\times\frac{\sqrt{37-4k}+1}{2} = \frac{\sqrt{37k^2-4k^3}}{2}$$

해당식이 최대가 되기 위해서는 $\frac{\sqrt{37k^2-4k^3}}{2}$가 최대가 되어야 하는데, 이는 루트 안의 식, 즉 $37k^2-4k^3$이 최대가 되어야 한다. 함수 $f(k)$를 $f(k)=37k^2-4k^3$라고 하면 $3<k<9$에서 함수 $f(k)$의 최댓값을 구하면 된다.
$f(k)=37k^2-4k^3=-4k^2\left(k-\frac{37}{4}\right)$이고, $f(k)$는 $k=\frac{37}{6}$에서 극댓값을 갖는다. 범위가 $3<k<9$이므로 $f(k)$는 $k=\frac{37}{6}$에서 최댓값을 갖는다.

정답 ③

(12번)

함수 $g(x)$는 $y=a$에 대하여 선대칭이며, 오직 $x=4$에서만 미분가능하지 않다는 점을 토대로 $f(4)=a$임을 알 수 있다. 또한 $y=a$를 기준으로 오직 한점에서만 미분가능하지 않다는 점을 통해 $f(x)=(x-b)^3(x-4)+a\ (b\neq 4)$임을 알 수 있다.
(나)조건은 함수 $g(x)$가 $x=\frac{7}{2}$에서 극댓값을, 즉 함수 $f(x)$가 $x=\frac{7}{2}$에서 극솟값을 가짐을 의미한다.

$$g\left(\frac{7}{2}\right)-f\left(\frac{7}{2}\right)=2a-f\left(\frac{7}{2}\right)$$
$$=2a \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{7}{2}\right)=0$$

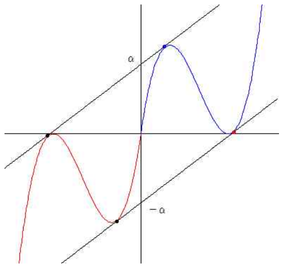
$$f(x)=(x-2)^3(x-4)+\frac{27}{16}\ \left(\because f\left(\frac{7}{2}\right)=0\right)$$

따라서 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$

정답 ②

(13번)

곡선 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$x>0$일 때, $f'(x)=3x^2-4ax+a^2=4$인 점을 $x=b,\ c$ $(b<c)$라 하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$b+c=\frac{4a}{3},\ bc=\frac{a^2-4}{3},\ \frac{c(c-a)^2+b(-b+a)^2}{c+b}=4$$

$$c^2+b^2=(c+b)^2-2bc = \frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}$$

$$c^3+b^3=(c+b)^3-3bc(b+c) = \frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a$$

$$c^3+b^3-2a(c^2+b^2)+a^2(c+b)=4(c+b)$$

$$\left(\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a\right)-2a\left(\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}\right)+\frac{4}{3}a^3=\frac{16}{3}a$$

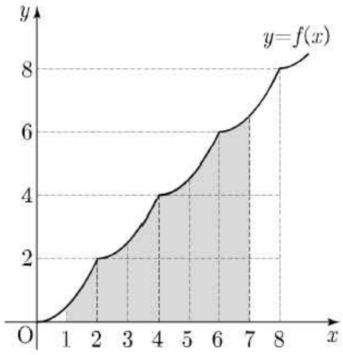
$a=6$

따라서 $f'(0)=a^2=36$

정답 36

(14번)

조건 (가)에 의하여 $f(0)=0$, 조건 (나)에 의하여 $f(2)=f(0)+2=2$임을 알 수 있다. 또한, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$에서 $4a=2$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다.



함수 $f(x)$가 연속함수이므로 임의의 실수 n에 대하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_{n+2}^{n+4} f(x)dx &= \int_{n}^{n+2} f(x+2)dx \\ &= \int_{n}^{n+2} \{f(x)+2\}dx \\ &= \int_{n}^{n+2} f(x)dx+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{7} f(x)dx &= \int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{7} f(x)dx \\ &= \int_{1}^{3} f(x)dx+\left(\int_{1}^{3} f(x)dx+4\right)+\left(\int_{1}^{3} f(x)dx+8\right) \\ &= 3\int_{1}^{3} f(x)dx+12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3} f(x)dx &= \int_{0}^{2} \frac{1}{2}x^2 dx+2 \\ &= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2+2 \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\int_{1}^{7} f(x)dx = 3\times\frac{10}{3}+12=22$

정답 ③

(15번)

$S_2+S_3=\frac{1}{5}$

$S_1+S_4=\frac{4}{5}$

$S_1+S_2=k$

$S_3+S_4=1-k$

$|S_1-S_3|=\left|k-\frac{1}{5}\right|$

$|S_2-S_4|=\left|k-\frac{4}{5}\right|$

$$|S_1-S_3|+|S_2-S_4| = \left|k-\frac{1}{5}\right|+\left|k-\frac{4}{5}\right|$$

따라서 $\frac{1}{5}<k<\frac{4}{5}$일 때 최솟값 $\frac{3}{5}$을 갖는다.

정답 ③

(16번)

(나)와 (다) 조건을 통해 $f(x)$는 $x=0$에 대하여 선대칭이고 $x=1$에 대해서도 선대칭임을 알 수 있다. 이를 동시에 충족시키기 위해서는 결국 $f(x)$가 일정한 주기를 이루어야 한다.
조건 (가)에 따르면 $0\le x\le 1$에서 $f(x)=x^2+1$이라고 했으므로 조건들을 정리하여 보면 다음과 같다.

$-1\le x\le 1 \quad\rightarrow\quad f(x)=x^2+1$
$1\le x\le 3 \quad\rightarrow\quad f(x)=(x-2)^2+1$
$3\le x\le 5 \quad\rightarrow\quad f(x)=(x-4)^2+1$
$\vdots$
$2k-1\le x\le 2k+1 \quad\rightarrow\quad f(x)=(x-2k)^2+1$
(k는 정수)

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n} f(x)dx$인 점을 이용하면 다음과 같다.

$$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7=\int_{-7}^{7} f(x)dx$$
$$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6=\int_{-6}^{6} f(x)dx$$

위에서 아래식을 빼주면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
7a_7 &= \int_{-7}^{7} f(x)dx - \int_{-6}^{6} f(x)dx \\
&= \int_{-7}^{7} f(x)dx - \int_{-6}^{6} f(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{7} f(x)dx - 2\int_{0}^{6} f(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{7} f(x)dx + 2\int_{6}^{0} f(x)dx \\
&= 2\int_{6}^{7} f(x)dx
\end{aligned}
$$

즉, $a_7 = \dfrac{2}{7}\displaystyle\int_{6}^{7} f(x)dx$이다. 정수 k에 대하여 $f(x) = (x-2k)^2 + 1\ (2k-1 \le x \le 2k+1)$인 점을 이용하면 다음과 같다.

$$
f(x) = (x-6)^2 + 1\ (5 \le x \le 7)
$$

$$
\begin{aligned}
a_7 &= \frac{2}{7}\int_{6}^{7} f(x)dx \\
&= \frac{2}{7}\int_{6}^{7} \{(x-6)^2 + 1\} dx \\
&= \frac{2}{7}\left[\frac{1}{3}(x-6)^3 + x\right]_6^7 \\
&= \frac{8}{21} \\
&= \frac{q}{p}
\end{aligned}
$$

따라서 $p+q=29$이다.

정답 29