제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

1. $\log_m 2 = \dfrac{n}{100}$을 만족시키는 자연수의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [3점]
(2018학년도 경찰대학 21번)

2. $a>1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^{2x}+4a^x-2$가 구간 $[-1, 1]$에서 최댓값 10을 갖는다. 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은? [4점]
(2021학년도 경찰대학 12번)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

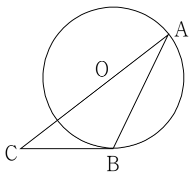
3. $\log_a b = \dfrac{3}{2}$, $\log_c d = \dfrac{3}{4}$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a-c=19$일 때, $b-d$의 값을 구하시오. [4점]
(2021학년도 경찰대학 23번)

수학1 - 2. 삼각함수

4. 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{DA}=6$이다. 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]
(2015학년도 경찰대학 5번)

① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

5. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 A에 대하여 $\sin(\angle OAB)=\frac{1}{3}$이 되도록 원 위에 점 B를 잡는다. 점 B에서의 접선과 선분 AO의 연장선이 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는?
(2012학년도 경찰대학 19번)



① $\frac{24}{7}\sqrt{2}$ ② $\frac{26}{7}\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $\frac{30}{7}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{32}{7}\sqrt{2}$

6. 원에 내접하는 사각형 ABCD의 네 변의 길이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$가 이 순서대로 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열을 이룬다. $\angle ADC=\theta$ 라 할 때, $\cos\theta$의 값은?
(2011학년도 경찰대학 7번)

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{20}$
④ $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{2}}{20}$

수학1 - 3. 수열

7. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킬 때, $A=\sum_{k=1}^{9}a_k a_{k+1}$, $B=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$이라 하자. AB의 값을 구하시오. [4점]
(2018학년도 경찰대학 22번)

8. 모든 항이 양수이고 공비가 서로 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n b_n=\frac{(a_{n+1})^2+4(b_{n+1})^2}{5}$$

를 만족시킬 때, 공비의 최댓값은? [4점]
(2021학년도 경찰대학 7번)

① $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 1

9. 함수 $g(x)$와 수열 $\{a_n\}$이 음이 아닌 모든 정수 k와 모든 자연수 m에 대하여

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{2k+1}+2a_m=g(m+k)$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}g(k)$의 값은? [4점]
(2021학년도 경찰대학 11번)

① 170 ② 180 ③ 190 ④ 200 ⑤ 210

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

10. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=-\frac{1}{2}$ 이 만나는 점을 A, B 라 하자. 점 $\mathrm{P}(0, t)\left(t \neq -\frac{1}{2}\right)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 C 의 개수를 $f(t)$ 라 하자.

(가) C 는 A 나 B 가 아닌 원 위의 점이다. (나) A, B, C 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 A, B, P 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이와 같다.

$f(a)+\lim_{t \to a-} f(t)=5$ 이고 $\lim_{t \to 0-} f(t)=b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?
[4점]
(2017학년도 경찰대학 16번)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수학2 - 1. 미분

11. 이차함수 $f(x)=x^2-4x+7$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,4)$, $\mathrm{B}(6,19)$가 있다. 직선 AB와 평행하고 포물선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 두 직선 $x=1$, $x=6$과 만나는 점을 각각 D, C라 할 때, 평면사변형 ABCD의 넓이는? [4점]
(2019학년도 경찰대학 7번)

① 30 ② $\frac{125}{4}$ ③ $\frac{65}{2}$ ④ $\frac{135}{4}$ ⑤ 35

12. 실수 t에 대하여 $f(x)=x+t$라 할 때, 직선 $y=f(x)$가 곡선 $y=|x^2-4|$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{2}+2$가 만나는 점의 개수는? [4점]
(2020학년도 경찰대학교 7번)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 다음을 만족시키는 한 자리 자연수 a의 개수는?
(2013학년도 경찰대학 19번)

방정식 $x^3-x^2-ax-3=0$이 서로 다른 세 실근을 가진다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 두 실수 a, b와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} a & (x<-1) \\ |f(x)| & (-1\le x\le 5) \\ b & (x>5) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 $x=-1$, $x=5$에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]
(2020학년도 경찰대학 12번)

<보 기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $f(9)=0$이면 $a>b$이다.
ㄷ. $a=b$이면 $f(0)=46$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학2 - 3. 적분

15. 함수 $f(x)=\begin{cases} 1-|x| & (|x|\le 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ 에 대하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\int_{-n}^{n}\frac{\{f(x)\}^n}{n}dx$의 값은? [4점]

(2014학년도 경찰대학 15번)

① $\frac{12}{11}$ ② $\frac{14}{11}$ ③ $\frac{16}{11}$
④ $\frac{18}{11}$ ⑤ $\frac{20}{11}$

16. 두 함수 $f(x)=-x^2+4x$, $g(x)=2x-a$에 대하여 함수 $h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$가 극솟값 3을 가질 때, $\displaystyle\int_0^4 h(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

(2021학년도 경찰대학 22번)

17. 두 함수 $f(x)=x^4(x-a)$, $g(x)=k(x-1)(x-b)$의 그래프가 직선 $y=x-1$에 접한다. 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 함수 $g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 세 상수 a, b, k에 대하여 abk의 값은? (단, $b>1$) [5점]

(2021학년도 경찰대학 18번)

① $-2-\sqrt{5}$ ② $-1-\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$
④ $1-\sqrt{5}$ ⑤ $2-\sqrt{5}$

18. 함수 $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x+1$과 이차함수 $g(x)$는 어떤 실수 α에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f'(\alpha)=g'(\alpha)$
(나) $f(\alpha+1)=g(\alpha+1)$, $f'(\alpha+1)=g'(\alpha+1)$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_2}{S_1}$의 값은? [5점]

(2017학년도 경찰대학교 19번)

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 335 ⑤ 40

[빠른 정답]

1번: 9
2번: ①
3번: 973
4번: ②
5번: ⑤
6번: ⑤
7번: 297
8번: ③
9번: ⑤
10번: ③
11번: ②
12번: ⑤
13번: ④
14번: ③
15번: ⑤
16번: 13
17번: ②
18번: ⑤

[해설]

(1번)

$\log_m 2 = \dfrac{n}{100} \quad \rightarrow \quad 2 = m^{\frac{n}{100}}$

$2^{100} = m^n$

그러므로 n은 100의 양의 약수이다.

$(2^{100})^1$, $(2^{50})^2$, $(2^{25})^4$, $(2^{20})^5$, $(2^{10})^{10}$, $(2^5)^{20}$, $(2^4)^{25}$, $(2^2)^{50}$, $(2)^{100}$

따라서 자연수의 순서쌍 (m, n)은 모두 9개 이다.

정답 9

(2번)

$a^x = t$라 하면 실수 t의 범위는 $\dfrac{1}{a} \le t \le a$이고, 함수 $f(x)$는 $f(x) = t^2 + 4t - 2 = (t+2)^2 - 6$이다. 함수 $f(x)$는 $t = a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 2 = 10$를 가지므로 $a = 2$이다. 최솟값의 경우, 최솟값은 $t = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$일 때이므로 $\dfrac{1}{4} + 2 - 2 = \dfrac{1}{4}$이다.

정답 ①

(3번)

$b = a^{\frac{3}{2}}$, $d = c^{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad a = b^{\frac{2}{3}}$, $c = d^{\frac{4}{3}}$

해당 수들은 자연수이므로 a는 제곱수, c는 네제곱수이다

$c = 16, 81, 256, \cdots$
$a = 4, 9, \cdots, 81, 100, 121, \cdots$

이중에서 $a - c = 19$인 경우는 $a = 100$, $c = 81$인 경우뿐이다.
따라서 $b = 1000$, $d = 27$, $b - d = 973$

정답 973

(4번)

사각형 ABCD 가 원에 내접하므로 $\angle BAD + \angle BCD = \pi$이다. $\angle BAD = \theta$라 하면 삼각형 BAD에서 코사인법칙에 의하여 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD}\cos\theta$
$= 37 - 12\cos\theta$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}\cos(\pi - \theta)$
$= 25 + 24\cos\theta$

$37 - 12\cos\theta = 25 + 24\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

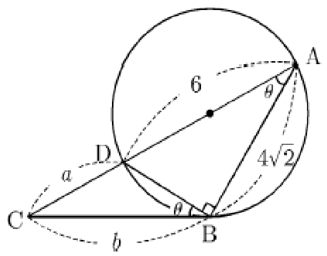
(□ABCD의 넓이)=(△BAD의 넓이)+(△BCD의 넓이)
$= \dfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AD}\sin\theta + \dfrac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{CD}\sin(\pi - \theta)$
$= \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$= 6\sqrt{2}$

정답 ②

(5번)

선분 AC와 원이 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AD}$가 지름이므로 $\angle ABD = \dfrac{\pi}{2}$임을 알 수 있다. 이때, $\angle CAB = \theta$라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$, $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$\overline{AD} = 6$, $\overline{BD} = \overline{AD}\sin\theta = 2$, $\overline{AB} = \overline{AD}\cos\theta = 4\sqrt{2}$



또한, $\angle BDC = \dfrac{\pi}{2} + \theta$이고 접선과 현이 이루는 각은 현에 대한 원주각과 같으므로 $\angle DBC = \theta$임을 알 수 있다. $\overline{CD} = a$, $\overline{BC} = b$라 놓고 △BCD에서 사인법칙을 이용하면 다음과 같다.

$\dfrac{a}{\sin\theta}=\dfrac{b}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}$ $\rightarrow$ $b=2\sqrt{2}\,a$ $\left(\because \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta\right)$

$\overline{BD}\cdot\overline{BA}=\overline{CB}^2$ $\rightarrow$ $a(a+6)=b^2$

$a=\dfrac{6}{7}$

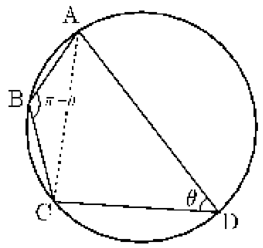
$\therefore$ ($\triangle$ACB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\left(6+\dfrac{6}{7}\right)\cdot 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{32}{7}\sqrt{2}$

정답 ⑤

(6번)



네 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 길이를 a, $\sqrt{2}a$, $2a$, $2\sqrt{2}a$이라 하자. 이때, 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 사각형의 내각 중 마주보는 각의 합은 π이다. 그러므로 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\angle ABC+\angle ADC=\pi$ $\rightarrow$ $\angle ABC=\pi-\theta$

코사인법칙을 사용하면 다음과 같다.

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos(\pi-\theta)$

$=a^2+2a^2+2\sqrt{2}a^2\cos\theta$

$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{DA}^2-2\overline{CD}\cdot\overline{DA}\cos\theta$

$=4a^2+8a^2-8\sqrt{2}a^2\cos\theta$

$10\sqrt{2}\cos\theta=9$ $\rightarrow$ $\cos\theta=\dfrac{9\sqrt{2}}{20}$

정답 ⑤

(7번)

함수 b_n을 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$라 하면 다음과 같다.

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{a_n}$

$b_{n+1}=1+b_n$

$b_n=n$ $(\because b_1=1)$

$\dfrac{1}{a_n}=n$

$A=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}a_ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

$B=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{9}k(k+1)=\frac{9\times10\times11}{3}=330$

따라서 $AB=\dfrac{9}{10}\times330=297$

정답 297

(8번)

$a_n=ar^{n-1}$, $b_n=br^{n-1}$ 라고 하자. 이를 토대로 정리하면 다음과 같다.

$abr^{2n-2}=\dfrac{a^2r^{2n}+4b^2r^{2n}}{5}$

$r^2=\dfrac{5ab}{a^2+4b^2}=\dfrac{5}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}}\le\dfrac{5}{2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{4b}{a}}}=\dfrac{5}{4}$

위에서의 등호는 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$, 즉 $a^2=4b^2$일 때 성립하고

따라서 구하는 r의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이다.

정답 ③

(9번)

$m=1$, $k=0$을 대입하여 계산하면 다음과 같다.

$g(1)=a_1+2a_1$

$=3a_1$

$=3$

$m=1$, $m=2$를 차례로 대입하면 다음과 같다.

$g(k+1) = a_{2k+1} + 2a_1 = a_{2k+1} + 2$
$g(k+2) = a_{2k+1} + 2a_2 = a_{2k+1} + 6$

즉 $g(k+2) - g(k+1) = 4$이므로, 따라서 수열 $g(k)$는 공차가 4인 등차수열이다. 일반항을 구하면 다음과 같다.

$$g(k) = 4k - 1$$
$$\sum_{k=1}^{10} g(k) = 10 \times \frac{g(1)+g(10)}{2} = 210$$

정답 ⑤

(10번)

주어진 조건의 의하여, 직선 AB와 점 C사이의 거리와 직선 AB와 점 P사이의 거리가 같아야 한다. 이 점을 이용해 함수 $f(t)$를 정리하면 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -2) \\ 1 & (t = -2) \\ 2 & (-2 < t < -1) \\ 3 & (t = -1) \\ 4 & (-1 < t < 0) \\ 3 & (t = 0) \\ 2 & (0 < t < 1) \\ 1 & (t = 1) \\ 0 & (1 < t) \end{cases}$$

$a = -1, b = 4$

따라서 $a + b = 3$이다.

정답 ③

(11번)

곡선 $y = f(x)$ 위의 두 A, B의 x좌표가 각각 1, 6이다. 직선 AB
의 기울기와 동일한 $y = f(x)$ 위의 접선은 두 x좌표 값의 평균을
구함으로써 알 수 있다. 그러므로 직선 AB와 평행하고 곡선 $y = f(x)$에 접하는 직선은 점 $\left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right)$을 지나며 그 기울기는 $f'\left(\frac{7}{2}\right)$이다. 직선 AB의 기울기가 $\frac{19-4}{6-1} = 3$이므로 $f'\left(\frac{7}{2}\right) = 3$이며, 정리하면 다음과 같다.

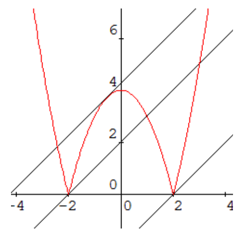
$$y = f'\left(\frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) = 3x - \frac{21}{4}$$

해당 접선을 함수 $g(x) = 3x - \frac{21}{4}$라고 하자. 그러면 점 D는 D$(1, g(1))$가 되고, 점 C는 C$(6, g(6))$이다.
$g(1) = -\frac{9}{4}$, $g(6) = \frac{51}{4}$이므로 따라서 평행사변형 ABCD의 넓
이를 구하면 $\frac{125}{4}$

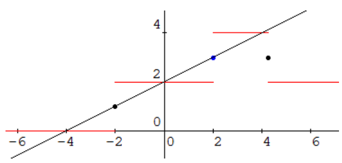
정답 ②

(12번)

$y = |x^2 - 4|$, $y = x + t$의 그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



$y = g(t)$, $y = \frac{x}{2} + 2$ 의 그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



따라서 구하는 교점의 개수는 5

정답 ⑤

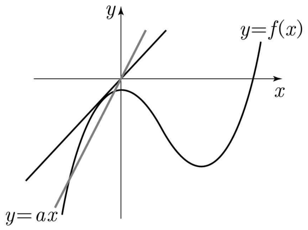
(13번)

$x^3 - x^2 - ax - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 - x^2 - 3 = ax$

위에서 알 수 있듯이 방정식 $x^3 - x^2 - ax - 3 = 0$의 실근은 곡선 $y = x^3 - x^2 - 3$과 직선 $y = ax$의 교점의 x좌표이다. 함수 $f(x)$를 $f(x) = x^3 - x^2 - 3$이라 하자.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$y=ax$의 그래프가 그림과 같이 y축과 원점을 지나며 함수 $y=f(x)$에 접하는 접선 사이에 있을 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 교점을 갖는다.
원점에서 함수 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식을 구하자.
접점을 $(t, f(t))$라 할 때, 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y&=f'(t)(x-t)+f(t)\\ &=(3t^2-2t)(x-t)+t^3-t^2-3 \end{aligned}$$

$$0=(3t^2-2t)(0-t)+t^3-t^2-3 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} &2t^3-t^2+3=0\\ &(t+1)(2t^2-3t+3)=0\\ &t=-1\\ &(\because\ 2t^2-3t+3>0) \end{aligned}$$

그러므로 원점에서 함수 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=5x$이다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 교점을 갖도록 하는 a의 범위는 $a>5$이고, 구하는 한 자리 자연수 a의 개수는 6, 7, 8, 9로 총 4개

정답 ④

(14번)

ㄱ. (참)
$x=-1$, $x=5$에서 미분가능하다면 $g'(-1)=g'(5)=0$이며, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$f'(-1)=f'(5)=0$$
$$f'(x)=3(x+1)(x-5)$$

따라서 $x=-1$에서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄴ. (거짓)

$$f'(x)=3(x+1)(x-5)$$

$$f(9)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} &f(x)=x^3-6x^2-15x-108\\ &f(-1)=-100,\ f(5)=-208\\ &a=100,\ b=208 \quad\rightarrow\quad a<b \end{aligned}$$

ㄷ. (참)
$f(x)=x^3-6x^2-15x+C$ (C는 적분상수)

$a=f(-1)=8+C$
$b=-f(5)=100-C$

$a=b$이면 $C=46$, 따라서 $f(0)=C=46$

정답 ③

(15번)

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases},\quad f(x)=f(-x)$$

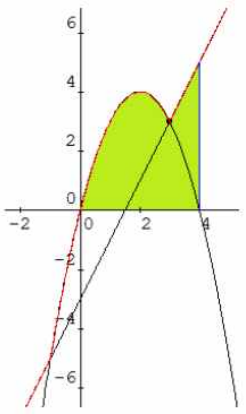
$$\begin{aligned} \int_{-n}^{n}\frac{\{f(x)\}^n}{n}dx&=2\int_{-n}^{0}\frac{\{f(x)\}^n}{n}dx\\ &=2\int_{-1}^{0}\frac{\{f(x)\}^n}{n}dx\\ &=2\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)^n}{n}dx\\ &=2\int_{0}^{1}\frac{x^n}{n}dx\\ &=2\left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]_0^1\\ &=\frac{2}{n(n+1)}\\ &=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10}\int_{-n}^{n}\frac{\{f(x)\}^n}{n}dx&=\sum_{n=1}^{10}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}\\ &=\frac{20}{11} \end{aligned}$$

정답 ⑤

(16번)

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

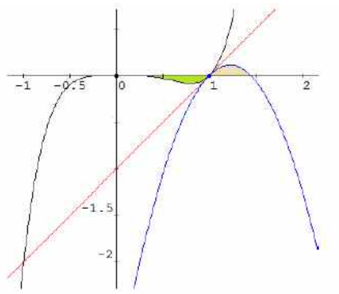


3이 극솟값이면 그림과 같이 직선 $g(x)=2x-a$는 점 $(3,3)$을 지난다. 그러므로 $a=-3$임을 알 수 있다. 정리하여 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^4 h(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x)dx+\int_3^4(2x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^3+\left[x^2-3x\right]_3^4$$
$$=13$$

정답 13

(17번)



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-1$의 접점의 x좌표를 t라 하면 다음
과 같다.

$$f'(t)=5t^4-4at^3=1$$
$$t^5-at^4=t-1$$

다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

$$a=\frac{5t^4-1}{4t^3}=\frac{t^5-t+1}{t^4}$$

$$t^5+3t-4=0 \quad \rightarrow \quad (t-1)(t^4+t^3+t^2+t+4)=0$$
$$t=1,\ a=1$$

$$f(x)=x^4(x-1)$$

한편 함수 $g(x)$와 직선 $y=x-1$의 접점은 $(1,0)$이므로 $g'(1)=k(1-b)=1$임을 알 수 있다.

$$\int_0^1(x^4-x^5)dx=\int_1^b k(x-1)(x-b)dx$$
$$\frac{1}{30}=\frac{-k(b-1)^3}{6} \quad \rightarrow \quad k(b-1)^3=-\frac{1}{5}$$
$$k=\frac{1}{1-b}=-\frac{1}{5(b-1)^3}$$
$$(b-1)^2=\frac{1}{5}$$

$$b=1+\frac{1}{\sqrt{5}},\ k=-\sqrt{5}$$

따라서 $abk=-1-\sqrt{5}$

정답 ②

함수 $g(x)$를 $g(x)=ax^2+bx+c$라고 하자. 그러면 조건 (가), (나)에 의하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-1)^2$$
$$=x^4-6x^3+(12-a)x^2+(-8-b)x+1-c$$

$\alpha=1,\ a=-1, b=4, c=-3$
$g(x)=-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$

$$S_1=\int_1^2(x-1)^2(x-2)^2dx=\frac{1}{30}$$
$$S_2=\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{S_2}{S_1}=40$

정답 ⑤