

제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

- 정의역 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) = a^{x^2-4x-1}$ ($a > 0, a \neq 1$) 의 최댓값이 32 이다. 상수 a 의 값은?
(2001학년도 경찰대학 7번)
- $\log_2(a^2 + b^2 - ab - a - b + 3) = 1$ 을 만족할 때, $a + b$ 의 값은?
(2002학년도 경찰대학 12번)
- 두 자연수 m, n 에 대하여 부등식 $\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0$ 을 만족시키는 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라. [4점]
(2016학년도 경찰대학 23번)

수학1 - 2. 삼각함수

4. 삼각함수 $f(\theta) = 3\cos^2\theta + 2\sin\theta - 1$ 의 최댓값은?
(2005학년도 경찰대학 5번)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ $\frac{13}{7}$

5. 함수 $y = a\cos^2x + a\sin x + b$ 의 최댓값이 10이고 최솟값이 1일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은 p 또는 q 이다. $p+q$ 의 값은?
[4점]

(2014학년도 경찰대학 7번)

① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

6. $\overline{AB}=5, \overline{BC}=7, \overline{AC}=6$ 인 삼각형 ABC가 있다. 두 선분 AB, AC 위에 삼각형 ADE의 외접원이 선분 BC에 접하도록 점 D, E를 각각 잡을 때, 선분 DE의 길이의 최솟값은? [5점]
(2021학년도 경찰대학 20번)

① $\frac{64}{15}$ ② $\frac{81}{20}$ ③ 4 ④ $\frac{121}{30}$ ⑤ $\frac{144}{35}$

수학1 - 3. 수열

7. 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 은 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$ 과 $b_n = -3a_{n-1} - b_{n-1}$ 을 만족하고 $a_1 = b_1 = 1$ 이다. $a_{100} + b_{100}$ 의 값은?
 (2006학년도 경찰대학 17번)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 삼각형 T_n 의 넓이가 $a_n = -n^2 + 24n + 20$ 일 때, a_1, a_2, \dots, a_m 중에서 최댓값과 최솟값의 합은? (단, $n = 1, 2, \dots, m$ 이고 $a_m a_{m+1} < 0$)
 (2006학년도 경찰대학 5번)

- ① 149 ② 159 ③ 164 ④ 184 ⑤ 207

9. $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{3-2a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_k < 9^{-100}$ 을 만족시키는 k 의 최솟값은?
 (2005학년도 경찰대학 25번)

- ① 48 ② 112 ③ 200 ④ 300 ⑤ 366

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} = 2$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 구간 $[2, 4]$ 에서 적어도 m 개의 서로 다른 실근을 갖는다. m 의 값은? [3점]
(2021학년도 경찰대학 4번)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수학2 - 2. 미분

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 함수 $f(t)$ 가 $f(t) = t^3 + 3t^2 - 2t$ 이다. 점 P의 $0 \leq t \leq 10$ 에서의 평균속도와 $t = c$ 에서의 순간속도가 서로 같을 때, $3c^2 + 6c$ 의 값을 구하여라. [4점]
 (2014학년도 경찰대학 23번)

12. 사차함수 $f(x) = k(x-1)(x-a)(x-a+1)(x-a+2)$ ($k > 0$)이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 사차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
- (나) 함수 $f(x)$ 의 두 극솟값의 곱은 25이다.

두 상수 a, k 에 대하여 ak 의 값은? [4점]

(2020학년도 경찰대학 16번)

- ① 30 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 60

13. 다항함수 $g(x)$ 와 자연수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ g(x) & (0 < x < 2) \\ k(x-2)+1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하도록 하는 가장 낮은 차수의 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 $\frac{1}{4} < g(1) < \frac{3}{4}$ 일 때, k 의 값을 구하여라. [4점]

(2019학년도 경찰대학 24번)

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값을 갖는다. 방정식

$$|f(x) - f(-3)| = k$$

가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < m$ 이다. 실수 m 의 최댓값은? [5점]

(2021학년도 경찰대학 19번)

- ① 8 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 40

수학2 - 3. 적분

15. 곡선 $y = x^3 + 1$ 에 대하여 곡선 밖의 점 (a, b) 에서 곡선에 그은 접선의 개수가 3일 때, 점 (a, b) 가 나타내는 영역의 넓이는?
(단, $0 \leq a \leq 1$) [5점]
(2019학년도 경찰대학 17번)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

16. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 a 가 다음 조건을 만족할 때, a 의 값은? [4점]
(2020학년도 경찰대학 14번)

(가) 모든 실수 t 에 대하여 $\int_{a-t}^{a+t} f(x) dx = 0$ 이다.

(나) $f(a) = f(0)$

(다) $\int_0^a f(x) dx = 144$

- ① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

17. 좌표평면 위의 점 $P\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ 에서 곡선 $y = x^2$ 에 그은 두 접선을 l, m 이라 할 때, 두 접선 l, m 과 곡선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]
(2014학년도 경찰대학 14번)

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

18. 함수 $f(x) = (x-1)^4(x+1)$ 에 대하여 이차함수 $g(x), h(x)$ 가

$$f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)^2 h(t) dt$$

를 만족시킬 때, $g(2) + h(2)$ 의 값을 구하시오. [5점]

(2018학년도 경찰대학 25번)

[빠른 정답]

1번: $\frac{1}{2}$

2번: 2

3번: 55

4번: ②

5번: ①

6번: ⑤

7번: ①

8번: ④

9번: ③

10번: ③

11번: 130

12번: ②

13번: 3

14번: ④

15번: ①

16번: ①

17번: ④

18번: 57

[해설]

(1번)

구간 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $y = x^2 - 4x - 1$ 의 그래프는 $x = 2$ 에서
 최솟값 -5 를 가지며, $x = 4$ 일 때 최댓값 -1 을 가진다.
 지수함수의 경우 밑의 크기에 따라 함수의 개형이 달라지므로
 다음과 같이 두 가지 케이스로 분류가 가능하다.

case 1) $0 < a < 1$

단조 감소 하는 경우이므로 지수가 최소인 경우에 함수값이
 최대이다. 즉 다음과 같다.

$$a^{-5} = 32, a = \frac{1}{2}$$

case 2) $a > 1$

단조 증가하는 경우이므로 지수가 최대일 때 함수값은 최대가
 된다. 즉 다음과 같다.

$$a^{-1} = 32, a = \frac{1}{32}$$

이는 조건에 모순이다.

따라서 $a = \frac{1}{2}$

정답 $\frac{1}{2}$

(2번)

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 3 = 2$$

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

$$a = b = 1$$

따라서 $a + b = 2$

정답 2

(3번)

case 1) $\log_3 \frac{m}{15} > 0 \rightarrow m > 15$

$$\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0 \text{ 즉 } 15 < m \leq \frac{45}{n} \text{ 이며, } n = 1 \text{ 일 때}$$

$15 < m \leq 45$ 로 30개, $n = 2$ 일 때 $15 < m \leq 22.5$ 로 7개이므로
 총 37개이다.

case 2) $\log_3 \frac{m}{15} = 0 \rightarrow m = 15$

$$\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0 \quad \log_3 \frac{n}{3} \leq 0, n \leq 3 \text{ 이므로 총 3개이다.}$$

case 3) $\log_3 \frac{m}{15} < 0 \rightarrow 0 < m < 15$

$$\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0 \quad 5n < m \leq 15 \text{ 이며, } n = 1 \text{ 일 때}$$

$5 \leq m < 15$ 로 10개, $n = 2$ 일 때 $10 \leq m < 15$ 로 5개이므로 총
 15개다.

따라서 총 55개

정답 55

(4번)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3\cos^2\theta + 2\sin\theta - 1 \\ &= 3(1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta - 1 \\ &= -3\sin^2\theta + 2\sin\theta + 2 \end{aligned}$$

$\sin\theta = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) 로 치환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(t) &= -3t^2 + 2t + 2 \\ &= -3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{7}{3}$

정답 ㉔

(5번)

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) 라고 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= a\cos^2x + a\sin x + b \\ &= a(1 - \sin^2x) + a\sin x + b \\ &= a(1 - t^2) + at + b \\ &= -a\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b \end{aligned}$$

case 1) $a > 0$

주어진 함수는 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{5}{4}a + b$ 를 갖고

$t = -1$ 일 때, 최솟값 $-a + b$ 를 갖는다. 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}a + b &= 10 \rightarrow -a + b = 1 \\ a &= 4, b = 5 \end{aligned}$$

case 2) $a < 0$

주어진 함수는 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{5}{4}a+b$ 를 갖고 $t = -1$ 일 때, 최댓값 $-a+b$ 를 갖는다.

$$\frac{5}{4}a+b=1 \rightarrow -a+b=10$$
$$a=-4, b=6$$

ab 의 값은 20 또는 -24이므로 따라서 $p+q=-4$

(6번)

선분 DE가 최소일 때는 점 A에서 수선을 내렸을 때의 수선의 발을 H라고 할 때, 수선 AH가 원의 지름일 때이다. 코사인법칙을 이용하면 다음과 같다.

$$\cos A = \frac{25+36-49}{2 \times 5 \times 6} = \frac{1}{5}, \sin A = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

삼각형의 넓이공식을 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin A = \frac{1}{2} \times 7 \times \overline{AH}$$
$$\overline{AH} = \frac{6\sqrt{24}}{7}$$

사인법칙을 이용하면 다음과 같다.

$$\overline{DE} = \overline{AH} \times \sin A$$
$$= \frac{144}{35}$$

(7번)

$$a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$b_n = -3a_{n-1} - b_{n-1}$$

두 식을 더하면 다음과 같다.

$$a_n + b_n = -a_{n-1}$$

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

$a_1 = b_1 = 1$ 이므로 정리하면 다음과 같다.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2a_1 + b_1 = 3$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 3 = -1$$
$$a_5 = a_4 - a_3 = (-1) - 2 = -3$$
$$a_6 = a_5 - a_4 = (-3) - (-1) = -2$$
$$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-3) = 1$$
$$a_8 = a_7 - a_6 = 1 - (-2) = 3$$
$$a_9 = a_8 - a_7 = 3 - 1 = 2$$
$$\vdots$$

따라서 $a_{100} + b_{100} = -a_{99} = -2$

정답 ①

(8번)

근의 공식을 이용해 $-n^2 + 24n + 20 = 0$ 의 근을 구하면 $n = 12 \pm \sqrt{164}$ 이다. 따라서 조건 $a_m a_{m+1} < 0$ 을 만족하는 m 의 값은 $m = 24$ 이다. ($\because m$ 은 양의 정수) 그리고 a_n 은 꼭지점($n = 12$)과 $n = 24$ 에서 각각 최댓값과 최솟값이 된다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$a_{12} = -12^2 + 24 \times 12 + 20$$
$$= 164$$

$$a_{24} = 20$$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 184

정답 ①

(9번)

주어진 식의 양변에 역수를 취하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 \times \frac{1}{a_n} - 2$$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ 라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_{n+1} = 3b_n - 2$$
$$b_{n+1} - 1 = 3(b_n - 1)$$

그러므로 수열 $\{b_n\}$ 은 일정한 수 1을 뺀 수열이 공비가 3인 등비수열이다. $b_1 = \frac{1}{a_1} = 4$ 이므로 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

정답 ⑤

정답 ④

$$b_n - 1 = 3 \cdot 3^{n-1} \rightarrow b_n = 3^n + 1$$

$$a_n = \frac{1}{3^n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{1}{3^k + 1} < 9^{-100} = 3^{-200}$$

$$3^k > 3^{200} - 1$$

따라서 k 의 최솟값은 200

(10번)

다항식 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를
 $f(x) = (x-2)(x-4)g(x)$ 라고
 하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4 \rightarrow g(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} = 2 \rightarrow g(4) = 1$$

단한 구간 $[2, 4]$ 에서 방정식 $g(x) = 0$ 는 적어도 한개의 실근을
 갖는다. 또한 $x = 2, x = 4$ 는 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이므로
 단한 구간 $[2, 4]$ 에서 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 3개의 실근을
 갖는다.
 따라서 $m = 3$

(11번)

$0 \leq t \leq 10$ 에서의 평균속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{1280}{10} = 128$$

$$f'(t) = 3t^2 + 6t - 2 \text{ 이므로 } t = c \text{에서의 순간속도는}$$

$$f'(c) = 3c^2 + 6c - 2 \text{ 이다. } 3c^2 + 6c - 2 = 128 \text{ 이므로}$$

$$3c^2 + 6c = 130$$

정답 ③

정답 ③

정답 130

(12번)

(나)에서 해당 함수의 두 극솟값의 곱이 -25라고 했으므로
 두 극솟값이 둘 다 0이 아니도록 하기 위해서는 $a = 2$ 가 되어야
 한다. 즉 $f(x) = kx(x-1)^2(x-2)$ 이다. 사차함수의 비율관계를
 이용해 극솟값을 구하면 다음과 같다.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = -\frac{k}{4}$$

$$\left(-\frac{k}{4}\right)^2 = \frac{k^2}{16} = 25 \rightarrow k = 20 \quad (\because k > 0)$$

따라서 $ak = 40$

정답 ②

(13번)

조건을 만족시키는 가장 낮은 차수의 다항함수 $g(x)$ 는
 삼차함수이고, 경계가 되는 부분에서 접선을 세워줄 수 있다.
 그러므로 식을 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$g(x) = x(x-2)(ax+b) + 1$$

$$= ax^3 - 2ax^2 + bx^2 - 2bx + 1$$

$$g'(x) = 3ax^2 - 4ax + 2bx - 2b$$

$$g'(0) = -2b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$g(1) = -a - b + 1$$

$$= -a + \frac{3}{2}$$

여기서 $\frac{1}{4} < -a + \frac{3}{2} < \frac{3}{4}$, 즉 $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$ 이므로 한 번 더
 정리하면 다음과 같다.

$$k = g'(2) = 2(2a+b) = 4a-1 \rightarrow 2 < k < 4$$

그러므로 $k = 3$ 이다.

정답 3

(14번)

함수 $f(x)$ 에 대하여 도함수가 $x = 1$ 에서 최솟이므로 해당 함수는
 $(1, f(1))$ 에 대하여 접대칭인 삼차함수이다. 주어진 조건을
 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$ 가 $x = -3$ 에서 극댓값을 갖고,
 $x = 1$ 에서 극솟값을 가질 때이고, 그러므로 구하는 m 의 최댓값은
 극댓값과 극솟값의 차이이다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$f'(x) = 3(x+3)(x-1)$$

$$= 3x^2 + 6x - 9$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$m = f(-3) - f(1) = 32$$

정답 ④

(15번)

실수 t 에 대하여 접점을 (t, t^3+1) 이라고 하자. 그러면 도함수 $y' = 3x^2$ 에서 해당 접점에서의 접선의 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$y = 3t^2(x-t) + t^3 + 1$$

$$b = -2t^3 + 3at^2 + 1$$

이제 방정식 $b = -2t^3 + 3at^2 + 1$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 해야 한다. 우변의 식을 좌변으로 넘겨주면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + b - 1,$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6at$$

$$= 6t(t-a)$$

$$f(0)f(a) = (b-1)(-a^3+b-1) < 0$$

경계선 $b=1$, $b=a^3+1$ 와 $0 \leq a \leq 1$ 에서 구하려는 영역의 넓이를 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 (x^3+1-1)dx = \frac{1}{4}$$

(16번)

$$\int_{a-t}^{a+t} f(x)dx = \int_{-t}^t f(x+a)dx = 0$$

곡선 $y=f(x)$ 를 x 축으로 $-a$ 만큼 평행이동하면 원점에 대하여 대칭인 함수가 된다. 즉 함수 $f(x)$ 가 $(a, 0)$ 접대칭이라는 것을 의미한다. $f(a) = f(0)$ 이므로 식을 세우면 다음과 같다.

$$f(x) = x(x-a)(x-2a)$$

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{a^4}{4}$$

$$= 144$$

$$a^4 = 4 \times 144 \rightarrow a = 2\sqrt{6}$$

정답 ㉑

정답 ㉑

(17번)

실수 t 에 대하여 접점을 (t, t^2) 이라고 하자. 그러면 곡선 $y=x^2$ 에 대하여 도함수는 $y' = 2x$ 이므로 접선의 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$y = 2t(x-t) + t^2$$

$$= 2tx - t^2$$

해당 접선의 방정식이 점 $(\frac{1}{2}, -2)$ 를 지나므로 대입하면 다음과 같다.

$$-2 = 2t\left(\frac{1}{2}-t\right) + t^2$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 1)$, $(2, 4)$ 이다. 이에 대하여 점 A와 B를 $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ 라 할 때, 직선 AB의 방정식은

$y = x+2$ 이다. 점 $(\frac{1}{2}, -2)$ 에서 직선 AB에 이르는 거리를 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{\left| \frac{1}{2} + 2 + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\triangle PAB \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{27}{4}$$

직선 AB와 곡선 $y=x^2$ 로 둘러싸인 부분

$$\text{넓이} = \frac{1}{6}(2 - (-1))^3 = \frac{9}{2}$$

$$\text{따라서 구하는 넓이는 } \frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$$

정답 ㉒

(18번)

함수 $g(x)$ 를 좌변으로 옮길 경우

$f(x) - g(x) = \int_0^x (x-t)^2 h(t) dt$ 이다. 해당식을 정리하면 다음과 같다.

$$f(x) - g(x) = x^2 \int_0^x h(t) dt - 2x \int_0^x t h(t) dt + \int_0^x t^2 h(t) dt$$

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하자. 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=1$ 이라는 것을 알 수 있다. 우변을 미분해주면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & 2x \int_0^x h(t)dt + x^2 h(x) - 2 \int_0^x th(t)dt - 2x^2 h(x) + x^2 h(x) \\ &= 2x \int_0^x h(t)dt - 2 \int_0^x th(t)dt \end{aligned}$$

좌변을 미분하면 $f'(x) - g'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) - g'(x) &= (x-1)^4 + 4(x-1)^3(x+1) - g'(x) \\ &= (x-1)^3(5x+3) - g'(x) \end{aligned}$$

이다. 미분한 양변을 정리하면 다음과 같다.

$$(x-1)^3(5x+3) - 2ax - b = 2x \int_0^x h(t)dt - 2 \int_0^x th(t)dt$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $b = -3$ 이라는 것을 알 수 있다. 양변을 한 번 더 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{좌변: } & 5(x-1)^3 + 3(x-1)^2(5x+3) - 2a \\ &= (x-1)^2(20x+4) - 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{우변: } & 2 \int_0^x h(t)dt + 2xh(x) - 2xh(x) \\ &= 2 \int_0^x h(t)dt \end{aligned}$$

미분한 양변을 정리하면 다음과 같다.

$$(x-1)^2(20x+4) - 2a = 2 \int_0^x h(t)dt$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $a=2$ 라는 것을 알 수 있다. 정리하면 $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 이다. 또한 위의 식을 한 번 더 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x-1)(20x+4) + 10(x-1)^2 \\ &= (x-1)(30x-6) \end{aligned}$$

따라서 $g(2) + h(2) = 57$

정답 57