규토 고득점 N제

규토 고득점 N제

Contents

규토 고득점 N제 오리엔테이션

문제편

해설강의편

오리엔테이션

규토 고득점 N제
책소개

출판하고자 억지로 만든 문제가 아닌 제자들을 위해 정성과 애정으로 만든 문제

안녕하세요. 규토입니다. :D 처음 문제를 만들게 된 계기는 어떻게 하면 제자들에게 더 양질의 수업을 할 수 있을까 고민하던 중에 자작문제를 만들게 되었습니다. 문제를 풀 수 있니? 가 아닌 <u>이런 것도 있으니 꼭 알아가렴</u> 이라는 마음가짐으로 만들었습니다. 한 문제당 평균 3시간 이상씩 치열하게 고민하면서 문제를 만들었고 어떤 문제들은 하루 종일 고민한 적도 있었습니다. 창작을 하는 과정이 정말 힘든 것은 사실입니다. 그렇지만 만든 문제를 빨리 제자들에게 알려주고 싶은 기쁨과 설렘이 훨씬 더 크기 때문에 계속 만들 수 있었습니다.

한 문제를 풀어도 여러 문제를 푼 것처럼 느껴지는 문제

원래 문제를 만들 때 2~3개의 예제 문제를 적절하게 섞으면 4점짜리 문제가 탄생합니다. 그 2~3개의 예제문제들의 연결 관계를 파악해 풀어내는 것의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 보시면 아시겠지만 제 문제들은 대부분 4~5개의 연결 관계를 파악해야 풀 수 있는 문제가 대다수 입니다. 한 문제를 풀더라도 2~3문제를 푼 것 같은 느낌이드는 것도 이 때문입니다. 그러니 당연히 어려울 수밖에 없습니다. 4~5개의 연결 관계를 계속 해석 하다보면 2~3개짜리 연결 관계를 묻는 문제들은 자연스럽게 쉬워질 수밖에 없다고 생각합니다. 수능에서 수학을 치는 이유는 사고력과 논리력을 평가하기 위해서입니다. 단순계산이 아닌 사고력을 측정하는 것입니다. 최대한 사고력을 자극하는 문제들을 만들기 위해 노력했습니다.
고득점 N제 수1(36제)+수2(42제)는 총 78문제로 단기간에 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있습니다.

모든 문항마다 테마가 있는 문제

전 문제를 만들 때 항상 테마가 있습니다. 어떤 개념을 알려주고 싶을 때 문제로 그 정보를 전달하려고 노력합니다. 각 문제마다 어떻게 하면 제자들에게 효과적으로 내용을 복습하게 하고 사고력을 기를 수 있을까 치열하게 고민했습니다. 틀리셔도 됩니다. 그렇지만 그 개념들을 모조리 흡수해서 확실히 자기 것으로 만들면 다른 문제를 풀 때 큰 도움이 될 수 있다고 생각합니다.
다년간 수능을 치면서 느꼈던 것과 아이들이 생소해 하는 것을 어떻게 하면 전달 할 수 있을까 항상 생각합니다.
표시해서 별도로 보충 설명하였습니다. 단순히 문제만 푸는 것이 아니라 복합적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

4점짜리 자작문제들만 수록

쉽지만 중요한 4점부터 까다로울 수 있는 준킬러급 4점은 물론 어려운 킬러급 4점까지 모두 수록하였습니다. 따라서 1등급, 2등급을 변별하는 문제들만 집중적으로 대비하실 수 있습니다.

기존과 차별화된 해설지

기존의 딱딱한 해설지가 아니라 저자와 소통하는 느낌을 주도록 구어체로 만들었고 저자에게 직접 과외를 받는 느낌이 들도록 구성하였습니다.

① 출제의도 ② 해설 ③ 출제자의 한마디 이렇게 3가지로 구분되어있고 보충이 필요한 부분은 1) 표시해서 별도로 보충 설명하였습니다. 단순히 문제만 푸는 것이 아니라 복합적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

규토 고득점 N제
검토후기

문지유 / 울산대학교 의예과

안녕하세요! 울산대학교 의예과 20학번 재학 중인 문지유입니다. 문제집 검토는 처음이라 더 신경이 많이 쓰이고 떨리네요...

2019학년도 현역 수능 국어에서 역대급 불수능을 맛봤던 그때가 아직도 생생합니다. 2교시 수학 시간에 시간 부족으로 30번은 찍고 나와서 96점이라 생각했는데, 이게 웬걸? 저녁에 집에서 채점을 해 보니 도형의 극한 문제 계산 실수로 인해 92점을 받았더라고요. 현역 수능 이전에 그 어떤 모의고사에서도 계산 실수를 한 적 없는 제가… 그때 느꼈던 어이 없고 허무한 감정은 평생 잊을 수 없을 겁니다. 2020학년도 재수 수능 수학은 그래도 1년 더 공부했다고 30분 정도 시간이 남더군요. 검토를 할까 말까 고민하던 차에 그래도 재수생이고 시간도 남았는데 검토를 해야 하지 않나 싶어 검토하던 와중, 식은땀이 등에 쫙 흐릅니다. 30번 풀이를 검토하던 도중 계산 실수를 발견하고 이를 고쳐 100점. 검토가 아니었다면 학교가 바뀌었겠죠? 이처럼 나름 스펙타클한 감정을 겪었던 저는 지금도 검토가 참 중요하다고 수험생들에게 강조, 또 강조합니다. 실수도 실력이라는 말이 괜히 나오는 게 아니라는 거죠. 검토까지도 실력!

서론이 길었네요! 고등학생 때부터 재수생 시절까지, 온갖 기출문제집과 사설문제집을 넘나들며 풀었던 저는 원하는 입시 결과를 거머쥐고 꼭 대치동 현장강의 조교로 일하거나 문제집 검토 및 문제 만드는 일을 하고 싶었어요. 여러분들 중에서도 그런 사람이 있을 거라고 생각하고요. 우연히 좋은 기회로 이번에 제 버킷 리스트 중 하나인 문제집 검토 일을 하게 되어서 정말 영광입니다 :)

문제 및 해설강의 파트 검토를 진행할 때 제가 가졌던 마음가짐은 바로 이 책을 보며 공부하는 학생의 입장이 되어 생각해보는 것이었어요. 인터넷 강의가 많은 요즘은 강의를 들으며 이해를 하고 QnA 게시판에 질문을 남기고 답변을 받아 공부가 가능합니다. 오류나 오탈자 이외에도, 이 교재를 오롯이 혼자 보며 공부하는 수험생 여러분들이 온전히 이 문제집에 적혀 있는 글을 보고 이해하고 납득할 수 있겠는가, 혹시 보는 사람이 헷갈리도록 쓰여진 것은 없는가, 보기 불편한 점은 없는가를 위주로 어순, 줄 바꿈, 문장의 위치까지 꼼꼼히 검토했습니다.

규토 고득점 N제 문제집을 검토하며 처음부터 끝까지 느낀 것은 이 문제집을 학생들에 대한 무수한 애정을 가지고 만들었는지에 대한 감탄이었습니다. 구어체로 과외를 받는다고 느끼게끔 해설이 써져 있는 수학 문제집은 살면서 규토 N제가 처음이었어요. 문제도 사설 고득점 N제임에도 불구하고 터무니 없이 어렵게 꼬아서 낸 느낌이 전혀 없고, 깔끔한 case 분류 문제 위주로 구성되어 있어서 검토하는 내내 제가 고등학생 때 이 문제집을 알았더라면 참 좋았겠다는 생각이 끊이질 않았답니다.

계절이 또 하나 지나갑니다. 무더운 여름이 가고, 날씨가 쌀쌀해지면 이제 수능이 다가옴을 몸과 마음으로, 피부로 느낄 거예요. 규토 고득점 N제로 실력도 다지고, 실수하지 마시고, 검토 꼭 하시고! (그러려면 자신이 어떻게 푼 건지 한눈에 보기 좋게 풀이를 잘 정리해서 써내려가는 연습도 필요하겠죠?) 수능 날까지, 그리고 수능이 끝나는 오후까지! 끝까지 잘 버텨내서 좋은 결과, 본인이 바라는 결과 얻기를 간절히 바랍니다. 조금만 더 힘내세요! 파이팅~!! :D

조윤환 / 문성고등학교 교사

규토N제는 17수능 대비때 처음 접했던 것 같습니다. 친절한 해설과 Case 분류를 중요하게 다루는 색깔있는 문제들이 상당히 신선했습니다. 어느덧 5년이 지나 22수능 대비로 출간된 규토 고득점 N제는 이전보다 훨씬 더 깔끔하고, 평가원 스타일에 근접한 것 같습니다. 그러면서 친절한 해설과 Case 분류를 중시하는 규토만의 장점은 그대로 살아있습니다.
해설을 읽다보면 출제자가 제시하고자 하는 의도를 빠르게 파악할 수 있습니다. 특히 혼자서 공부하다 보면 해설이 이해가 가지 않는 부분이 많이 있을 텐데 해설이 친절하고 자세하다는 점은 규토 N제의 큰 장점 중 하나입니다. 특히 규토 라이트 N제를 학습한 학생이라면 고득점 N제가 아주 많은 도움이 될 것이라고 확신합니다.

송지훈 / 인하대학교 수학과

교육과정이 바뀐지 얼마 되지 않아 수험생 분들이 문제집 선정에 어려움을 겪으시라 생각합니다. 규토 고득점 N제는 이러한 시기에 수험생 분들이 믿고 고르시라고 추천할 수 있는 교재입니다. 수능 수학을 대비하는 데에 기출의 중요성은 누구나 다 아는 사실입니다. 하지만 요즘 시험들은 기출만 본다고 1등급 이상에 도달하기 쉽지 않습니다. 규토 고득점 N제는 1등급 이상을 목표로 하는 수험생분들을 위해 기출에 이미 나왔던 소재 혹은 그에 대한 응용이나 나오지 않았던 소재들을 바탕으로 한 문제들을 수록하여 이를 학습하는 수험생 분들이 1등급 이상으로 도약할 힘을 길러 줍니다. 이 교재를 푸시는 수험생 분들은 해당 책을 잘 활용하여 원하는 꿈을 이루시길 기원합니다.

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요, 2022 규토 고득점 N제 검토를 맡은 박도현입니다.
규토 고득점 N제는 수학 준킬러/킬러 유형들의 종합세트라고 생각하시면 됩니다. 그동안 기출에 나왔던 준킬러/킬러 뿐만 아니라 얼마 전에 시행된 6월 모의평가들의 문제유형들도 반영하고 변형한 여러 문제들을 연습하실 수 있습니다. 해설에서는 중요한 개념들만 있을 뿐만 아니라 문제 풀 때의 마음가짐과 관점들을 알려주며, 특히 실수하는 포인트들을 자세하게 짚어줍니다. 처음에 책을 풀 때 문제가 잘 안 풀린다고 기죽지 말아주세요! 해설을 정독하고 문제들을 여러 번 다시 풀 때야말로 실력이 느는 겁니다. 규토 고득점 N제를 완벽히 체화하면 거의 모든 문제들은 다 푸실 수 있을 겁니다. 모두 파이팅입니다!!

규토 고득점 N제
규토의 생각

규토 N제를 구매하신 수험생 여러분 모두 반갑습니다. ~ :D

앞의 오리엔테이션에서는 형식적인 “틀” 안에서 이야기를 했다면 이번에는 여러분과 편하고 자유롭게 이야기 해보려고 합니다~

편하게 질문을 받아볼까요~ 오! 저기 빨간 옷 입은 귀여운 여학생 말해보세요!

Q. 규토 고득점 N제 2022 수1+수2의 난이도가 어떻게 되나요?

사람마다 느끼는 난이도가 다르겠지만 최대한 객관적으로 말씀드릴게요ㅎㅎ

수학1 : 쉬운 4점~준킬러급 4점~킬러급 4점 정도이고 삼각함수와 수열위주로 구성되어있습니다.

수학2 : 준킬러급 4점 두 문제를 제외하면 모두 킬러급 4점 이라고 보시면 됩니다.
다항함수 개형 추론은 반드시 맞게 하겠다는 일념 하나로 만들었습니다. +_+ !
전반적으로 평가원보다 어렵습니다.

답변이 되셨나요? ㅎㅎ 또 없으신가요~ 저쪽 안경 쓴 남학생! 말해보세요~

Q. 기출은 어느 정도 풀고 문제집을 사야하나요?

꼭 기출문제를 체화시키고 보셨으면 좋겠어요. 기출문제를 보자마자 풀이과정이 떠오를 정도 일 때 푸시는 것을 권장합니다. 규토 n제 해설에서 복습으로 추천 드린 기출문제가 문제를 풀 당시 떠올랐다면 더할 나위 없이 좋겠죠? ㅎㅎ 안정 2등급 이상 (+기출완료) 또는 라이트 N제를 완벽 체화가 고득점N제 수1+수2를 풀 전제조건입니다.
그리고 만약 자신이 안정적인 1등급이 나온다면 시간을 재고 푸는 것도 방법이 될 수 있습니다. (킬러의 경우 10~15분 정도 잡고 풀어보세요~)
고득점 N제 수1+수2는 라이트 N제와 밀접하게 연계하여 설명하였습니다. (고득점 N제 수1+수2 해설에 같이 보면 좋은 라이트 N제 참고문항과 관련 개념페이지 수록) 나형 2~3등급 진동이신 분들은 라이트 N제를 풀고 고득점 N제로 넘어가시길 권합니다. 빈틈을 메워주고 더욱 더 단단하게 만들어 줄겁니다. 개인적으로 고득점 N제가기전에 확통을 응시하시는 분들은 라이트 N제를 하고 가셨으면 좋겠습니다.. 진짜 막힘없이 풀면 3~5일 컷도 가능합니다. 사실 기출킬러까지 대거 수록하여 절대 쉽지 않습니다. 고득점 N제에 넣어도 될 만한 자작문제도 라이트 N제에 다수 수록하였습니다.
(참고로 올해 고득점 확통은 라이트 확통에 흡수되었습니다. 라이트 확통과 미적분의 경우 라이트 수1수2에 비해 트레이닝 1스텝 난이도가 다소 높기 때문에 N제 느낌으로 보셔도 좋습니다.)

또 다른 분 계시나요~ 편하게 질문하세요~ 저기 박보영 닮으신 여학생! 말해보세요~

Q. 어떤 식으로 규토 n제를 공부를 해야할까요?

책에 규토 n제 100% 공부법이라고 적어놨어요.(앞에서 봤죠??ㅎ) 효과를 극대화하기 위해서 꼭 그렇게 해보셨으면 합니다. 아니 꼭! 제발 그렇게 해보셨으면 합니다. 아마 대다수의 학생들이 양치기 용도로 규토 n제를 대할 것 같아요. 여러 커뮤니티를 잘 살펴보면 규토 n제 0일 컷 가능? 이라는 말을 종종 볼 수 있는데요. 이건 정말 미친 짓이라고 생각해요. 문제만 풀면 정말 아무것도 남지 않습니다. 아 뭔가를 해냈구나! 라고 다소 기분만 좋을 뿐입니다. 시간이 지나면 어차피 기억나지도 않습니다. 바가지에 구멍 뚫어 놓고 물을 들이 부어보세요. 처음에는 막 넘칠 것처럼 보이지만 시간이 지나면 한 방울도 남지 않습니다. 복습도 열심히 하고 치열하게 고민(자기 스스로 논리력과 사고력을 자극해야 합니다)해야 질적 성장이 일어난다고 생각합니다. 규토n제 100%공부법에 적혀있는 대로 하시는 것이 best입니다. :D

아주 참여도가 좋네요 ㅎㅎ 저쪽에 N수의 포스를 뿜고 계신 아저씨(?!) 장난이고요. 남학생 말해보세요~

Q. 규토 n제 문항의 성격이 궁금합니다!

많은 분들이 오해하고 계시는 부분이 있는 것 같습니다. 규토 n제도 강의 교재입니다. 다만 다른 강의 교재와는 다르게 제가 책 속에 있을 뿐이죠. 그래서 해설편이 문제편보다 3.5배나 더 두껍습니다.
모든 문항들은 제자들을 위해서 만든 문제들입니다. 만들 당시에도 "현실성을 추구해서 모의고사 스타일로 만들어야지!" 라는 생각은 1도 하지 않았습니다. 그런 문제집들은 시중에 많으니까요. "어떻게 하면 한 문제를 풀면서 그동안 배웠던 스킬들과 교과개념들을 복습할 수 있게 만들지? 그리고 수능이 요구하는 사고력과 논리력을 향상시킬 수 있는 방법이 없을까?"를 고민한 끝에 만들게 되었습니다. 그렇기에 시중문제들과 달리 2~3개의 연결관계가 아닌 4~5개의 연결관계(+모래주머니 효과)를 풀어내도록 제작하였습니다. (다만 2021개정 이후부터는 기존문제 중 퀄리티가 떨어지거나 case가 지나치게 과도한 문항은 삭제시켰습니다.) 애초에 책 표지 뒤에도 써있지만 출판하고자 만든 문제들이 아니기 때문입니다. 그렇기에 문제만 풀고 마는 식, 다시 말해 양치기로만 문제집을 대하는 것은 절대 추천하지 않습니다. 양치기 하려면 다른 문제집을 알아보세요.
규토 n제는 해설을 완전히 정독하고 자기 것으로 만들어야지 규토를 풀었다고 말할 수 있습니다. 애초에 강의교재로 만든 것이니까요. 일종에 분석서? 같은 개념으로 보시면 될 것 같습니다. 제가 직접 만들었기 때문에 출제의도가 무엇이고 그 문제에 사용된 중요한 개념들, 같이 풀어보면 좋을 것 같은 기출문제, 코멘트 등이 자세히 수록되어 있습니다. ㅎㅎ또한 구어체로 만들었기 때문에 해설을 읽다보면 제가 말하는 소리가 들리도록 만들었습니다. 그래서 해설지라고 하지 않고 해설강의라고 명명하였습니다. :D

규토 고득점 N제

규토의 생각

자 마지막 한 분만 더 받을게요~ 저기 회색 후드티 입고 있는 남학생 ! 말해보세요

Q. 오늘 배송을 받았습니다. 풀어봤는데 수학2가 많이 어려워요. 괜찮을까요?

잘 안 풀리시는 것이 정상입니다 ㅎㅎ 그만큼 많이 성장할 수 있다는 것이니 너무 상심하지 마세요~ 최대한 100퍼센트공부법에 적힌대로 해보세요. 보통 문제들과는 다르게 한 문제씩 풀어보고 해설에서 배운 내용들을 다른 문제에 적용시켜보세요. (한 번에 여러 문제들을 풀고 한꺼번에 해설을 보시지 마세요.) 그냥 문제만 풀면 아무것도 남지 않아요. 그 문제를 완벽히 체화시키고 넘어가는 것이 좋습니다. 난이도 순서대로 배치했기 때문에 점진적으로 사고를 확장하실 수 있습니다. 그러니 너무 겁먹지 마세요 ㅎㅎ 규토 n제에 있는 문항들은 보통문제(2~3개의 연결관계)와는 다르게 4~5개의 연결관계와 복잡한 case분류를 하도록 제작했습니다. 운동선수들이 모래주머니를 차고 훈련하는 것과 마찬가지 효과를 얻도록 만들었습니다. (지금은 어려우실 수 있지만 나중에 체화하시고 시중문제들을 보시면 답이 너무 그냥 띡 나온다는 인상을 받게 되실 거예요. ㅎㅎ)
그리고 모든 문제들이 손쉽게 풀리면 그게 무슨 도움이 되겠습니까.. 기분은 좋을 수 있겠죠.. 그렇지만 틀린 것을 정복할 때! 바로 그때 질적 성장이 일어난다고 생각해요~ 해설도 자세히 써놨으니까(진짜 옆에 앉혀놓고 과외해준다는 생각으로 작성했습니다 흐흐) 이해하시는데 큰 무리는 없을 거예요 ㅎㅎ 화이팅입니다! 너무 기죽지마세요 그게 정상입니다. 양보단 질로 갑시다. 빨리 문제집을 끝내야지 보다는 (진짜 그건 미친짓이라고 생각해요.. 한번 보고 넘어가면 누누이 얘기하지만 딱히 도움이 되지 않습니다. 약간의 뿌듯함만 있을 뿐이에요.) 질적 성장이 일어날 수 있도록 치열히 고민해보고 복습도 하고 (100퍼센트공부법으로 하시는게 베스트입니다. 저도 그렇게 공부했었고 많은 제자들의 성장을 눈으로 봤습니다.) 그러셨으면 좋겠어요 ㅎㅎ

많은 학생들을 만나 보았는데요. ㅎㅎ 또 다른 궁금한 점(규토 N제 문제 질문 등)이 또 있으시면
언제든지 **규토의 가능세계** (네이버 질문카페)에 글을 남겨주세요~

〈맺음말〉

지금으로부터 17년 전 중학교 2학년이었던 규토는 "버킷리스트"라는 것을 작성하게 됩니다.
많은 항목들이 있었지만 그 중에서 가장 기억에 남는 것은 바로 저만의 책을 만드는 것이었습니다.
그로부터 12년 후 규토 수학 고득점 N제를 발간하게 됩니다.
첫 책을 받았을 때의 감동... 아직도 잊을 수가 없네요..ㅠㅠ
벌써 5년이라는 세월이 흘렀네요.

규토 수학 고득점 n제 2017 ⇒ 규토 수학 고득점 n제 2019 ⇒ 규토 수학 고득점 n제 2020 (가/나)
⇒ 규토 수학 라이트 N제 2021 (수1/ 수2) + 고득점 N제 2021 (가/나)

올해 나오게 될 규토 라이트 N제 2022 (수1/수2/확통/미적/기하), 고득점 N제 2022 (수1+수2/미적) 까지
아주 감개무량하네요. ㅎㅎ

내년에는 규토 라이트 N제 2023 (고1(상)/고1(하)/수1/수2/확통/미적/기하), 고득점 N제 2023 (수1+수2/미적/기하)를
모두 출판하는 것이 목표입니다.

계속해서 발전해 나가는 규토 N제가 되겠습니다! 내년 개정판은 더더욱 좋아지겠죠?-_-;;

올해부터는 네이버 카페 (규토의 가능세계)를 통해 질문을 받을 생각입니다~
https://cafe.naver.com/gyutomath

많은 가입부탁드립니다 :D

질문뿐만 아니라 각종 자료도 업로드하면서
차츰차츰 업그레이드 해나가겠습니다~ㅎㅎ

규토 N제를 푸시는 모든 분들께 감사의 인사를 전하면서 저는 해설로 찾아뵐게요~ :D

참고로

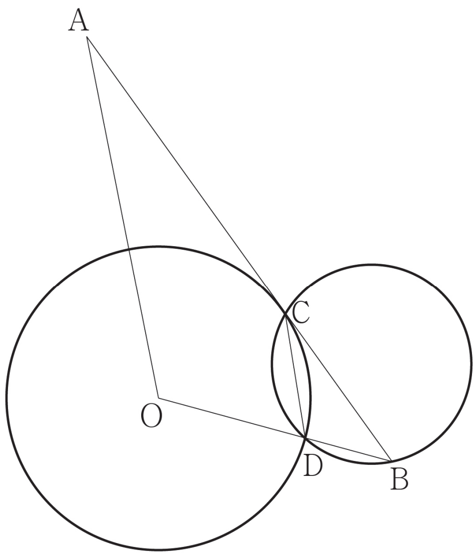
① 네이버 블로그 (규토의 특별한 수학) 이웃추가
② 오르비에서 (닉네임 : 규토) 팔로우
③ 네이버 카페 (규토의 가능세계) 가입

하시면 규토 N제에 대한 최신 소식(정오표 or 보충자료 등)을 누구보다 빠르게 받아 보실 수 있습니다~

07

정답 및 해설 p.022

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC}=2\overline{BC}$ 이다. 원과 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 BCD의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=15S_2$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오.



04

사차함수 $f(x)$는 $f'(3)=f(3)$ 이고, 다항함수 $g(x)$는 $g'(0)=3$ 이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a<0,\ b<0$ 인 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여
> $\dfrac{b}{h(b)-36}=\dfrac{a}{h(a)-36}$ 이다.
> (나) 함수 $|h(x)|$ 는 $x=p,\ x=3,\ x=4$ 에서만 극솟값을 갖는다.

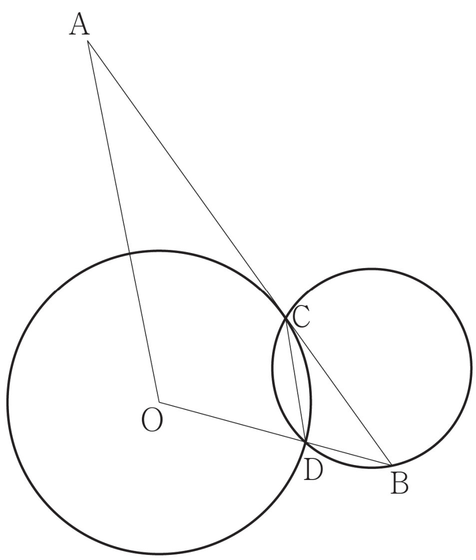
$\dfrac{h(8)}{p}$ 의 값을 구하시오.

정답 및 해설 p.121

수학2 영역

07

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC}=2\overline{BC}$ 이다.
원과 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 BCD의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=15S_2$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오.



| 출제의도 |

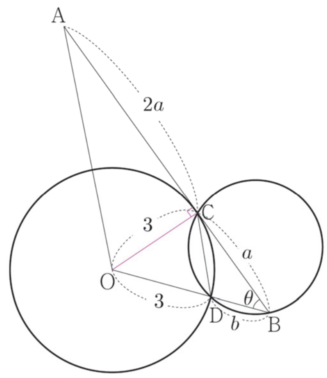
① $\angle OCB=90^{\circ}$
② $2S_1=15S_2$를 활용해 선분 BD의 길이를 구할 수 있는가?
③ "삼각함수 같다" technic과 코사인 법칙을 사용하여 선분 CD의 길이를 구할 수 있는가?
④ 사인법칙을 통해 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

해설강의

우선 원에 접한다고 했으니 보조선을 그어 봅시다~
(원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선 !)

$\overline{\mathrm{CB}}=a$, $\overline{\mathrm{BD}}=b$라 해봅시다~

$\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$ 라고 했으니까 $\overline{\mathrm{AC}}=2a$ 가 되겠죠?



$\angle\mathrm{DBC}=\theta$라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times 3a\times(3+b)\times\sin\theta$

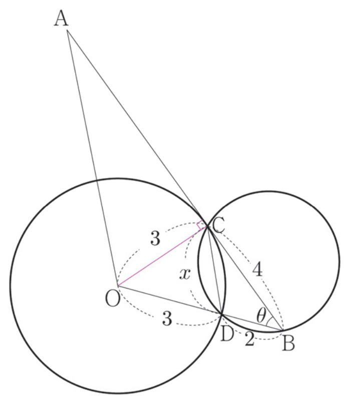
$S_2=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\theta$ 이겠죠? ㅎㅎ

$2S_1=15S_2$ 을 조건을 이용해봅시다~

$3a(3+b)\sin\theta=\frac{15}{2}ab\sin\theta \Rightarrow 6+2b=5b \Rightarrow b=2$

$b=2$이므로 $\overline{\mathrm{BO}}=5$가 되겠죠? 삼각형 BOC는 직각삼각형이니까

피타고라스의 정리에 의해서 $\overline{\mathrm{BC}}=4$가 되겠군요~



직각삼각형 OBC 을 이용하면 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 인 것이

자명하죠? 삼각형 BDC의 외접원의

반지름은 사인법칙으로 구하면 되니까

선분 CD의 길이만 찾으면 되겠군요~

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면

"삼각함수 같다" technic에 의해서

(삼각형 OBC에서의 θ와 삼각형 BCD에서의 θ는 서로 각이 같다.)

$\frac{4}{5}=\frac{2^2+4^2-x^2}{2\times2\times4} \Rightarrow \frac{64}{5}=20-x^2 \Rightarrow x^2=\frac{36}{5} \Rightarrow x=\frac{6}{\sqrt{5}}$

사인법칙에 의해서

$\frac{x}{\sin\theta}=2R \Rightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}=2R \Rightarrow R=\sqrt{5}$

따라서 외접원의 넓이는 5π겠군요~

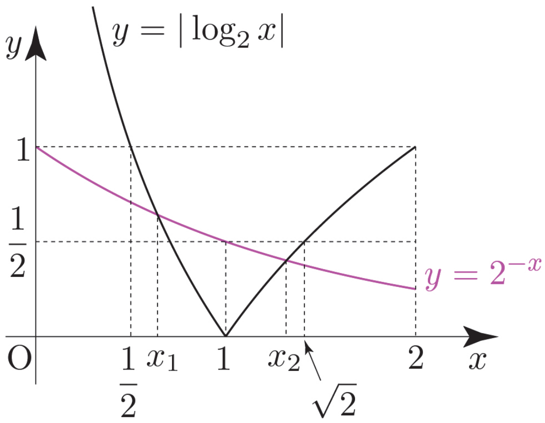
답 5

출제자의 한마디

가뿐하게 풀어보셨나요? ㅎㅎ 2022 고득점 N제 수1+수2에 수록된 삼각함수 문제들은 2022 예비시행 29번에 출제된 사인 코사인 법칙문제와 2022학년도 6월 평가원 12번, 15번을 기준으로 난이도를 설정하였습니다~
최대한 현실적으로 만들었으니 조금 더 현실감을 느끼고 싶으시면 시간을 재고 푸셔도 좋습니다 :)

보기 ㄱ에서 $\frac{1}{2} < x_1 < 1 < x_2 < \sqrt{2}$ 을 물어보았으니

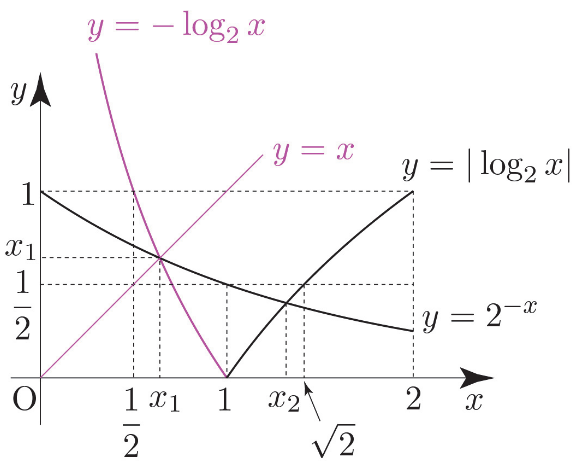
$\frac{1}{2}$ 과 1과 $\sqrt{2}$ 에 집중하여 보조선을 그어 판단해봅시다~



따라서 ㄱ은 참이겠군요~

그런데 $y = -\log_2 x$와 $y = 2^{-x}$는 [1]서로 역함수 관계이므로

$y = x$에 대하여 대칭이겠죠? 즉, $x_1 = -\log_2 x_1 = 2^{-x_1}$가 성립하겠군요~



보기 ㄴ은 $\log_2 \frac{1}{x_1 x_2} < x_1 - 2^{-\sqrt{2}}$인 것을 물어보았죠?

뭔가 복잡해 보이네요 -_-;; 조금 식을 변형해봅시다~

$$\log_2 \frac{1}{x_1 x_2} < x_1 - 2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow -\log_2 x_1 x_2 < x_1 - 2^{-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow -\log_2 x_1 - \log_2 x_2 < x_1 - 2^{-\sqrt{2}}$$

이때 $-\log_2 x_1 = x_1$이므로

$-\log_2 x_2 < -2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow \log_2 x_2 > 2^{-\sqrt{2}}$와 같겠죠?

1) <관계식>
$f(x)$와 $g(x)$가 서로 역함수관계이면 $f(g(x)) = x$가 성립하죠?

$-\log_2(2^{-x}) = x$이므로 $y = -\log_2 x$와 $y = 2^{-x}$는 서로 역함수임을 손쉽게 알 수 있습니다.

함수 $y=\log_2 x$에서 $x=x_2$일 때, 함숫값이 $\log_2 x_2$이고

함수 $y=2^{-x}$에서 $x=\sqrt{2}$일 때, 함숫값이 $2^{-\sqrt{2}}$이므로

앞서 그린 그림을 통해 판단하면 $\log_2 x_2 > 2^{-\sqrt{2}}$임이 자명하죠?

따라서 ㄴ은 참이겠군요~

이제 대망의 ㄷ을 판단해봅시다~

$$\frac{2^{-\sqrt{2}}-x_1}{x_2-x_1}<\frac{2^{-\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}-1}$$

하.. 살짝 막막하네요 -_-;; 어떻게 해야할까요?

우선 우변을 보니 $\left(\sqrt{2},\ 2^{-\sqrt{2}}\right)$ 와 $\left(1,\ 2^{-1}\right)$의 기울기로 해석할 수 있겠군요.

뭔가 기울기를 물어본 것 같은데 좌변을 해석하기가 만만치 않은 것 같습니다;;

라이트 N제에서도 계속 언급했지만 ㄱ,ㄴ,ㄷ문제는 ㄱ,ㄴ,ㄷ이 유기적으로
연결되어 있다는 생각을 반드시 해야 한다고 했었죠? ㄱ,ㄴ은 ㄷ을 위한
징검다리 역할일 가능성이 크기 때문이라고 했었죠?

잘 살펴보니 $2^{-\sqrt{2}}-x_1$가 굉장히 낯이 익죠?? ㄴ에서 등장했던 식이군요!

보기 ㄴ의 양변에 -1을 곱해봅시다~

$\log_2 x_1x_2 > 2^{-\sqrt{2}}-x_1 \Rightarrow \log_2 x_1+\log_2 x_2 > 2^{-\sqrt{2}}-x_1$

양변에 x_2-x_1을 나눠도 부등호 방향은 변하지 않겠죠? $\left(\because\ x_2-x_1>0\right)$

$$\frac{\log_2 x_2+\log_2 x_1}{x_2-x_1}>\frac{2^{-\sqrt{2}}-x_1}{x_2-x_1}$$

좌변을 기울기로 보기 위하여 $+\log_2 x_1$을 변형시켜봅시다~

$\dfrac{\log_2 x_2-\left(-\log_2 x_1\right)}{x_2-x_1}>\dfrac{2^{-\sqrt{2}}-x_1}{x_2-x_1}$ 이므로

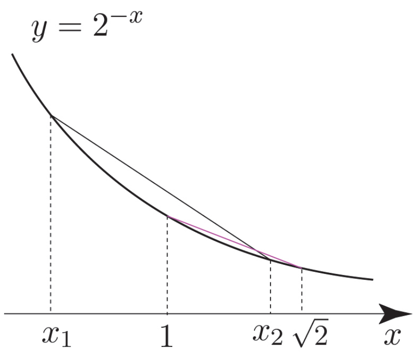
$\dfrac{2^{-\sqrt{2}}-2^{-1}}{\sqrt{2}-1}>\dfrac{\log_2 x_2-\left(-\log_2 x_1\right)}{x_2-x_1}$만 보이면 ㄷ은 참이겠죠?

이때 두 곡선 $y=\left|\log_2 x\right|,\ y=2^{-x}$가 만나는 두 점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$라 했으니

$\dfrac{\log_2 x_2-\left(-\log_2 x_1\right)}{x_2-x_1}=\dfrac{2^{-x_2}-2^{-x_1}}{x_2-x_1}$이겠죠?

즉, $\dfrac{2^{-\sqrt{2}}-2^{-1}}{\sqrt{2}-1} > \dfrac{2^{-x_2}-2^{-x_1}}{x_2-x_1}$만 보이면 ㄷ은 참이겠군요~

$y=2^{-x}$의 그래프를 그려서 판단해봅시다~



기울기가 음수이므로 $\dfrac{2^{-\sqrt{2}}-2^{-1}}{\sqrt{2}-1} > \dfrac{2^{-x_2}-2^{-x_1}}{x_2-x_1}$ 가 성립하겠군요!

따라서 ㄷ은 참이겠군요~

답 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제자의 한마디

역함수 관계를 물어보는 문제는 [2]라이트 N제에서도 많이 접해봤었죠? ㅎ
역함수 조건이 이용될지 안 될지 모르기 때문에 만약 역함수 관계가 보인다면 미리 표시해두는 것이 좋습니다. 이 문제에서도 문제풀이 도중에 역함수 관계를 이용하여 관계식 $x_1 = -\log_2 x_1 = 2^{-x_1}$을 끌어내는 것이 바람직합니다.

$a > c$를 바로 판단하기 힘드니 b를 도입하여 $b > c$, $a > b$인 것을 바탕으로 $a > b > c$임을 판단하는 것이 출제의도인 문제였습니다~

2022학년도 6월 15번 문제에서는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 유기적으로 연결되어 있다기 보다는 다소 독립된 보기를 물어보았습니다. 이렇게 독립적으로 출제될 수도 있지만 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 풀 때는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 [3]유기적으로 연결되어 있다는 생각을 해주시는 것이 좋습니다.

2) <참고>
라이트 N제 수1 문제편
p109 064번
p112 078번, 079번
p114 083번
p118 092번

3) <참고>
라이트 N제 수1 문제편
p120 096번

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$이겠군요~

답 45

출제자의 한마디

최근에도 극값의 개수를 물어보는 문제는 [2] 2021학년도 수능 나형 20번,
2022학년도 6월 평가원 20번에도 출제되었죠?
6월 평가원 20번 문제에서도 $g(x)$를 미분할 때, $f(x)$를 $\int$ 앞에 위치시키고
곱의 미분법을 이용하여 미분했었죠~? 라이트 N제에서도 충분히 훈련했으니
가뿐하게 푸셨으리라 생각합니다 ㅎ

절댓값을 바로 미분할 수 없으니 범위를 나눈 후 미분해주는 것도
라이트 N제에서 학습했었던 내용이었죠?

위 기출들과 다르게 한 걸음 나아가서 실수 전체의 집합이 아니라
주어진 [3] 열린구간에서 극값을 가지는 문제였죠? ㅎㅎ
항상 경계를 조심합시다~!

만약 극값이 아니라 극솟값이나 극댓값을 물어보았다면 $x=a$의 좌우에서
도함수의 부호변화의 유무에서 그치는게 아니라 $-$ $+$인지 $+$ $-$인지 유의해야겠죠?

2) <참고>
라이트 N제 수2 문제편
p272 112번

3) <참고>
라이트 N제 수2 문제편
p193 068번

05

최고차항의 계수가 1 이고 $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k = 1\ (k=1,\ 2,\ 3)$을

만족시키는 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 집합 S 를

$$S = \left\{ x \mid \int_1^x \{f'(t) - t\}dt = 0 \text{ 이고 } x \neq 3 \right\}$$

라 하고, $n(S) = 2$ 일 때, 집합 S 의 모든 원소의 합은?

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$

④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

| 출제의도 |

① $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k = 1$ 식을 통해 $f'(2) = 2$ or -2 로 case 분류할 수 있는가?

② $n(S) = 2$ 조건을 활용 할 수 있는가?

③ $f(x)$ 에 관해 식 세우기 !

해설강의

$\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k = 1$ (단, $k=1,\ 2,\ 3$) 이라고 했으니까 k에 각각 대입해보면

$f'(1) = 1$

$$(f'(2))^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 2 \\ f'(2) = -2 \end{cases}$$

$(f'(3))^3 = 27 \Rightarrow f'(3) = 3$

($f'(2) = 2$, $f'(2) = -2$가 될 수 있는 것이 point !)

이렇게 case 분류할 수 있겠죠?

① $f'(1) = 1,\ f'(2) = 2,\ f'(3) = 3$

② $f'(1) = 1,\ f'(2) = -2,\ f'(3) = 3$

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$

조심하세요!
$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이니까 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?

자 이제 식 세우기를 해봅시다!
$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두고 문자가 3개 이고 식이 3개 이니까 풀 수 있겠죠?
그렇지만 ! 더 효과적으로 식 세우는 방법을 알려드리고자 이 문제를 만들었어요.
일단 $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$ 에서 오른쪽 항을 왼쪽으로 넘기면
$f'(1)-1=0$, $f'(2)-2=0$, $f'(3)-3=0$ 이렇게 되겠죠?

여기서 $f'(1)$ $f'(2)$ $f'(3)$ 를 $f'(x)$ 로 변환하면
-1 -2 -3 을 $-x$ 라고 쓸 수 있겠네요.

$f'(x)-x=h(x)$ 라고 하면 $h(1)=0$, $h(2)=0,\ h(3)=0$ 을 만족하므로
$(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 인수로 가지겠죠? 또한 $f'(x)$가 삼차함수니까 $h(x)$는
당연히 삼차함수가 돼요. 여기서 $-x$ 는 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지
않으니까 $h(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?
결국 $h(x)$ 는 최고차항이 계수가 4인 삼차함수군요 !
$\therefore h(x)=f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$

따라서 [1] $f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)+x$ 라는 식을 세울 수 있어요.

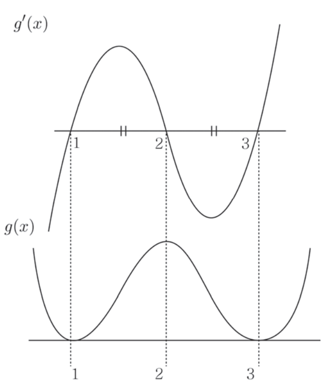
$\int_1^x \{f'(t)-t\}\,dt = g(x)$ 라고 보면

$S=\left\{ x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3 \right\} \Rightarrow S=\{ x \mid g(x)=0 \text{ 이고 } x\neq 3 \}$

(기억하세요! 이 technic! $g(x)$ 로 보는 순간 문제를 굉장히 쉽게 접근할 수 있어요.)

$g'(x)=f'(x)-x$ 와 $g(1)=0$ 을 뽑아먹을 수 있겠네요.
(거의 기계처럼 나와야 해요~)

$f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$ 이기 때문에 그림을 그리면



[2] $g'(x)$가 $(2,\ 0)$ 에 점대칭 되어져 있으니까
x축과 둘러싸인 넓이가 서로 같겠죠?
따라서 $g(x)$를 그리면 $x=2$에 대칭된 사차함수가 나와요.
$g(1)=0$ [3] x축 설정 ! (다음페이지에 설명)

$g(x)=0$ 이 되는 것은 $x=1$, 3 이죠?
그렇지만 $x\neq 3$ 이기 때문에 $x=1$만 돼요.
따라서 $n(S)=1$이니까 조건을 만족하지 않겠죠?

1)
처음에는 어렵지만 계속 연습하다보면 너무나 당연히 식을 세울 수 있을 거예요.

<참고>
라이트 N제 수2 문제편
p174

ex)
최고차항의 계수가 1인
삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2$, $f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$
한번 적용시켜 보세요.
다음 페이지에 답을 적어 놓을게요.

2)
$g'(x)$가 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있는 것을 직관적으로 보고 알 수 도 있지만 식으로 보이려면 어떻게 해야 할까요?

$f(x)+f(2a-x)=2b$
이 의미하는 것이 $f(x)$ 가 $(a,\ b)$ 에 점대칭 되어 있다는 것이니까
$f(x)+f(4-x)=0$ 만
만족시키면 되겠죠?
$4(x-1)(x-2)(x-3)+$
$4(3-x)(2-x)(1-x)=0$
성립하네요 !

따라서 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있다고 할 수 있어요~

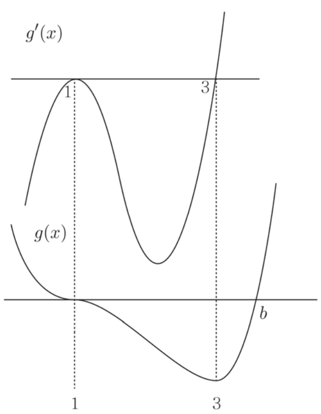
<참고>
라이트 N제 수2 문제편
p177

② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

마찬가지로 식을 세워볼까요~ 여기서는 $f'(1)-1=0,\ f'(3)-3=0$ 밖에 없으니까
한 번에 $f'(x)-x$ 를 구할 수는 없어요. 저번에 배운 미지수 technic !을 써볼게요~

$f'(x)-x = 4(x-1)(x-3)(x-a)$

☆ 여기서 $(x-a)$ 라고 쓴 이유는 ?
$f'(x)-x$ 가 삼차이고 서로 다른 2개의 실근을 갖기 때문에 무조건 실근 하나를 더 가져야 하겠죠?
$f'(2)=-2$ 를 만족해야하니까 $x=2$ 를 대입하면
$f'(2)-2=4(2-1)(2-3)(2-a)$
$f'(2)-2=-4(2-a)=-8+4a$
$-4=-8+4a \Rightarrow a=1$
$\therefore f'(x)-x=4(x-1)^2(x-3)$ case ① 과 마찬가지로
$g'(x)=4(x-1)^2(x-3)$ 그래프를 그리면



$g(1)=0$ x축 설정!

$g(x)$ 에 대해 식을 세워봅시다 ! 나올 때 마다 적용시켜주세요~ 미지수 b 놓고 식을 세우면
$g(x)=(x-1)^3(x-b)$

$g'(x)=3(x-1)^2(x-b)+(x-1)^3$
$\quad =(x-1)^2(3x-3b+x-1)$
$g'(3)=0$ 이니까 $b=\dfrac{11}{3}$

결국 구하고자 하는 것은 $g(x)=0$ 을 만족하고 3이 아닌 x값이죠?
따라서 $S=\left\{1,\ \dfrac{11}{3}\right\}$ 가 되겠죠?

답 ③ $\dfrac{14}{3}$

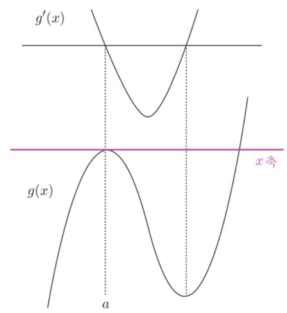
출제자의 한마디

만약 관성적으로 풀어서 $f'(2)=-2$ 를 보지 못했다면 당황할 수 있는 문제에요.
너무나 당연하지만 막상 긴장상태에서 풀면 보이지 않을 수 있어요.
조심하세요~집합 S에 있는 $x\neq 3$ 이라는 조건을 준 이유는 case ①을 제거해 주기 위해서에요.
$\displaystyle\int_1^x \{f'(t)-t\}\,dt = g(x)$ 로 바꾸는 technic 도 꼭 챙겨가세요.
계속 식 세우기 문제가 나오고 있죠? 적용시켜 보셨나요?
앞으로도 계속 나오니까 꿈에 나올 정도로 반복해서 적용시켜주세요~
이 문제집에서 식 세우기만이라도 완벽히 알아 가면 문제 풀 때 큰 도움이 될 것이라 생각해요.

3)
① $g(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$
② $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$
①, ②차이점은 무엇일까요?

①도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 이고

②도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 에요.
①은 x축이 어디 있는지 모르지만
②는 $g(a)=0$ 임을 토대로 x축을 설정할 수 있어요.



<참고>
라이트 N제 수2 문제편
p248

1) <정답>
ex)
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$

답은
$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$

06

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{x-a}=0$
(나) $f(x)-f(4-x)=g(x)-g(4-x)$
(다) $\int_a^2 f'(x)\,dx = \int_a^2 g'(x)\,dx + 16$

$f(6)-g(6)$의 값은? (단, a는 실수이다.)

① 142 ② 144 ③ 146 ④ 148 ⑤ 150

| 출제의도 |

① $f(x)-g(x)=h(x)$ 라고 보고 조건을 reading 할 수 있는가? (New 함수 technic !)

② $f(x)-g(x)$ 에 관한 식 세우기 !

해설강의

이 문제의 핵심은 $f(x)-g(x)=h(x)$ 라고 두는 거에요.
(참고로 $f(6)-g(6)$ 의 값은 ? 에서 힌트를 드렸어요. :D 느끼셨나요?)

New 함수 두는 technic ! 기억하세요. 이전에도 $\int_a^x f(t)\,dt = g(x)$ 로 보는 technic 있었죠? 같은 맥락에서 기억해주세요~

$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수겠지요?

(가) 조건부터 바꿔 봅시다 !

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{x-a}=0$$

[1] 분모가 0으로 가는데 수렴하므로 당연히 분자는 0으로 가겠죠?

1)

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a \ (a\text{는 상수}) \\ \lim_{x \to 0} g(x) = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ 라 두면

$\lim_{x \to 0} h(x) = a$ 겠죠?

$f(x)=h(x)\,g(x)$ 라고
변형해서 양변에 극한을 취하면

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x)\,g(x)$

$h(x)$, $g(x)$ 는 수렴하니까

$\lim_{x \to 0} h(x)\,g(x)$
$= \lim_{x \to 0} h(x) \lim_{x \to 0} g(x)$
$= a \times 0 = 0$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

<참고>
라이트 N제 수2 문제편
p41

그래프를 그리려고 하는데 무엇 때문에 난감하나요?
바로 a 때문이죠? 그래프를 그릴 때 x축에 접하는 a 값에 따라 그래프가 달라지겠네요?

크게 몇 가지로 case 분류할 수 있죠?

그래요. ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분할 수 있어요.
$x<0$ 일 때를 살펴볼까요? 자 $x<0$ 일 때는 $(x+a)^2x(x-a)$ 라고 했죠?
이것도 그래프를 그리려고 하니까 a 때문에 난감해요. 따라서 a 에 따라 case분류를 해줘야 해요.
case 분류를 해주면 마찬가지로 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분이 되겠죠?
결국 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 경우만 case분류하면 되겠네요.

여기서 잠깐 !
"아니 그럼 규토쌤 무조건 이런 문제가 나오면
① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 로 case 분류해야 하나요?"
[1] 여러분이 대답해주세요. 아니죠? 그래프를 그리려니까 a 때문에 난감해서
같은 그래프 개형이 나오도록 a 의 범위를 case 분류 한 거예요.

이제 A 집합의 의미를 파악해볼게요.

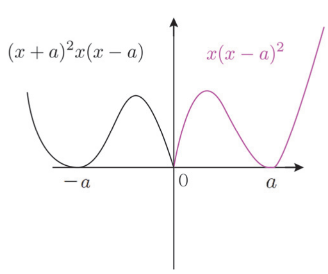
$$A=\left\{t \mid \lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\neq\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right\}$$

$x=t$ 에서 우미분계수와 좌미분계수가 다르다는 의미에요.
결국 미분이 불가능한 점의 x좌표가 A집합의 원소가 되겠죠?

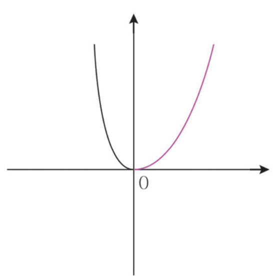
B집합은 $B=\{t \mid f(x)$ 는 $x=t$ 에서 극솟값을 갖고 $t\neq 0\}$ 라고 했는데요.
극솟값을 가지면서 $t\neq 0$ 를 만족해야 해요. 왜 하필 $t\neq 0$일까요?
조건을 만족시키는 case를 제거하기 위함이에요~
출제자가 조건을 줄 때는 무엇인가 의도가 있다는 거예요. +_+

이제 a 에 따라 case 분류 해봅시다!

① $a>0$

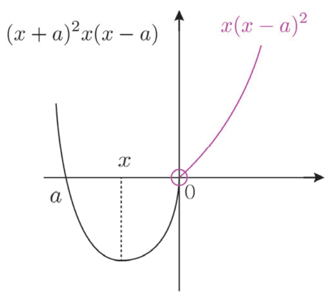


② $a=0$



1)
$f(x)=(x-1)(x-a)^2$
이면
① $a>1$
② $a=1$
③ $a<1$
이렇게 3가지로 분류할
수 있겠죠?
이해 되셨나요?

③ $a<0$



여기서 point !
$x=0$에서 미분이 불가능해 보이시나요?
보기에는 그렇지만 가능할 수도 있고
불가능할 수도 있어요.
미분가능하려면 $x=0$에서
좌미분계수와 우미분계수가 같아야겠죠?
여기서 $x=0$에서 우미분계수는
$y=x(x-a)^2 \Rightarrow y'=(x-a)^2+2x(x-a)$ 이므로
a^2 이 되겠죠?

좌미분계수는 $y=(x+a)^2x(x-a) \Rightarrow y'=2(x+a)x(x-a)+(x+a)^2(x-a)+(x+a)^2x$
이므로 $-a^3$ 이 되겠죠?
$a^2=-a^3$ 를 만족하는 a값에 한해서 $x=0$에서 미분이 가능해요.
$a^3+a^2=a^2(a+1)$ $a=0$ 와 $a=-1$ 이 나오지만 $a<0$ 이므로 $a=-1$ 만 되겠죠?
따라서 $a=-1$ 이면 A집합은 공집합이 나오겠군요.

이제 조건들을 따져봅시다 !

	① $a>0$	② $a=0$	③ $a<0$	
A집합	$\{0\}$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\varnothing$
B집합	2) $\{-a,\ a\}$	$\varnothing$	3) $\{X_1\}$	$\{X_2\}$
조건만족	$A\cup B=B$ (X) $B\neq\varnothing$ (O)	$A\cup B=B$ (O) $B\neq\varnothing$ (X)	$A\cup B=B$ (X) $B\neq\varnothing$ (O)	$A\cup B=B$ (O) $B\neq\varnothing$ (O)

따라서 조건을 모두 만족시키는 case는 ③ $a<0$ 에서 $a=-1$ 일 때예요.

$$f(x)=\begin{cases} x(x+1)^2 & (x\geq 0) \\ (x-1)^2x(x+1) & (x<0) \end{cases}$$

$f(4)=4\times 25=100$

답 ① 100

출제자의 한마디

이 문제의 point 는 $f(x)$ 를 그리기 위해 4) a에 따라 case 분류를 하는 것과
③ $a<0$ 에서 a가 -1일 때 미분가능이 됨을 파악하는 것이에요.
이 문제를 만들게 된 계기는 “계산은 최대한 줄이고 사고력으로만 접근하도록 문제를 만들 수 없을까”를 고민하던 중 탄생한 문제에요.
개인적으로 마음에 드는 문제 중 하나입니다~ 여러분도 풀면서 재밌지 않으셨나요? ㅎㅎ
5) 비슷한 문제를 라이트 N제에서 이미 학습한 바 있었죠?

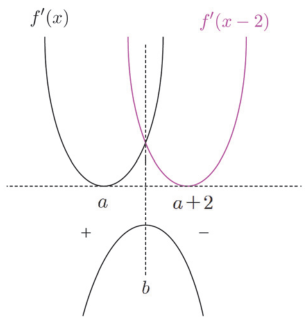
2)
$t\neq 0$ 때문에
$\{-a,\ 0,\ a\}$ 가 아니라
$\{-a,\ a\}$ 가 되겠죠?

3)
$\{X\}$ 에서 X를 직접 구할 수도 있지만 구하는 것을 의도하진 않았어요.

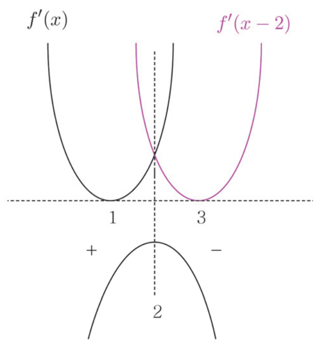
4) <참고>
라이트 N제 수2 문제편
p264 092번

5) <참고>
라이트 N제 수2 문제편
p131 050번

$f(x)$ 는 삼차함수니까 $f'(x)$ 는 이차함수가 되겠죠?



여기서 $f'(a)$ 의 함숫값은 중요하지 않아요.
$f'(x-2)$ 는 $f'(x)$ 를 x축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프죠? $f'(x)$ 와 $f'(x-2)$ 가 만나는 점을 경계로 왼쪽은 $f'(x-2)-f'(x)$ 의 부호가 + 가 되고 오른쪽은 − 가되겠죠? 따라서 $g(x)$ 를 그리면 $x=b$에서 극댓값을 갖는 그래프가 나와요.
(가) 조건에서 $x=2$ 에서 최댓값을 가지니까 $b=2$
a 와 $a+2$ 는 $x=2$ 에 대칭이므로
$2a+2=4 \Rightarrow a=1$



따라서 다음과 같은 그래프가 나오겠죠?
$f'(x)=2(x-1)(x-p)+(x-1)^2$
$f'(x)$ 을 미분해서 $x=1$을 넣으면 0이 되겠죠?
($f'(x)$ 가 $x=1$에서 극솟값을 가지니까요~)
$f''(x)=2(x-p)+2(x-1)+2(x-1)$
$f''(1)=2(1-p)=0 \Rightarrow p=1$
따라서 $f(x)=(x-1)^3$ 가 돼요.

[1] 물론 대칭성을 이용하지 않고 식으로 접근해도 Good이에요~

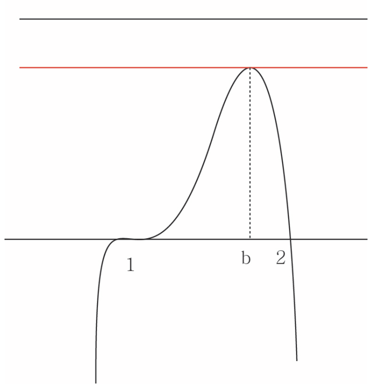
$f(x)=(x-1)^3$ 이니까 $g'(x)=3(x-3)^2-3(x-1)^2=-12x+24$

$$g(2)=\int_2^0 f'(t)\,dt+k=f(0)-f(2)+k=-2+k$$

$$g(1)=\int_1^{-1} f'(t)\,dt+k=f(-1)-f(1)+k=-8+k$$

결국 (나)를 통해 k 의 범위를 알아내면 되겠군요.

$-12(x-1)^3(x-2) \le \dfrac{-2+k}{64}$ 그래프를 그려서 함수로 생각해봅시다~



$$y'=-3(x-1)^2(x-2)-(x-1)^3$$
$$=-(x-1)^2(4x-7)$$

따라서 $b=\dfrac{7}{4}$ 겠네요~

$$-12\left(\frac{7}{4}-1\right)^3\left(\frac{7}{4}-2\right)=\frac{81}{64}$$

$$\frac{81}{64} \le \frac{-2+k}{64} \Rightarrow 83 \le k$$

1)
식으로 접근해볼게요~
$f(x)=(x-1)^2(x-p)$
라 두고 미분하면
$f'(x)=(x-1)(3x-2p-1)$
겠죠?

$g(x)$ 도 다항함수이기 때문에 $x=2$ 에서 최댓값을 가지려면 $g'(2)=0$를 만족해야 돼요.
따라서
$f'(0)-f'(2)=0$ 이 되는 p 를 찾아주면 되겠죠?

$f'(0)=2p+1$

$f'(2)=5-2p$

$$f'(0)-f'(2)=2p+1-5+2p$$
$$=4p-4$$

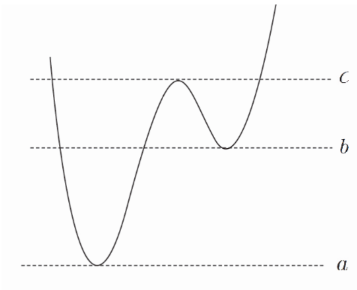
$\therefore p=1$

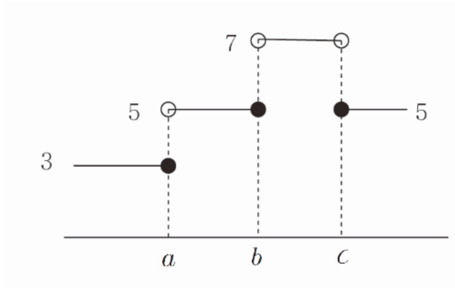
"아니 규토쌤 그냥 식으로 접근하면 이렇게 쉬운데 무엇하러 이렇게 까지 대칭성을 이용하나요?"

이 문제에서는 식이 굉장히 쉽게 느껴지죠? 그렇지만 $f'(x)$ 가 굉장히 복잡하면 문제를 구하기 어려울 수 있어요. 그 때는 쪼개서 생각하는 것이 훨씬 쉬울 수 있어요.
꼭 두 개다 알아가세요~

$f'(1)=f(1)=0 \Rightarrow (x-1)^2$ 로 case 분류 해보면

① 접할 때의 t를 각각 $a,\ b,\ c$ 라고 하고 $g(t)$ 그래프를 그리면





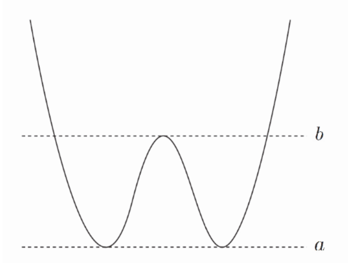
다음과 같이 그릴 수 있겠죠 ?

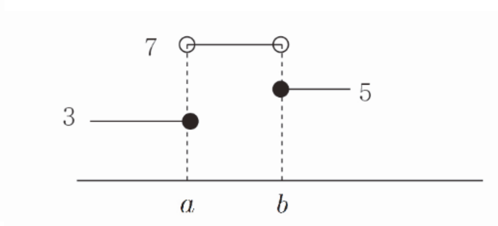
$A=\left\{a \mid \lim_{t\to a-} g(t) \neq g(a)\right\}$ 가 의미하는 것은 좌극한값과 함숫값이 다른 점을 찾으라는 것이에요. case ①일 때 찾아보면 $\{c\}$ 겠죠 ?

$B=\left\{a+16 \mid \lim_{t\to a+} g(t) \neq g(a)\right\}$ 가 의미하는 것은 우극한값과 함숫값이 다른 점을 찾으라는 것이에요. 마찬가지로 찾아보면 [1] $\{a+16,\ b+16\}$ 겠죠?

원소의 개수조차 다른데 $A=B$ 라고 했으니까 당연히 틀리겠죠?
다른 case 도 따져봅시다~

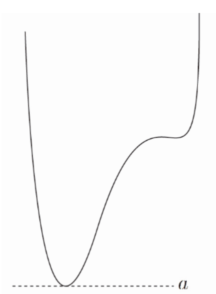
② 접할 때의 t를 각각 $a,\ b$라고 하고 $g(t)$ 그래프를 그리면

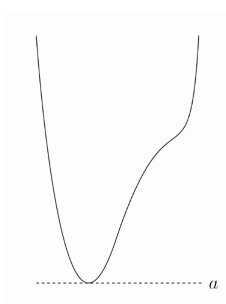


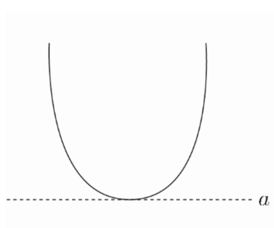


$A=\{b\}$ $B=\{a+16\}$ 겠죠? 오 ! $A=B$가 성립할 수 있겠네요.
결국 $A=B$가 의미하는 것은 극솟값+16=극댓값 이에요~

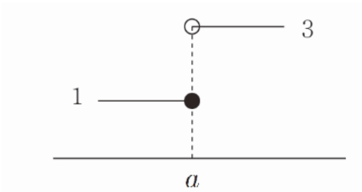
③ 접할 때의 t를 a라고 하고 $g(t)$ 그래프를 그리면







1)
조심하세요!
B집합은 불연속점의 x값에 16을 더해줘야 해요. 설마 A집합 안에 있는 a와 B집합 안에 있는 a가 같은 a라고 하진 않으셨죠? 집합의 표현 방법 중 조건제시법을 나타낸 것이에요. 원소가 무엇이 되는가를 알려주는 수단에 불과해요. 헷갈리시면 안 돼요.



$A=\varnothing$ $B=\{a+16\}$ 이니까 $A=B$ 일 수 없겠죠?

따라서 결국 ! 만족하는 case 는 ②뿐이겠죠?

②개형이면서 $f'(1)=f(1)=0 \Rightarrow (x-1)^2$ 을 만족하는 case는 몇 가지죠?

2가지요? 하하 이 문제를 풀었던 대부분의 학생들이 답을 34 라고 해서 틀렸어요.

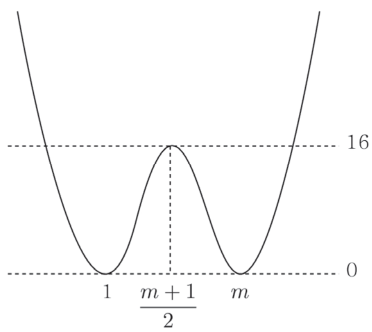
흐흐 일부러 실수하라고 34 를 보기에 넣었거든요. 보기에 34가 없었으면 다시 풀었겠지만

34를 보는 순간 아~ 답이구나 하고 찍을 수밖에 없으니까요.

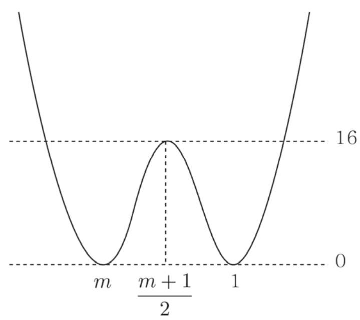
경각심을 주기 위해서 넣었어요. 조심하세요! case는 총 3가지에요~

이제 case분류 해보고 이때까지 배운 식 세우기 technic ! 을 총동원해서 식을 세워봅시다 !

② i) $m>1$



② ii) $m<1$



미지수 technic ! 기억나시죠?

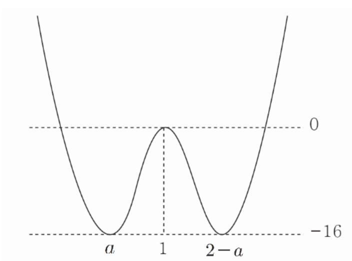
$f(x)=(x-1)^2(x-m)^2$ 여기서 m을 어떻게 찾죠? [2]극댓값을 갖는 x좌표를 구하면

$f\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=\dfrac{(m-1)^4}{16}=16 \Rightarrow m=5,\ -3$

따라서 ② i) 는 $f(x)=(x-1)^2(x-5)^2$ 가 나오고

② ii) 는 $f(x)=(x-1)^2(x+3)^2$ 이 나와요.

② iii) 극댓값의 x좌표가 1인 경우



$x=1$ 에 대칭되어 있는 것을 이용해서 식을 세우면 $a<1$ 과 $a>1$ 인 case로 나눌 수 있어요.

저번에 배웠었죠? 해보니까 둘 다 똑같은 식이 나온다는 것을 이미 알고 있으니까 $a<1$ 인 case만 해볼게요.

$f(x)-(-16)=(x-a)^2(x-(2-a))^2$

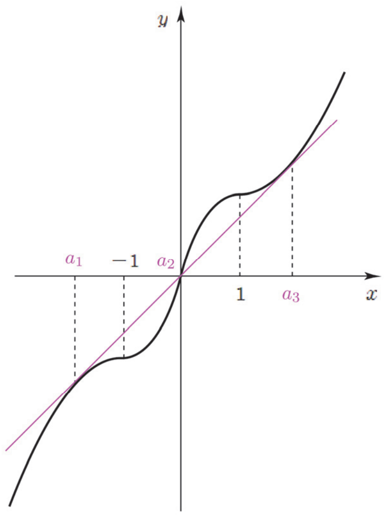
$f(1)=0$ 이니까

$16=(1-a)^4 \Rightarrow a=-1,\ 3$ 가 나와요.

a는 $a<1$ 니까 $a=-1$이 되겠죠?

따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-3)^2-16$ 가 나와요.

2)
물론
$f(x)=(x-1)^2(x-m)^2$
을 미분해서 극댓값을 갖는
x 좌표를 찾을 수도 있지만
대칭성을 이용하면 훨씬
빠르겠죠?



a_3 만 구하면 a_1은 대칭성으로 구하면 되겠죠? ($a_3 = -a_1$)

$x>1$일 때 $F(x)$를 구해봅시다~

$$F(x) = \int_0^x |f'(t)|dt = \int_0^1 f'(t)\,dt + \int_1^x -f'(t)\,dt = 2f(1)-f(x)$$

(사실 이렇게 식으로 하지 않고 $f(x)$ 를 $y=f(1)$ 에 대하여 대칭시키고
평행이동 시켜주면 되겠죠? ㅎㅎ [1] $F(x)=2f(1)-f(x)$로 바로 나오죠? ㅎ)

$a_3=t$라 두면 $F(t) = 2f(1)-f(t) = t$, $F'(t) = -f'(t) = 1$ 를 연립하면 되겠죠?

$$\frac{4}{k}+\frac{t^3-3t}{k}=t \Rightarrow t^3-3t+4=kt \;,\; \frac{3t^2-3}{k}=1 \Rightarrow 3t^3-3t=kt$$

$$t^3-3t+4=3t^3-3t \Rightarrow 2t^3=4 \Rightarrow t^3=2$$

따라서 $(a_3)^3=2$가 나오겠죠?

이제 마무리 계산해봅시다~

$\{g(a_3)\}^3=(a_3)^3$, $\{g(a_1)\}^3=(a_1)^3=-(a_3)^3$ ($\because a_1=-a_3$) 이므로

$\therefore \{g(a_3)\}^3-\{g(a_1)\}^3 = 2-(-2)=4$

답 4

출제자의 한마디

이 문제의 핵심은 [2] $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그리는 것이에요~ 처음이니까
case분류해서 그림을 그렸지만 이제는 $f(x)$ 만 보고도 그림을 그릴 수 있어야 해요.
[3] 2019년 7월 교육청 수학 나형 30번 문제를 찾아서 적용해보세요~
(문제를 만들고 나서 하필...재작년 7월에 나와 가지고....ㅠ 얼마나 허탈하던지;;;
근데 적중을 목적으로 규토N제를 푸는 건 아니잖아요? ㅎㅎ)

1)
$2k-f(x)$ 라는 말은
$y=f(x)$를 $y=k$에
대칭시키라는 말이에요.
$y=f(x)$ 그래프를
$y=k$에 대칭시키고 싶으면
$y \to 2k-y$ 를 넣어요.
$2k-y=f(x)$ 정리하면
$y=2k-f(x)$ 가 나오죠?

2) <참고>
라이트 N제 수2 문제편
p257 058번
p267 103번

3) <참고>
라이트 N제 수2 문제편
p273 117번