2014 연세대 수리논술 문제 풀이 - 난만한

[1-1]

기$f'(x) = 2x = m$에서 $x = \frac{m}{2}$이므로 접선의 방정식은 $y = m\left(x - \frac{m}{2}\right) + \frac{m^2}{4}$, $x = 0$을

대입하면 $y = -\frac{m^2}{4}$이다. ⋯ ①

$mx - f(x) = mx - x^2$을 미분하면 $m - 2x$이므로 $x = \frac{m}{2}$에서 최댓값을 가진다.

$x = \frac{m}{2}$을 대입하면

$\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{4} = F(m)$ ⋯ ②

따라서 ①, ②에서 $-F(m) = -\frac{m^2}{4}$

[1-2]

(1)

$mx - (ax^2 + bx + c)$의 도함수는 $m - (2ax + b) = m - b - 2ax$이므로 $x = \frac{m-b}{2a}$에서 최댓값을 가진다. 대입하면 $m\left(\frac{m-b}{2a}\right) - \left\{a\left(\frac{m-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{m-b}{2a}\right) + c\right\} =$

$\left(\frac{1}{4a}\right)m^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)m + \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$이다.

따라서 $F(x) = \left(\frac{1}{4a}\right)x^2 + \left(\frac{-b}{2a}\right)x + \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$인데, $a > 0$에서 $\frac{1}{4a} > 0$이고 실수는 사칙연산에 대하여 닫혀있으므로 $-\frac{b}{2a}$, $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$또한 실수이다. 즉, $F(x)$는 집합 B의 원소이다.

(2)

$f(x) = ax^2 + bx + c$이면 $f_1(x) = T(f) = F(x) = \left(\frac{1}{4a}\right)x^2 + \left(\frac{-b}{2a}\right)x + \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$이다.

$f_2(x) = (T \circ T)(f) = mx - \left(\frac{1}{4a}\right)x^2 + \left(\frac{b}{2a}\right)x - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$이므로 미분해서 최댓값을 찾자. ⋯ ①

미분하면 $m + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}x$이므로 $x = 2am + b$에서 최댓값을 갖는다. $x = 2am + b$을 대입하면$m(2am + b) - \left(\frac{1}{4a}\right)(2am + b)^2 + \left(\frac{b}{2a}\right)(2am + b) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

$= 2am^2 + bm - \left(\frac{1}{4a}\right)(4a^2m^2 + 4abm + b^2) + bm + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} + c = am^2 + bm + c$이다. 따라서 ①에서 $f_2(x) = ax^2 + bx + c$이다.

마찬가지로 계산하면

$f_{2k-1}(x) = \left(\frac{1}{4a}\right)x^2 + \left(\frac{-b}{2a}\right)x + \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, $f_{2k}(x) = ax^2 + bx + c$이다.[1)]

1) $T \circ T$가 항등함수가 되는 것이다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{n}\right)f_k\left(\frac{k}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)f_{2k-1}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)f_{2k}\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$에서 $x_k=\frac{k}{n}$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)f_{2k-1}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f_{2k-1}\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2}\right)$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{4a}\right)x^2+\left(\frac{-b}{2a}\right)x+\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)dx \quad \left(\because\ x_{k-1}<\frac{x_k+x_{k-1}}{2}<x_k\right)$$

$$=\frac{1}{12a}-\frac{b}{4a}+\frac{b^2-4ac}{4a} \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)f_{2k}\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f_{2k}(x_k)=\int_0^1(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$$

$\cdots$ ㉡이므로 함수의 극한의 성질에 의하여

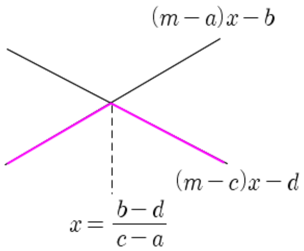
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)f_{2k-1}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)f_{2k}\left(\frac{k}{n}\right)\right\}=\frac{a}{3}+\frac{1}{12a}+\frac{b}{2}+\frac{b^2-b}{4a} \quad (\because \text{㉠, ㉡})$$ [1]

[1-3]

(1)

$ax+b=cx+d$에서 $x=\frac{b-d}{c-a}$이므로

$$f(x)=\max(ax+b,\ cx+d)=\begin{cases} ax+b & \left(x<\frac{b-d}{c-a}\right) \\ cx+d & \left(x\ge\frac{b-d}{c-a}\right)\end{cases}$$ 이고



$$mx-f(x)=\begin{cases} (m-a)x-b & \left(x<\frac{b-d}{c-a}\right) \\ (m-c)x-d & \left(x\ge\frac{b-d}{c-a}\right)\end{cases}$$ 이다.

직관적으로 직선 $(m-a)x-b$와 $(m-c)x-d$가 위 그래프와 같이 그려지면 최댓값이 존재한다고 생각할 수 있다.

이를 수식으로 증명하자.[2] 도함수를 구해보면 $\begin{cases} m-a & \left(x<\frac{b-d}{c-a}\right) \\ m-c & \left(x>\frac{b-d}{c-a}\right)\end{cases}$

이므로 $m-a\geqq 0$, $m-c\leqq 0$일 때 최댓값을 가진다. 즉, $a\leqq m\leqq c$일 때

최댓값 $F(m)=\frac{b-d}{c-a}(m-a)-b=\left(\frac{1}{c-a}\right)\{(b-d)m+b(d-c)\}$을 가진다.

(1-3 [3]에서 활용됨)

1) 문제에서 수렴함을 보이라고 되어 있는데 이차함수의 정적분이 수렴한다는 것은 매우 자명하므로 추가적인 설명이 없어도 괜찮을 것으로 생각된다.
굳이 논리적으로 쓰고 싶다면 $\frac{k}{n}$와 $\frac{2k-1}{2n}$을 직접 이차함수에 대입해서 시그마 극한을 다 계산하면 된다.

2) 모든 수학 문제는 반드시 수식적 증명이 동반되어야 한다.

(2)

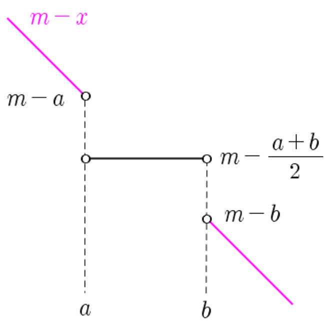
두 함수의 대소 관계를 비교하자. $\frac{(a+b)}{2}x-\frac{ab}{2}-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}(x-a)(x-b)$이므로

$$\max\left(\frac{(a+b)}{2}x-\frac{ab}{2},\ \frac{1}{2}x^2\right)=\begin{cases}\frac{(a+b)}{2}x-\frac{ab}{2} & (a \leqq x < b)\\ \frac{1}{2}x^2 & (x \geqq b \text{ or } x<a)\end{cases}$$ 에서

$$mx-\max\left(\frac{(a+b)}{2}x-\frac{ab}{2},\ \frac{1}{2}x^2\right)=\begin{cases}\left(m-\frac{a+b}{2}\right)x+\frac{ab}{2} & (a \leqq x < b)\\ mx-\frac{1}{2}x^2 & (x \geqq b \text{ or } x<a)\end{cases}$$

최댓값 존재를 확인하기 위해

도함수를 찾자.[1] 도함수 $\begin{cases}m-\frac{a+b}{2} & (a<x<b)\\ m-x & (x>b \text{ or } x<a)\end{cases}$ 이므로



도함수의 그래프를 그려보면 오른쪽 그림과 같다.

도함수의 부호가 양수에서 음수로 바뀌어야 최댓값이 존재하는데

m의 값에 따라 범위를 나누어보면

$m-a<0$이나 $m-b \geqq 0$일 때에는 $m-x=0$일 때 최댓값을 가지므로

$(x \geqq b \text{ or } x<a)$일 때에는 $x=m$에서 최댓값 $m(m)-\frac{1}{2}(m)^2=\frac{1}{2}m^2$을 가진다. ⋯ ①

마찬가지로 $m-\frac{a+b}{2}<0 \leqq m-a$일 때에는 $x=a$에서 최댓값을 가지므로

$\left(a \leqq m < \frac{a+b}{2}\right)$일 때에는 $x=a$를 대입하면 최댓값 $ma-\frac{1}{2}a^2$을 가진다. ⋯ ②

$m-b<0 \leqq m-\frac{a+b}{2}$일 때에는 $x=b$에서 최댓값을 가지므로

$\left(\frac{a+b}{2} \leqq m < b\right)$일 때에는 $x=b$를 대입하면 최댓값 $mb-\frac{1}{2}b^2$을 가진다. ⋯ ③

따라서 ①, ②, ③에서 모든 실수 m에 대하여 최댓값 $F(m)$이

존재하고 직접 함수를 나타내보면 다음과 같다. **(1-3 [3]에서 활용됨)**

$$F(m)=\begin{cases}\frac{m^2}{2} & (m \geqq b \text{ or } x<a)\\ ma-\frac{1}{2}a^2 & \left(a \leqq m < \frac{a+b}{2}\right)\\ mb-\frac{1}{2}b^2 & \left(\frac{a+b}{2} \leqq m < b\right)\end{cases}$$

1) 이차함수와 직선의 그래프를 그려서 최대를 판단할 수도 있지만 도함수를 통한 판단이 가장 확실하고 논리적이다.

(3)

(2)의 상황에 $a=2,\ b=10$을 대입한 상황인 것을 알아야 한다. 대입해보면

$$f_1(x)=F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & (x \geqq 10 \ \text{or} \ x<2) \\ 2x-2 & (2 \leqq x < 6) \\ 10x-50 & (6 \leqq x < 10)\end{cases}$$

$$\rightarrow\ mx-f_1(x)=\begin{cases}mx-\dfrac{x^2}{2} & (x \geqq 10 \ \text{or} \ x<2) \\ (m-2)x+2 & (2 \leqq x < 6) \\ (m-10)x+50 & (6 \leqq x < 10)\end{cases} \quad \cdots \ ①$$

임을 알 수 있다. 여기서 일단 $f_1(3)=4$이다. 그런데 $f_2(x)$를 찾기 위해 $mx-f_1(x)$의 최댓값을 찾아야 하는데 **[1-3] (1)**에서 직선과 직선에 대하여 비교해봤고, **[1-3] (2)**에서 직선과 이차함수에 대하여 비교해봤다. 이를 토대로 이차함수, 직선, 직선을 비교해야 하는 $f_2(x)$를 찾아보자.

[1-3] (1)에서 알 수 있듯이 $2 \leqq m \leqq 10$이면 $x=6$에서 최댓값 $6m-10$을 가진다. 즉, $f_2(9)=6\times 9-10=44$

(★ $x \geqq 10$ or $x<2$구간에서는 $(m-2)x+2-\left(mx-\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2 \geqq 0$

, $(m-10)x+50-\left(mx-\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(x-10)^2 \geqq 0$ 이므로 고려해줄 필요 없이 $6m-10$임을 알 수 있다.)

또한 **[1-2] (2)에서** $\dfrac{x^2}{2}$을 T에 대하여 변환하면 $\left(\dfrac{1}{4a}\right)x^2+\left(\dfrac{-b}{2a}\right)x+\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$의

$a=\dfrac{1}{2},\ b=c=0$이므로 여전히 $\dfrac{x^2}{2}$임을 알 수 있다.

따라서 마찬가지 방법으로 확인해보면 $n \geqq 3$일 때 $f_n(3^n)=\dfrac{(3^n)^2}{2}=\dfrac{9^n}{2}$이다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)f_n(3^n)=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{9^n}{10^n}\right)=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{729}{1000}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{9}{10}}\right)$$

에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=0$이므로 수렴한다. 따라서

$$=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\frac{729}{1000}}{1-\frac{9}{10}}\right)=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\frac{729}{200}=\frac{80+88+729}{200}=\frac{897}{200}$$

2014 연세대 수리논술 문제 풀이 - 난만한

----------------<더 이해하기 쉬운 다른 풀이>---------------

①에서 앞의 문제들을 활용하기 위해 여러 가지 이론들을 활용했지만 사실 그냥 $mx-f_1(x)$의 도함수를 찾아서 $f_2(x)$를 찾아보면 $f_2(x)=\max\left(6x-10,\ \frac{1}{2}x^2\right)$으로 나와서

그냥

$$f_{2n}(x)=\max\left(6x-10,\ \frac{1}{2}x^2\right),\ f_{2n-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & (x \geqq 10\ \text{or}\ x<2)\\ 2x-2 & (2 \leqq x<6)\\ 10x-50 & (6 \leqq x<10)\end{cases}$$

으로 반복되는 것을 확인할 수 있다.[1] 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)f_n(3^n)=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{9^n}{10^n}\right)=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{729}{1000}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{9}{10}}\right)$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=0$이므로 수렴한다. 따라서

$$=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\frac{729}{1000}}{1-\frac{9}{10}}\right)=\frac{4}{10}+\frac{44}{100}+\frac{729}{200}=\frac{80+88+729}{200}=\frac{897}{200}$$ [2]

1) 1-2 (2)의상황과 마찬가지로 $T\circ T$가 항등함수가 되는 것이다.

2) 사실 멋있는 풀이나 단순한 계산이나 논리적 비약만 없으면 모두 같은 점수를 받는다. 꾸준히 계산할 수 있는 능력이 매우 중요하다.