2014 연세대학교 수시 수리논술 복기

- 난만한 -

(가) 라이프니츠가 함수를 창조했다. (자세한 지문 생략)

(나) $f : R \to R$ 을 만족하는 f의 집합을 U라 할 때, 집합 A, B를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \{f \mid f(x) = ax + b,\ \ a, b\text{는 실수}\}$$

$$B = \{f \mid f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a > 0,\ a, b, c\text{는 실수},\ f \in U\}$$

(다) $f \in U$ 이다. 함수 $mx - f(x)$가 최댓값을 가질 때, 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(라) $\max(a, b) = \begin{cases} a & (a \geqq b) \\ b & (a < b) \end{cases}$

* 모든 문제에 사용되는 f, F는 제시문 (나)의 조건을 만족한다.

[1-1]

$f(x) = x^2$이라는 함수가 있다. 이 함수에 접하고 기울기가 m인 직선을 l이라고 하자. 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 보여라.

[1-2]

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$가 집합 B의 원소일 때, $F(m) = pm^2 + qm + r$임을 보이고 $F(x)$가 집합 B의 원소임을 보이시오.

(2) $T: B \to B$이고, $T(f(x)) = F(m)$일 때, $f_k = (T \circ T \circ \cdots \circ T)(f)$ (k번 합성한 함수)라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{n}\right)f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$가 수렴하는지 발산하는지 판정하고 수렴한다면 그 수렴값을 a, b, c로 나타내시오.

[1-3]

(1) $f(x) = \max(ax + b, cx + d)$, $a < c$일 때, $F(m)$이 존재하게 되는 m의 범위를 구하고 그 때의 $F(m)$을 a, b, c, d, m을 이용해서 나타내시오.

(2) $f(x) = \max\left(\dfrac{(a+b)}{2}x - \dfrac{ab}{2},\ \dfrac{1}{2}x^2\right)$, $a < b$일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 항상 존재함을 보이고 $F(m)$을 a, b, m을 이용해서 나타내시오.

(3) $f(x) = \max\left(6x - 10,\ \dfrac{1}{2}x^2\right)$일 때, 제시문 [1-2]에서 정의된 f_k에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)f_n(3^n)$이 수렴하는지 발산하는지 판정하고 수렴한다면 그 수렴값을 구하시오.