이진수 30제

저자 · GIST 제이팍
표지 디자인 · 클쓔마쓔

기하

문항 분포
기하 - 30문항
(평면곡선 12문항, 평면벡터 9문항, 공간도형 9문항)

문항 난이도
[3점] 표시된 문항은 선택 과목 3점 난이도의 문항입니다. 총 4문항입니다.
[4점] 표시된 문항은 선택 과목 4점 난이도의 문항입니다. 총 16문항입니다.
[4점 *] 표시된 문항은 선택 과목 4점 난이도의 문항 중 어려운 문항입니다. 총 7문항입니다.
[4점 #] 표시된 문항은 기출 등지에서 등장한 적 없는 아이디어를 사용하는 실험적인 문항입니다. 총 3문항입니다.

출제 경향
이번 <2진수 기하 30제>에는 다음과 같은 문제들을 수록하기 위해 노력하였습니다.
＊ **기출변형 문제** : 단순히 숫자만 바꾸거나 조건만 바꾸는 방식으로 만든, 기출의 논리를 그대로 따라가는 문제가 아닙니다. 기출의 논리에서 한 단계 더 발전하면 어떤 문제를 만들 수 있을까? 하는 고민에서 나온 문제들입니다. 기출이 발전하는 속도를 여러분들이 따라갈 수 있도록 도와주고 싶은 마음을 담았습니다.
＊ **낯선 문제** : 기출에 한 번도 등장하지 않았다고 해서 다 나쁜 문제인 것은 아닙니다. 반대로 실험적인 문제라고 해서 다 좋은 문제인 것도 아닙니다. 좋은 문제를 판가름하는 기준은 문제를 해결하는 과정이 얼마나 교육과정을 잘 따르는지에 따라 결정됩니다. 그런 기준에 맞춰, 낯설게 다가오면서도 충실히 공부했다면 풀 수 있는 문제를 선정하였습니다.
＊ **생각을 해야 하는 문제** : 여러분이 결국 시험장에서 보게 될 문제는 처음 보는 문제일 것입니다. 그 때를 대비하여 치열하게 생각해 주셨으면 합니다. 수능 수학은 결국 교육과정 개념을 포장하는 사람과 포장지를 푸는 사람의 싸움입니다. 이 책에 수록된 30제는 포장을 하는 서른 가지 방법입니다. 이제 여러분들이 포장을 푸는 서른 가지의 방법을 배운다면 그것만큼 좋은 일이 없겠죠?

발행일
2021년 6월 21일 (v1)

출제자
송혜근 (GIST 신소재공학부, 닉네임: GIST 제이팍)
Contact me : hgssong5648@naver.com
이 이메일로 사용 문의나 오류사항 등의 제보를 받습니다.

＊ 2020년 적중 목록 보러 가기 >>
https://cafe.naver.com/pnmath/2340843

표지 디자인
심수연 (GIST 기초교육학부)

1. 좌표평면에서 기울기가 $2\sqrt{3}$인 직선 l이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 만나는 점이 $(\sqrt{3},\ 1)$뿐이다. b^2으로 가능한 모든 수의 합을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

2. 평면에서 볼록사각형 ABCD가

$$\overline{\mathrm{AB}}=2,\ \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{2},\ \angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{4},\ \overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? (단, $\frac{\pi}{4}<\angle\mathrm{ABC}<\pi$이다.) [4점]

① $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

3. 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$을 x축 방향으로 t만큼, y축 방향으로 t만큼 평행이동시켰더니 원래의 타원과 한 점 P에서만 만났다. 타원과 점 P에서 접하는 직선의 x절편을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [3점]

4. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점을 F, F′라 하자. F의 x좌표는 0보다 크다. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와, P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점 Q에 대하여, 두 점 P, Q를 초점으로 하고 점 F를 지나는 쌍곡선의 두 꼭짓점이 그리는 자취의 길이는? [3점]

① $\frac{1}{3}\pi$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

5. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을 각각 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하자. y축 위의 점 C와 쌍곡선 위에 있는 제1사분면의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PC}}=3$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$, $\angle\mathrm{CPF}=\frac{\pi}{2}$일 때, b^2+c^2의 값을 구하시오. [4점]

6. 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 타원 위의 점 $\left(-2,\ \frac{5}{3}\right)$에서 그은 타원의 접선을 l이라 하고, 점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. 타원의 한 초점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PH}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $p+\frac{q}{\sqrt{13}}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, 점 P는 $\left(-2,\ \frac{5}{3}\right)$이 아니다.) [4점]

7. 좌표평면에 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(-3,\ 0)$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 점 P의 개수를 구하시오. [4점 #]

> (가) 점 P는 원 $x^2+y^2=25$의 둘레 위 또는 내부에 있고, x축이나 y축 위에 있지 않다.
> (나) 삼각형 PAB의 모든 변의 길이는 자연수이고, 삼각형 PAB의 둘레의 길이는 짝수이다.

8. $x \le 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

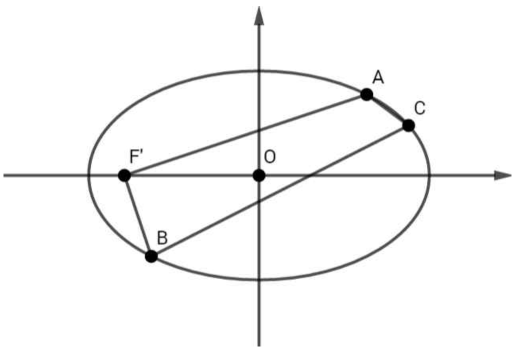
> 두 곡선 $x=\sqrt{4y^2+36}$, $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+1}$ 중 하나에 접하면서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 직선은 존재하지 않는다.

$f(-6)\times f(-8)$의 값을 구하시오. [4점 #]

9. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 초점을 F, 다른 하나를 F$'$라 하자. 이 타원 위에 세 점 A, B, C를 다음 조건을 만족시키도록 잡는다.

> (가) 원점 O가 선분 AB를 이등분한다.
> (나) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{FF'}}$
> (다) 사각형 ACBF$'$의 둘레의 길이는 16이다.

점 C의 y좌표를 k라 할 때, $k^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, A와 C는 제1사분면 위의 점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



10. 좌표평면 위의 두 점 F$(1, 0)$, F$'(-1, 0)$을 초점으로 하는 타원 E 위의 한 점 A$(0, a)$ $(a>0)$에 대하여, $\overline{\mathrm{FA}}=2\overline{\mathrm{FB}}$가 되도록 타원 E 위에 제1사분면 위의 점 B를 잡았더니 $\angle\mathrm{AFB}=\frac{\pi}{2}$였다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

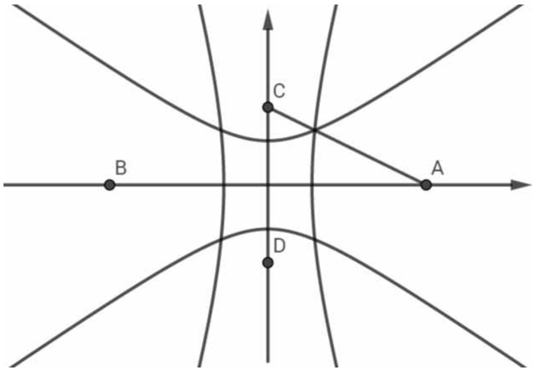
<보 기>

ㄱ. $\angle\mathrm{F'AB}=\frac{\pi}{2}$

ㄴ. 점 F와 직선 AF$'$ 사이의 거리를 h라 할 때, $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}\overline{\mathrm{AF}}$이다.

ㄷ. $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

11. 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점을 각각 A, B라 하고, 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2}-y^2=-1$의 두 초점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}=4$이고 두 쌍곡선의 교점 P가 선분 AC 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AP}}=p+q\sqrt{6}$이다. $9(p^2+q^2)$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{AP}}>2$이고, A의 x좌표와 C의 y좌표는 모두 양수이며, P는 제1사분면 위의 점이고, p, q는 유리수이다.) [4점 *]

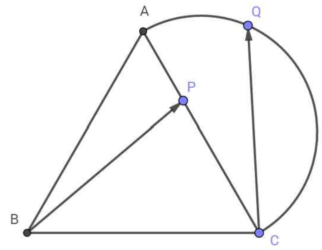


12. 양수 p에 대하여 두 포물선 $y^2=4px$와 $x^2=8py$에 동시에 접하는 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{p^2}{5}$ ② $\frac{p^2}{4}$ ③ $\frac{p^2}{3}$ ④ $\frac{p^2}{2}$ ⑤ p^2

13. 원 $x^2+y^2=16$과 점 $\mathrm{A}(8,\ 0)$가 있다. 원 위에 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$이 되도록 두 점 B, C를 잡을 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$의 최댓값은 $a+\sqrt{b}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [3점]

14. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 한 변 AC 위를 움직이는 점 P와, 선분 AC를 지름으로 하는 반원의 호 위를 움직이는 점 Q가 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M^2+m^2=p+q\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



15. 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 9)$에 대하여, 삼각형 OAB의 둘레 위에 있고 $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=k$를 만족시키는 점 P의 개수가 5개다. k의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

16. 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(2,\ 2\sqrt{3})$과 반원 $y=\sqrt{4-x^2}$ 위의 점 P와 방정식 $|x|+|y|=2$의 그래프 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]

17. 좌표평면에서 세 점 A$(-2,\ 0)$, B$(0,\ -6)$, C$(6,\ 9)$에 대하여 세 점 P, Q, R이

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \le 3,\ |\overrightarrow{\mathrm{BQ}}| \le 2,\ |\overrightarrow{\mathrm{CR}}| \le 4,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$$

을 만족시키며 움직인다. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}}$의 값이 최소일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점 *]

18. 좌표평면에서 점 A$(0,\ 1)$과 B$(1,\ 0)$, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=k$를 만족시키는 점 C에 대하여 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 점 P의 개수가 2개뿐이다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \ge 0$
> (나) $3 \le \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \le 4 \le |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \le 5 \le \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \le 6$

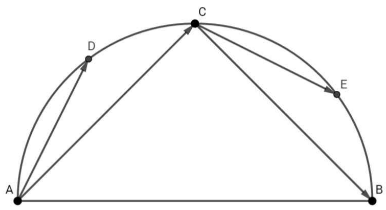
$k^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점 *]

19. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호를 점 C가 이등분하고, 반원 위의 두 점 D, E가

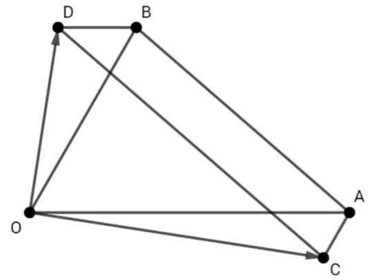
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



20. 평면에서 $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 OAB에 대하여 두 점 C, D를, 직선 OA와 직선 BD가, 직선 OB와 직선 AC가, 직선 AB와 직선 CD가 모두 서로 평행하도록 잡는다. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$일 때, $|\overrightarrow{BD}| = \frac{m-\sqrt{n}}{2}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 자연수이고, $|\overrightarrow{BD}| < |\overrightarrow{OA}|$이다..) [4점]



21. 좌표평면에 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$, B$(-2,\ 1)$이 있다. 점 P가 반원 $x=\sqrt{1-y^2}$ 위를 움직일 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| \le 5,\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \ge \frac{4}{5}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$$

를 만족시키는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최솟값을 m, $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값을 M이라 하자. $M+m=p+q\sqrt{5}$일 때, $5(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점 *]

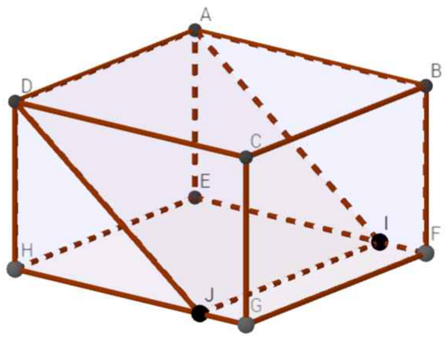
22. 삼각형 ABC의 두 변 AB, BC의 길이는 각각 5, 12이고 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$이다. 사면체 D$-$ABC에서 면 ABC가 사면체의 다른 세 면과 이루는 이면각의 크기가 모두 같고, 사면체 D$-$ABC의 부피가 40이다. $\overline{\mathrm{DB}}^2$의 값을 구하시오. [4점]

23. $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=2$이고 $\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{2}$인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위의 점 P에 대하여, 점 A에서 선분 PD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 점 B에서 점 C까지 움직일 때, H의 자취의 길이는? [4점]

① $\frac{\sqrt{6}}{9}\pi$ ② $\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ ④ $\frac{4\sqrt{6}}{9}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt{6}}{9}\pi$

24. 그림과 같이 세 모서리 AE, EF, EH의 길이가 각각 3, 5, 5인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 모서리 EF를 $4:1$로 내분하는 점을 I, 모서리 GH를 $1:4$로 내분하는 점을 J라 하자. 점 X를 중심으로 하는 구가 이 직육면체의 내부에 있고, 평면 AIJD와 평면 BFGC에 동시에 접한다. 점 X가 나타내는 영역의 넓이는?

[4점]



① $\frac{7\sqrt{5}}{6}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{11\sqrt{5}}{6}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

25. xy평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ 0)$, $\mathrm{B}(-3,\ 1,\ 0)$와 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 P에 대하여 두 직선 AP와 BP가 모두 구에 접할 때, 점 B와 평면 OPA 사이의 거리가 $\frac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

26. 한 변의 길이가 6인 정사면체 ABCD 내부의 점 P에 대하여 사면체 ACDP의 부피가 사면체 ABCP의 부피의 2배이다. $\overline{\mathrm{DP}}$의 최솟값을 h라 할 때, $h^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(4,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$에 대하여, 선분 AB를 지름으로 하는 원 C가 xy평면과 점 P에서 만나고, 점 B를 지나고 직선 AP와 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$인 직선이 원 C와 점 Q에서 만난다. $\overline{\mathrm{AP}}=2$일 때, 점 Q의 좌표는 $(a,\ b,\ c)$이다. $2a-4\sqrt{3}b+c$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 y좌표는 양수이고, $\overline{\mathrm{BQ}}>2$이다.) [4점 *]

28. 좌표공간에 점 $\mathrm{A}(10,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 8,\ 0)$, $\mathrm{C}(k,\ 8,\ 0)$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α가 존재하도록 하는 6 이상의 양수 k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점 *]

(가) xy평면과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이상이다.
(나) 평면 α는 점 C를 지난다.
(다) 평면 α와 점 O, A, B 사이의 거리는 모두 $\frac{5}{2}$ 이하이다.

29. 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(0, 4, m)$와 점 $\mathrm{B}(4, 0, n)$, 평면 $x+y=2$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 평면 ABP와 z축이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin^2\theta$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점 #]

30. 좌표공간에서 반지름의 길이가 5인 구 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC는 정삼각형이다. (나) 선분 AD는 평면 ABC에 수직이다.

두 평면 ABC와 BCD가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 삼각형 BCD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이의 제곱을 구하시오. [4점 *]

1	3	11	37	21	39
2	①	12	⑤	22	24
3	6	13	60	23	②
4	④	14	52	24	②
5	36	15	9	25	7
6	24	16	28	26	307
7	16	17	85	27	17
8	12	18	71	28	214
9	83	19	41	29	257
10	ㄱㄷ	20	146	30	108