등차수열, 일차함수와 직선

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = a+(n-1)d \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

입니다. 이 수열을 정의역이 자연수 전체의 집합인 함수 $f(n)$으로 생각하면

$$f(\boldsymbol{n}) = d\boldsymbol{n} + (a-d)$$

입니다. 즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = f(n)$은 n에 관한 일차식입니다.

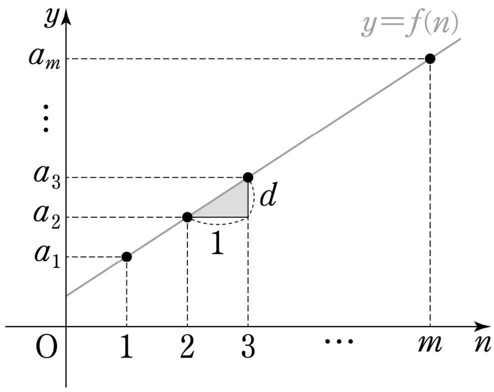
이때 n을 잠깐 실수로 보면, 일차식 $f(n) = \boldsymbol{d}n + (a-d)$에서

『기울기=공차』

임을 알 수 있고, 직선 $y=f(n)$ 위에 점

$$(1,\ a_1),\ (2,\ a_2),\ (3,\ a_3),\ \cdots,\ (m,\ a_m)$$

이 일정한 간격으로 찍혀 있습니다.



※ 등차수열 $\{a_n\}$은 편의상 기울기가 d인 직선을 그려서 생각할 수 있습니다.

[참고]

점 $(m,\ a_m)$을 지나고 기울기가 d인 직선을 나타내는 일차함수를 $y=f(x)$라 하면,

$$f(x) = d(x-m)+a_m$$

입니다. 즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 일반화하면,

$$a_n = a_m + (n-m)d \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

입니다.

관련 문제 두 개를 풀어봅시다!

[첫 번째 문항]

[21008-0155]

첫째항이 -12, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_l|=|a_m|$을 만족시키는 세 자연수 d, l, m의 모든 순서쌍 $(d,\ l,\ m)$의 개수는? (단, $l<m$)

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

출처: 2022 수능특강 수학Ⅰ 81쪽 1번

[두 번째 문항]

79

공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 m에 대하여

$$|a_{m-k}|=a_m+12, \quad m>k$$

를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합이 10일 때, a_{m+9}의 값은?

① -32 ② -30 ③ -28 ④ -26 ⑤ -24

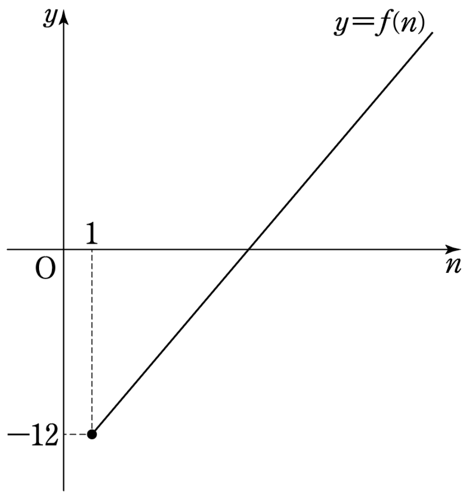
출처 : 2021 제헌이N제 수학Ⅰ 79번

Offering an Ideal Solution

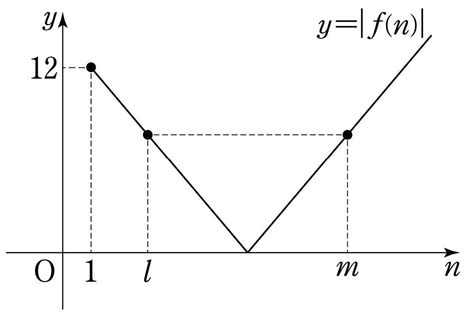
[첫 번째 문항]

$a_1 = -12$, 공차가 $d\ (d > 0)$인 등차수열 $\{a_n\}$을

점 $(1,\ a_1)$을 지나고 기울기가 d인 직선 $y = f(n)$을 그려서 생각해보자.

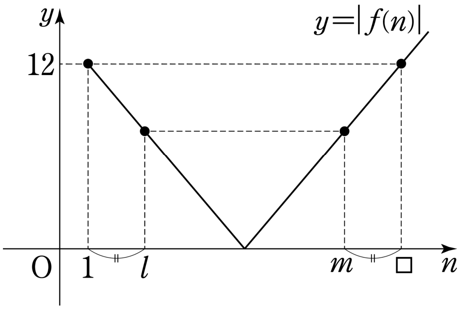


$|a_l| = |a_m|\ \ (l < m)$이므로 함수 $y = |f(n)|$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



d는 '① 기울기를 나타내고', '② 자연수'이므로 d에 대한 조건을 찾는 것이 핵심이다.

함수 $y=|f(n)|$ 의 그래프의 대칭성을 이용하여 $a_{\square}=12$ 인 $\square$ 에 대한 정보를 얻어보자.



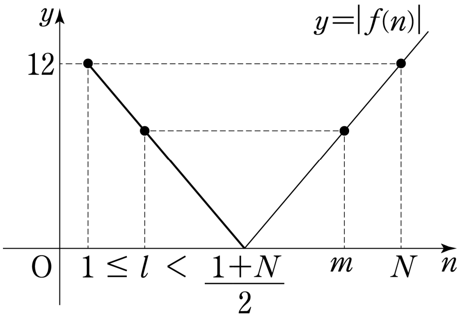
$l-1=\square-m$ 이므로 $\square=m+l-1$, 즉 $\square$ 는 자연수이다.

$\square=N\ (N>1)$ 이라 하면, $a_N=12$ 이고, 기울기 d 는

$$d=\frac{a_N-a_1}{N-1}=\frac{24}{N-1}$$

이다. 따라서 d 는 24 의 양의 약수이므로 d 의 값은 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 가 가능하다.

이 각각에 대하여 가능한 자연수 l 의 범위는 $1\le l<\dfrac{1+N}{2}$ 이다.



$N=\dfrac{24}{d}+1$ 이므로 가능한 자연수 l 의 범위는 $1\le l<\dfrac{12}{d}+1$ 이다.

따라서 d 의 값이 각각 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 일 때,

가능한 자연수 l 의 개수는 각각 12, 6, 4, 3, 2, 2, 1, 1 이다.

l 의 값이 정해지면, m 의 값도 정해지므로 구하는 순서쌍 $(d,\ l,\ m)$ 의 개수는

$12+6+4+3+2+2+1+1=31$ 이다.

Offering an Ideal Solution

[두 번째 문항]

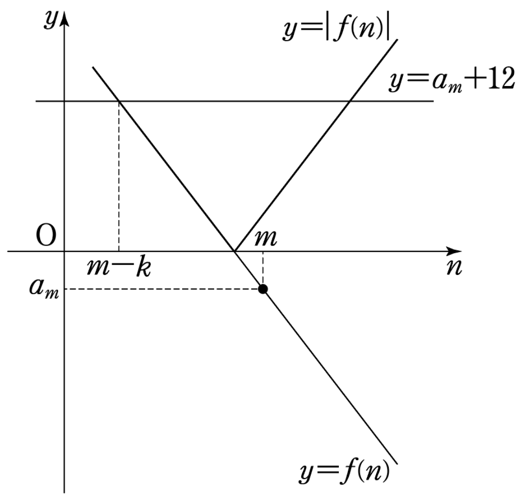
등차수열 $\{a_n\}$을 나타내는 직선 $y=f(n)$을 생각해보자.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -2이므로 직선 $y=f(n)$의 기울기가 음수이다.

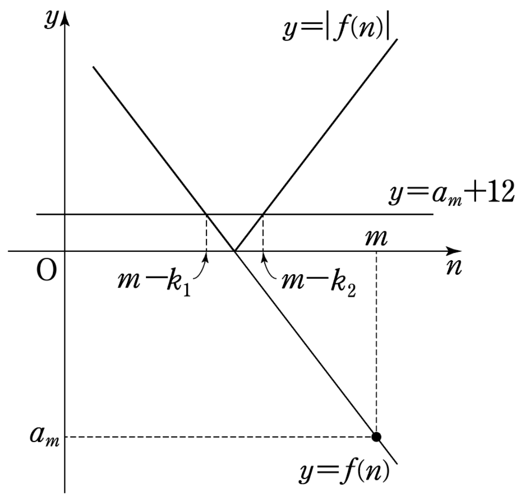
한편, $|a_{m-k}|=a_m+12$, $m>k$ …… ㉠ 에서

'함수 $y=|f(n)|$의 그래프'와 '직선 $y=a_m+12$'가 만나는 점의 x좌표가 $m-k$이다.

$a_1>0$인 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]의 경우 : ㉠을 만족시키는 자연수 k의 개수가 1이다.

직선 $y=f(n)$의 기울기가 -2이므로 $k=6$이다. 그런데 ㉠을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합이 10이어야 하므로 [그림 1]의 경우는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

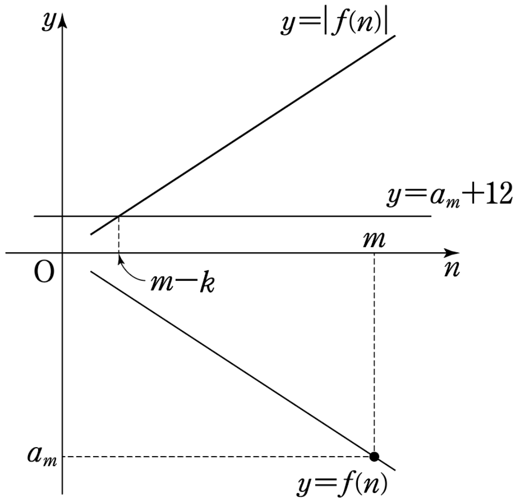
[그림 2]의 경우 : ㉠을 만족시키는 자연수 k의 개수가 2이다.

작은 것을 k_1, 큰 것을 k_2라 하자. 직선 $y=f(n)$의 기울기가 -2이므로 $k_1=6$이다.

$k_1+k_2=10$이어야 하므로 $k_2=4$이다. 이때 $|a_{m-6}|=|a_{m-4}|$이므로 $a_{m-5}=0$이다.

따라서 $a_{m+9}=a_{m-5}+14d=-28$이다.

[참고] $a_1 \le 0$ 인 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



㉠을 만족시키는 자연수 k의 개수는 1이고, 모든 자연수 k의 값의 합이 10이어야 하므로 (‘모든’이 신경 쓰이지만, 백번 양보해서) $k=10$이라 하자.

이때 $a_{m-10}<0$이고, $\underline{a_m} = a_{m-10}+10d = a_{m-10}-20 \ \underline{<-20}$이다.

그런데 $a_m+12>0$이어야 하므로 ‘$a_m<-20$’을 만족시키지 못한다.

따라서 이 경우는 가능하지 않다.