1. 좌표평면에서 기울기가 $2\sqrt{3}$인 직선 l이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 만나는 점이 $(\sqrt{3},\ 1)$뿐이다. b^2으로 가능한 모든 수의 합을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점] $\boxed{40}$

① 쌍곡선의 점근선과 평행할 때

$$\frac{3}{a^2}-\frac{1}{12a^2}=1,\quad a^2=\frac{35}{12}$$

$$b^2=12a^2=35$$

② $(\sqrt{3},1)$에서 접할 때

$$\text{접선}: \frac{\sqrt{3}x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1 \quad \left(\text{기울기}: \frac{\sqrt{3}b^2}{a^2}=2\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore b^2=2a^2$$

$$\frac{3}{a^2}-\frac{1}{2a^2}=1,\quad a^2=\frac{5}{2}$$

$$b^2=2a^2=5$$

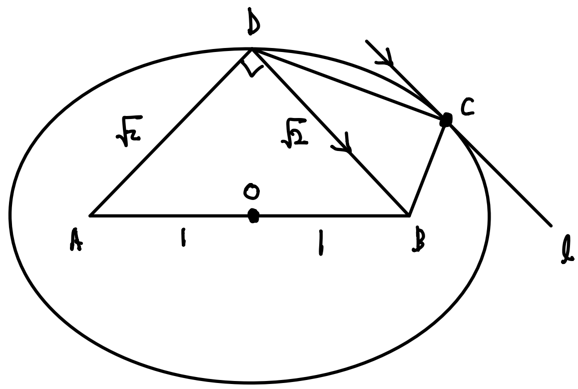
$$35+5=\boxed{40}$$

2. 평면에서 볼록사각형 ABCD가

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=\sqrt{2},\ \angle BAD=\frac{\pi}{4},\ \overline{AC}+\overline{BC}=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? (단, $\dfrac{\pi}{4}<\angle ABC<\pi$이다.) [4점]

① $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ ② $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ④ $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$



타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 이라 하면,

점 C에서 타원에 접하는 직선 l은 기울기가 -1이므로

$$C(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow l: \frac{\bar{x}x}{2}+\bar{y}y=1$$

$\rightarrow$ l의 법선벡터 $\left(\dfrac{\bar{x}}{2},\bar{y}\right) \parallel (1,1)$

$$\rightarrow \frac{\bar{x}}{2}=\bar{y},\quad \bar{x}=2\bar{y}$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2}+\bar{y}^2=1 \rightarrow 3\bar{y}^2=1,\quad \bar{y}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \bar{x}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

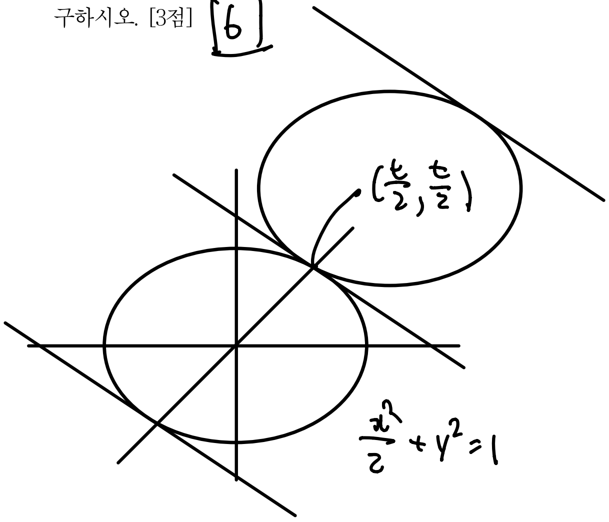
C와 $\overline{BD}$ 사이의 거리는,

$$d=\frac{\bar{x}+\bar{y}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\square ABCD=\sqrt{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

3. 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$을 x축 방향으로 t만큼, y축 방향으로 t만큼 평행이동시켰더니 원래의 타원과 한 점 P에서만 만났다. 타원과 점 P에서 접하는 직선의 x절편을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{6}$



Let $\frac{t}{2}=a \longrightarrow \frac{a^2}{2}+a^2=1, \quad a=\sqrt{\frac{2}{3}}$

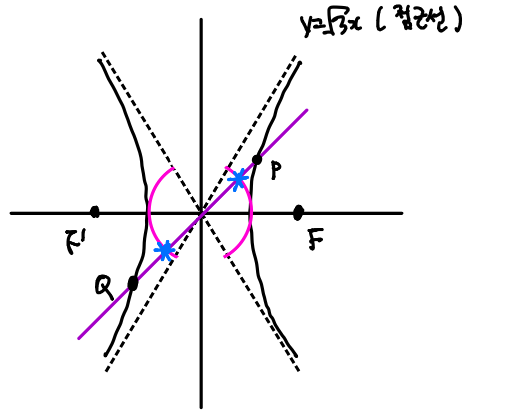
접선: $\frac{ax}{2}+ay=1 \longleftarrow y=0$

$\longrightarrow x=\frac{2}{a}=2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$

$k^2=\boxed{6}$

4. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점을 F, F$'$라 하자. F의 x좌표는 0보다 크다. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와, P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점 Q에 대하여, 두 점 P, Q를 초점으로 하고 점 F를 지나는 쌍곡선의 두 꼭짓점이 그리는 자취의 길이는? [3점]

① $\frac{1}{3}\pi$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

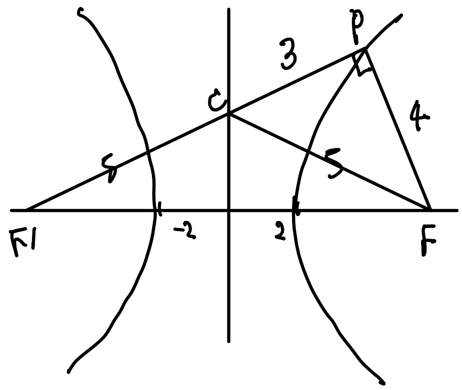


$|\overline{PF}-\overline{QF}|=|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2$

∴ 쌍곡선 주축 길이 2

반지름 1, 각 $\frac{4}{3}\pi \longrightarrow r\theta=\frac{4}{3}\pi$

5. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을 각각 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하자. y축 위의 점 C와 쌍곡선 위에 있는 제1사분면의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PC}}=3$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$, $\angle\mathrm{CPF}=\frac{\pi}{2}$일 때, b^2+c^2의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{36}$



$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$에서 $\overline{PF'}=8$ 이고

$\overline{PC}=3$, $\overline{CF'} = \overline{CF} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ 이므로

P, C, F'는 한 직선 위에 있다.

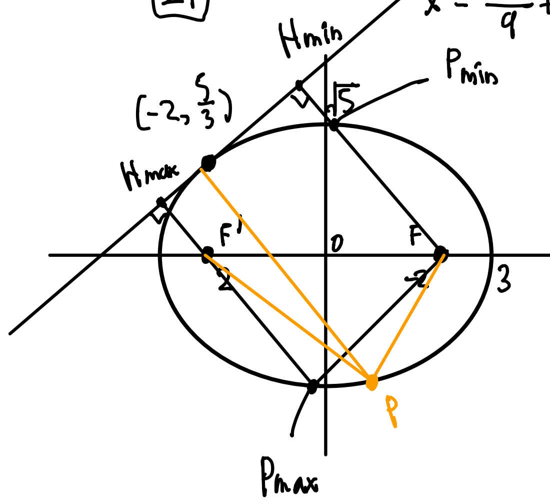
$\overline{FF'}^2 = 4^2+8^2 = 5\cdot 4^2 \cdots$ $c^2=20$, $b^2=16$

$b^2+c^2=\boxed{36}$

6. 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 타원 위의 점 $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$에서 그은 타원의 접선을 l이라 하고, 점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. 타원의 한 초점 $\mathrm{F}(2, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PH}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $p+\frac{q}{\sqrt{13}}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, 점 P는 $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$이 아니다.) [4점] $\boxed{24}$

$l = \frac{-2x}{9}+\frac{y}{3}=1$

$-2x+3y-9=0$



F에서 l에 내린 수선을 H_{min},

F'에서 l에 내린 수선을 H_{max}라 하고

직선 FH_{min}과 타원의 교점을 P_{min}

〃 FH_{max} 〃 P_{max}라 하면

(i) 거리의 정의에 의해, $\overline{FP}+\overline{PH} \ge \overline{FP_{min}}+\overline{P_{min}H_{min}}$

for all P ... 최솟값 $=\overline{FH_{min}}$

(ii) $\overline{FP}+\overline{PH} = 6-\overline{F'P}+\overline{PH} \le 6+\overline{F'H_{max}}$

for all P ... 최댓값 $=6+\overline{F'H_{max}}$

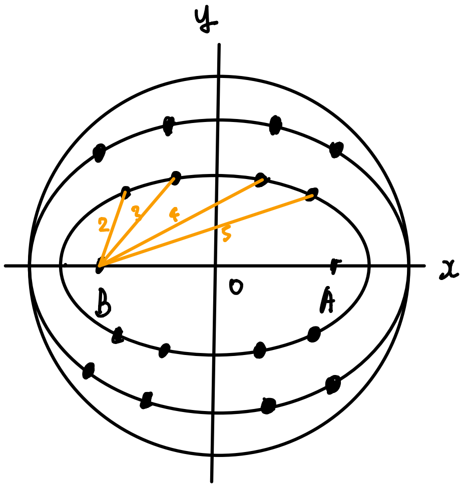
원점 O에 대해

$6+\overline{FH_{min}}+\overline{F'H_{max}} = 6+2\ \text{distance}(O, l)$

$=6+2\left(\frac{|-9|}{\sqrt{2^2+3^2}}\right)=6+\frac{18}{\sqrt{13}}$ $6+18=\boxed{24}$

7. 좌표평면에 점 A(3, 0), B(−3, 0)이 있다. 다음 조건을 만족시키는 점 P의 개수를 구하시오. [4점 #] $\boxed{16}$

> (가) 점 P는 원 $x^2+y^2=25$의 둘레 위 또는 내부에 있고, x축이나 y축 위에 있지 않다.
> (나) 삼각형 PAB의 모든 변의 길이는 자연수이고, 삼각형 PAB의 둘레의 길이는 짝수이다.



(ㄱ) $\overline{PA}+\overline{PB}=8$: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

(ㄴ) $\overline{PA}+\overline{PB}=10$: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(ㄷ) $\overline{PA}+\overline{PB}=12$: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ (X)

P : 16개, $\boxed{16}$

8. $x \le 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

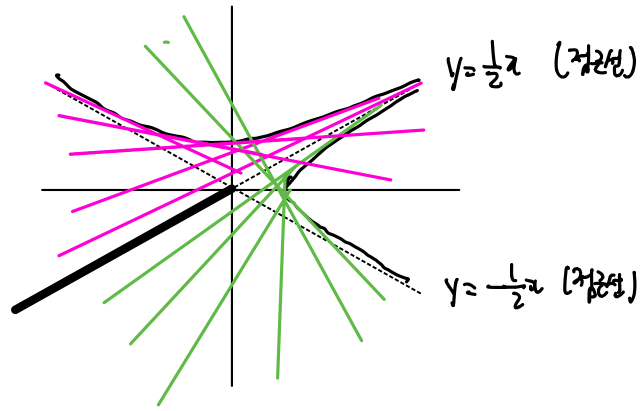
> 두 곡선 $x=\sqrt{4y^2+36}$, $y=\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}$ 중 하나에 접하면서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 직선은 존재하지 않는다.

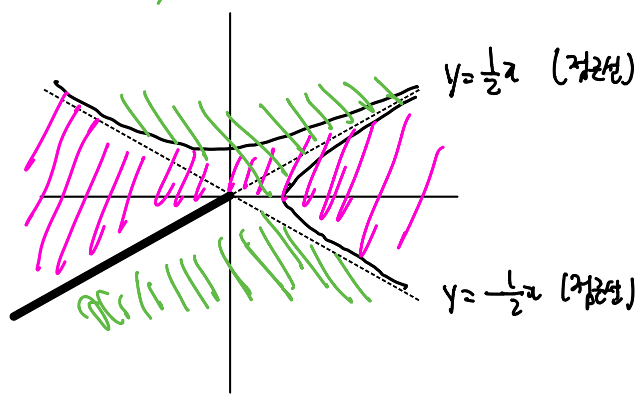
$f(-6)\times f(-8)$의 값을 구하시오. [4점 #] $\boxed{12}$

p_1 : $\frac{x}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ $(x>0)$

p_2 : $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$ $(y>0)$

곡선에 접하는 여러 접선을 그려 보면





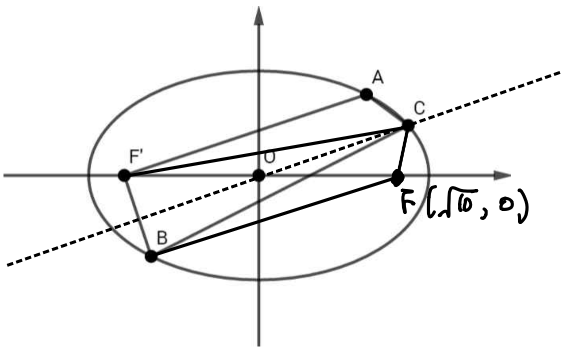
접선이 쓸고 가지 않는 영역은, 직선 $y=\frac{1}{2}x$ $(x<0)$ 뿐이다. $f(-6)=-3$, $f(-8)=-4$

$\longrightarrow -3\times -4=\boxed{12}$

9. 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 초점을 F, 다른 하나를 F$'$라 하자. 이 타원 위에 세 점 A, B, C를 다음 조건을 만족시키도록 잡는다.

> (가) 원점 O가 선분 AB를 이등분한다.
> (나) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{FF'}}$
> (다) 사각형 ACBF$'$의 둘레의 길이는 16이다.

점 C의 y좌표를 k라 할 때, $k^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, A와 C는 제1사분면 위의 점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{82}$



$\overline{AF}+\overline{AF'}=8$, $\overline{AF}^2+\overline{AF'}^2=40$

$\to$ $\overline{AF}\cdot\overline{AF'}=12$, $\overline{AF}=2$, $\overline{AF'}=6$

□AFBF$'$는 직사각형이고,

$\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BF'}+\overline{F'A}=16$

$\to$ $\overline{AC}+\overline{CB}+\underbrace{\overline{AF}+\overline{AF'}}_{=8}=16$ (since $\overline{BF'}=\overline{AF}$)

$\to$ $\overline{AC}+\overline{BC}=8$
$=\overline{FC}+\overline{F'C}$

한편, C는 □AF$'$BF를 이등분하는 직선 위에 있다, 그 점이 아니라면 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값이 8보다 커지거나 작아지기 때문. 따라서 점 C는 $y=(\tan\theta)x=\frac{1}{3}x$ 위에 있고, C$(3k, k)$라 하면

$\dfrac{9k^2}{16}+\dfrac{k^2}{6}=1$, $k^2=\dfrac{48}{35}$

$48+35=\boxed{83}$

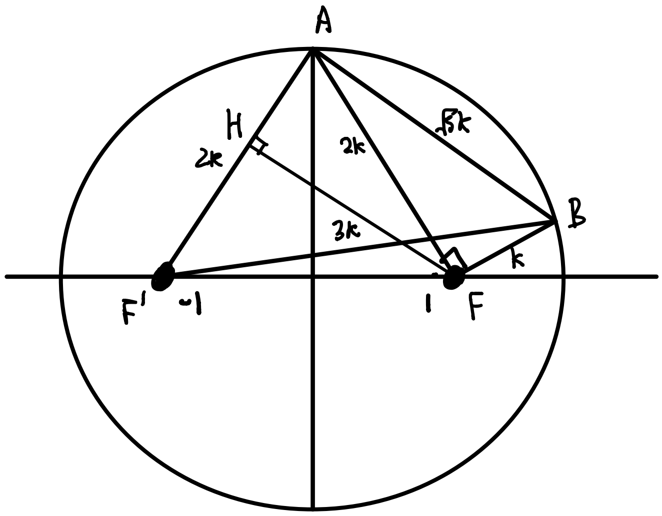
10. 좌표평면 위의 두 점 F$(1,0)$, F$'(-1,0)$을 초점으로 하는 타원 E 위의 한 점 A$(0,a)$ $(a>0)$에 대하여, $\overline{\mathrm{FA}}=2\overline{\mathrm{FB}}$가 되도록 타원 E 위에 제1사분면 위의 점 B를 잡았더니 $\angle\mathrm{AFB}=\dfrac{\pi}{2}$였다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\angle\mathrm{F'AB}=\dfrac{\pi}{2}$

ㄴ. 점 F와 직선 AF$'$ 사이의 거리를 h라 할 때, $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overline{\mathrm{AF}}$이다.

ㄷ. $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



△F$'$AB에서, $\overline{F'B}^2+\overline{AB}^2=4k^2+5k^2=9k^2=\overline{F'B}^2$

이므로 $\angle F'AB=\pi/2$ … ㄱ○

$h=\overline{FH}=\overline{AB}-\overline{FB}\cos\angle ABF=\sqrt5k-k\cdot\frac{1}{\sqrt5}=$
$\frac{4}{5}\sqrt5k=\frac{2}{5}\sqrt5(2k)=\frac{2\sqrt5}{5}\overline{AF}$ … ㄴ X

$\overline{AH}=\overline{BF}\sin\angle ABF=k\cdot\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2}{5}\sqrt5k$ …

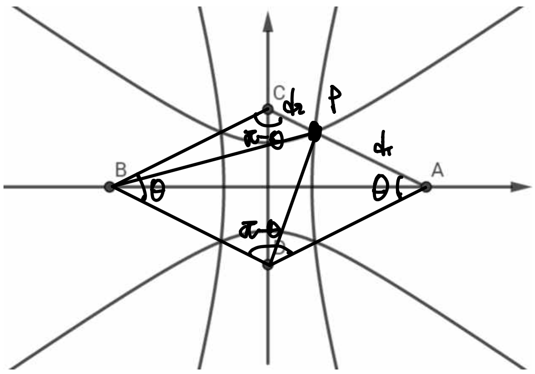
$\overline{HF'}=\left(2-\frac{2}{5}\sqrt5\right)k$, $\overline{FH}=\frac{4}{5}\sqrt5k$

$\overline{HF'}^2+\overline{FH}^2=\overline{FF'}^2$ … $\left(\left(2-\frac{2}{5}\sqrt5\right)^2+\left(\frac{4}{5}\sqrt5\right)^2\right)k^2=4$

$k^2=\frac{5+\sqrt5}{8}$, $a^2=4k^2-1=\frac{3+\sqrt5}{2}$

$=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2$ … ㄷ○

11. 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점을 각각 A, B라 하고, 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2}-y^2=-1$의 두 초점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}=4$이고 두 쌍곡선의 교점 P가 선분 AC 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AP}}=p+q\sqrt{6}$이다. $9(p^2+q^2)$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{AP}}>2$이고, A의 x좌표와 C의 y좌표는 모두 양수이며, P는 제1사분면 위의 점이고, p, q는 유리수이다.) [4점] $\boxed{31}$



$\overline{AP}=d_1$, $\overline{PC}=d_2$

$\rightarrow d_1+d_2=4$, $\overline{PB}=d_1+2$, $\overline{PD}=d_2+2$

$\triangle PCB$에서

$(d_1+2)^2=d_2^2+4^2+2d_2\cdot4\cdot\cos\theta$ … (1)

$\triangle APD$에서

$(d_2+2)^2=d_1^2+4^2-2d_1\cdot4\cdot\cos\theta$ … (2)

(1)−(2) …

$\left((d_1+2)^2-(d_2+2)^2\right)=(d_2^2-d_1^2)+2\underbrace{(\cancel{d_1+d_2})}_{4}\cdot4\cos\theta$

$(\underbrace{\cancel{d_1+d_2+4}}_{8})(d_1-d_2)=(\underbrace{\cancel{d_2+d_1}}_{4})(d_2-d_1)+32\cos\theta$

$12(d_1-d_2)=32\cos\theta$

(1) … $(d_1+2)^2-d_2^2=16+8d_2\cos\theta$

$(\underbrace{\cancel{d_1+d_2+2}}_{6})(d_1-d_2+2)=16+3d_2(d_1-d_2)$

$6(d_1-d_2)+\cancel{12}=\cancel{16}_4+3d_2(d_1-d_2)$

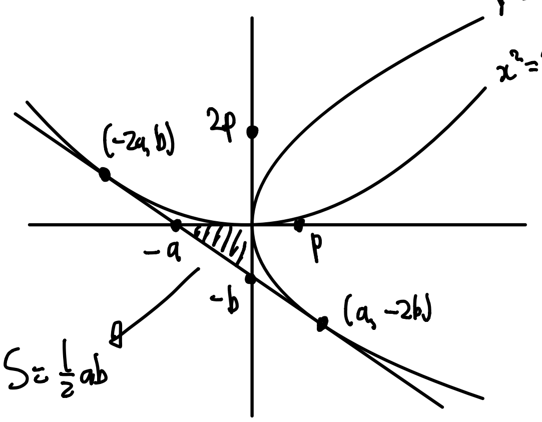
$(6-3d_2)(d_1-d_2)=4 \leftarrow d_2=4-d_1$

$(3d_1-6)(2d_1-4)=4$, $(d_1-2)^2=\frac{2}{3}$

$d_1=2+\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $9p^2+9q^2=\boxed{31}$

12. 양수 p에 대하여 두 포물선 $y^2=4px$와 $x^2=8py$에 동시에 접하는 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{p^2}{5}$ ② $\frac{p^2}{4}$ ③ $\frac{p^2}{3}$ ④ $\frac{p^2}{2}$ ⑤ p^2 V



$S=\frac{1}{2}ab$

$(-2a)^2=8pb \longrightarrow a^2=2pb$

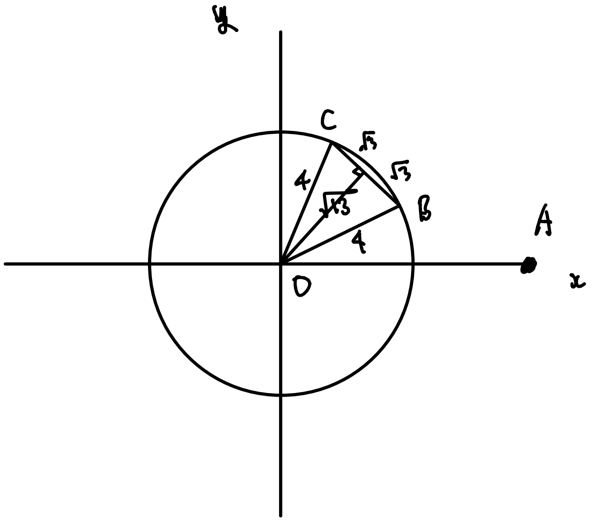
$(-2b)^2=4pa \longrightarrow b^2=pa$

$\downarrow$

$\cancel{a^2}b^2=2p^2\cancel{ab}$

$\frac{1}{2}ab=p^2$

13. 원 $x^2+y^2=16$과 점 A(8, 0)가 있다. 원 위에 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$이 되도록 두 점 B, C를 잡을 때, $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}|$의 최댓값은 $a+\sqrt{b}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [3점]



$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

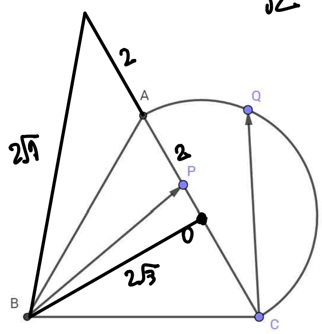
$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{13}$, $|\overrightarrow{OA}|=8$

∴ $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|$의 최댓값 : $8+2\sqrt{13}$

($\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{OA}$의 방향이 정반대일 때)

$8+2\sqrt{13}=8+\sqrt{52}$ ... $\boxed{60}$

14. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 한 변 AC 위를 움직이는 점 P와, 선분 AC를 지름으로 하는 반원의 호 위를 움직이는 점 Q가 있다. $|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M^2+m^2=p+q\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점] 52



$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OQ}=$ ($=\overrightarrow{OA}$)

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

MAX: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OP}$ // $\overrightarrow{OQ}$ 일 때

$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{7}$, $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=2\sqrt{7}+2$

$M^2=32+8\sqrt{7}$

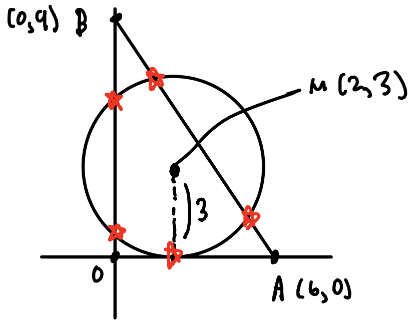
MIN: $\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ and $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}$일 때

$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{BO}|=2\sqrt{3}$ ... $m^2=12$

$M^2+m^2=44+8\sqrt{7}$, $44+8=\boxed{52}$

15. 좌표평면에서 점 A$(6, 0)$, B$(0, 9)$에 대하여, 삼각형 OAB의 둘레 위에 있고 $|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=k$를 만족시키는 점 P의 개수가 5개다. k의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{9}$



$\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP} = (6,9)-3\overrightarrow{OP}$

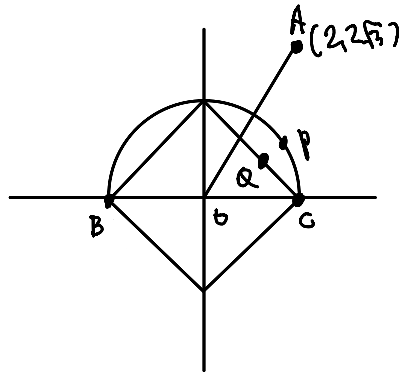
$= 3((2,3)-3\overrightarrow{OP}) = 3(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}) = 3\overrightarrow{PM}$

→ $3|\overrightarrow{PM}|=k$ 를 만족시키는 P의 개수가 5개

→ $|\overrightarrow{PM}|=3$, $3|\overrightarrow{PM}|=\boxed{9}$

16. 좌표평면에서 점 A$(2,\ 2\sqrt{3})$과 반원 $y=\sqrt{4-x^2}$ 위의 점 P와 방정식 $|x|+|y|=2$의 그래프 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값을 구하시오. [4점]

$\boxed{28}$



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\overrightarrow{AQ}$는 Q=C일 때를 제외하면 항상 제3사분면 방향을 보고 있으므로, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$는 P=B일 때 최대

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ} \le \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$ ... 마찬가지로 Q=B일 때 최대

$12+16=\boxed{28}$

17. 좌표평면에서 세 점 A$(-2,\ 0)$, B$(0,\ -6)$, C$(6,\ 9)$에 대하여 세 점 P, Q, R이

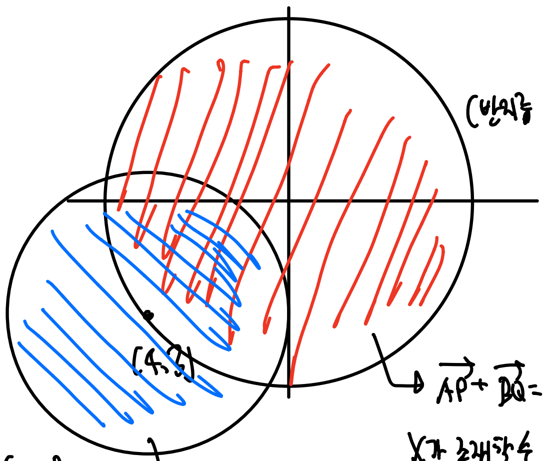
$$|\overrightarrow{AP}| \le 3,\ |\overrightarrow{BQ}| \le 2,\ |\overrightarrow{CR}| \le 4,\ \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\vec{0}$$

을 만족시키며 움직인다. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값이 최소일 때, $|\overrightarrow{OR}|^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] $\boxed{85}$

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR} = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CR})$

$= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{CR} - (4,3)$



$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OX}$일 때, X가 존재할 수 있는 영역

$-\overrightarrow{CR}-(4,3) = \overrightarrow{OY}$일 때, Y가 존재할 수 있는 영역

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$ 이므로, Y는 두 원 모두의 내부에 있고

$\overrightarrow{CR} = -\overrightarrow{OY} - (4,3) = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OY} - (4,3) = (6,9)-(4,3)-\overrightarrow{OY}$

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OA} = ((2,6)-\overrightarrow{OY})\cdot(-2,0)$

$= -4 + 2\,\overrightarrow{OY}\cdot(1,0) \Leftarrow$ 최소

이므로 Y의 위치는 $(-5,0)$ 이다.

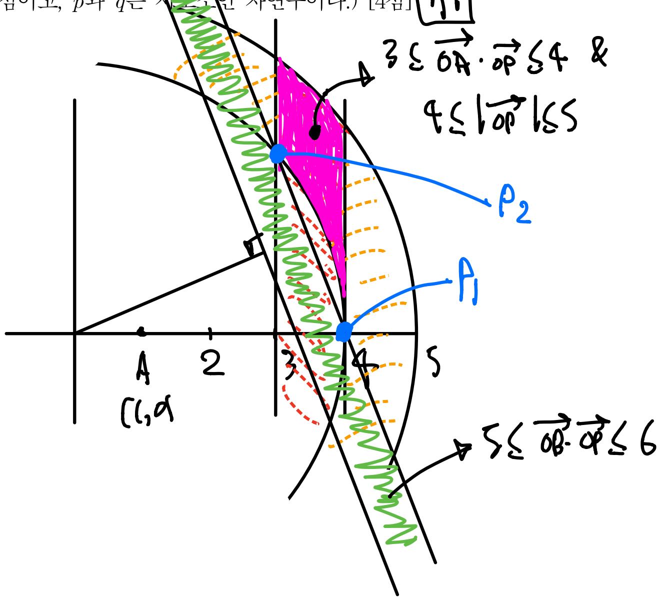
$\overrightarrow{OR} = (6,9)-(4,3)-(-5,0)$

$= (7,6)$ ∴ $7^2+6^2 = \boxed{85}$

18. 좌표평면에서 $|\overrightarrow{OA}|=1$을 만족시키는 점 A와 $|\overrightarrow{OB}|=k$를 만족시키는 점 B에 대하여

$$3 \le \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} \le 4 \le |\overrightarrow{OP}| \le 5 \le \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} \le 6$$

을 만족시키는 서로 다른 점 P의 개수가 2개뿐일 때, $k^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{71}$



$P_1 : (4,0)$, $P_2 : (3,\sqrt{7})$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP_1} = 6$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP_2} = 6$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = 0 = \overrightarrow{OB}\cdot(-1,\sqrt{7})$

$\overrightarrow{OB} = c(\sqrt{7},1)$라 하면,

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP_1} = c(\sqrt{7},1)\cdot(4,0) = 4\sqrt{7}c = 6$

$\therefore c = \frac{3}{2\sqrt{7}}$

$|\overrightarrow{OB}| = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times 2\sqrt{2} = k \quad k^2 = \frac{9\times2}{7} = \frac{18}{7}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (1,0)\cdot\frac{3}{2\sqrt{7}}(\sqrt{7},1) = \frac{3}{2}$

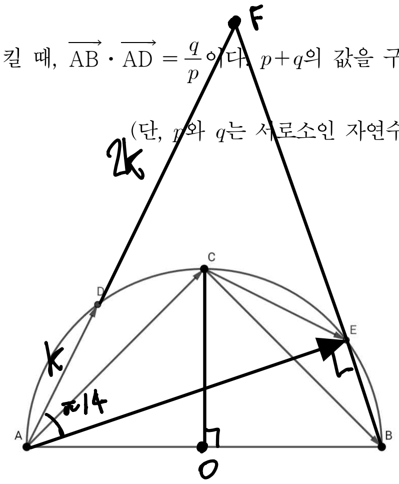
$\frac{18}{7}+\frac{3}{2} = \frac{57}{14} \quad 14+57 = \boxed{71}$

19. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호를 점 C가 이등분하고, 반원 위의 두 점 D, E가

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. 41

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



△ADC를 O에 대해서 시계 방향으로 90° 만큼 회전하면 △CEB와 겹침

$\longrightarrow \angle DOE=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \angle DAE=\frac{\pi}{4}$

$|\overrightarrow{AD}|=k$ 라 하고, $3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$가 되도록 점 F를 잡으면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AG}$ …

B에서 $\overrightarrow{AE}$에 내린 정사영의 위치가 E이므로 F에서 $\overrightarrow{AE}$에 내린 정사영의 위치도 G이다.

$|\overrightarrow{AF}|=3k$, $\angle DAE=\frac{\pi}{4} \rightarrow |\overrightarrow{AG}|=\frac{3}{\sqrt{2}}k$

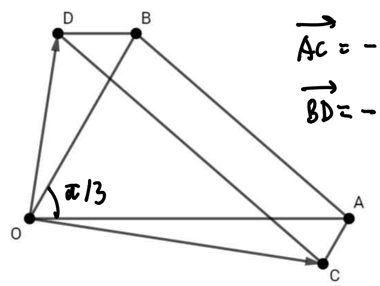
이고 △ADE에서 $|\overrightarrow{DE}|=2R\sin\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{DE}|^2=|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AG}|^2-2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AG}|\cos\frac{\pi}{4}$

$18=k^2+\frac{9}{2}k^2-\cancel{2}k\cdot\frac{3}{\cancel{\sqrt{2}}}k\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}=\frac{5}{2}k^2$

$k^2=\frac{36}{5}$ 한편, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=k^2=\frac{36}{5}$ $36+5=\boxed{41}$

20. 평면에서 $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 OAB에 대하여 두 점 C, D를, 직선 OA와 직선 BD가, 직선 OB와 직선 AC가, 직선 AB와 직선 CD가 모두 서로 평행하도록 잡는다. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$일 때, $|\overrightarrow{BD}|=\frac{m-\sqrt{n}}{2}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 자연수이다.) [4점] 146



$\overrightarrow{AC}=-c_1\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BD}=-c_2\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD})$

$=(\overrightarrow{OA}-c_1\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-c_2\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{AD}\,//\,\overrightarrow{CD}$

$\longrightarrow (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\,//\,(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$

$\longrightarrow (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\,//\,(\overrightarrow{OB}-c_2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}+c_1\overrightarrow{OB})$

$\longrightarrow k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=((1+c_1)\overrightarrow{OB}-(1+c_2)\overrightarrow{OA})$

$\longrightarrow c_1=c_2=c$

$(\overrightarrow{OA}-c\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-c\overrightarrow{OA})=0$ 에서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-c|\overrightarrow{OA}|^2-c|\overrightarrow{OB}|^2+c^2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$3c^2-13c+3=0$

$\therefore c=\frac{13-\sqrt{133}}{6}$ $(0<c<1$에서$)$

$|\overrightarrow{BD}|=c|\overrightarrow{OA}|=\frac{13-\sqrt{133}}{2}$

$13+133=\boxed{146}$

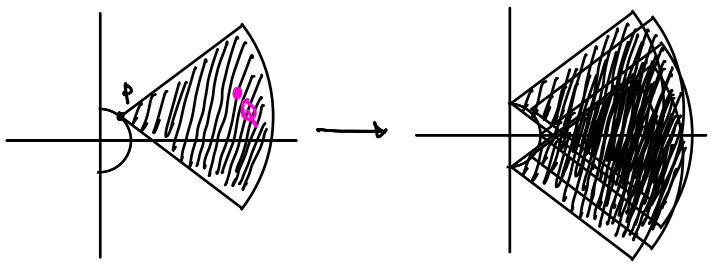
21. 좌표평면에 세 점 O(0, 0), A(1, 0), B(−2, 1)이 있다. 점 P가 반원 $x = \sqrt{1-y^2}$ 위를 움직일 때,

$$|\overrightarrow{PQ}| \le 5,\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} \ge \frac{4}{5}|\overrightarrow{PQ}|$$

를 만족시키는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값을 m, $|\overrightarrow{BQ}|$의 최댓값을 M이라 하자. $M+m = p+q\sqrt{5}$일 때, $5(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점 *] $\boxed{39}$

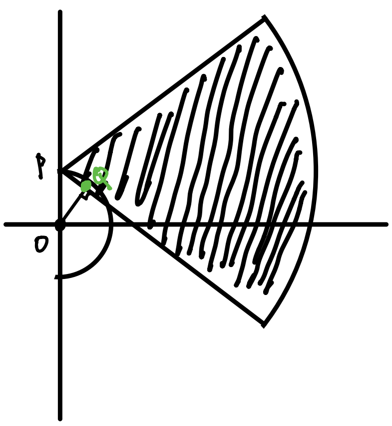
⌒ = cos θ

$$\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{OA}|} \ge \frac{4}{5}$$



$|\overrightarrow{OQ}|$ 최소:

$|\overrightarrow{OQ}| = \overline{OP} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$



$|\overrightarrow{BQ}|$ 최대, $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

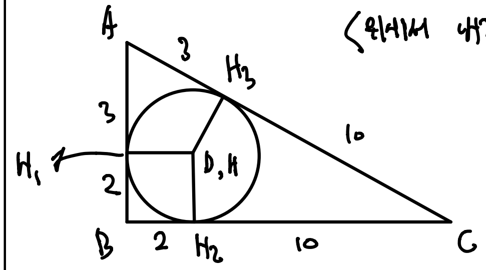
$|\overrightarrow{PQ}| = 5$로 잡고 모두 일직선화시키면

$|\overrightarrow{BQ}| = \sqrt{5} + 6$

$6 + \frac{4}{5} + \sqrt{5} = \frac{34}{5} + \sqrt{5}$

$34 + 5 = \boxed{39}$

22. 삼각형 ABC의 두 변 AB, BC의 길이는 각각 5, 12이고 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$이다. 사면체 D−ABC에서 면 ABC가 사면체의 다른 세 면과 이루는 이면각의 크기가 모두 같고, 사면체 D−ABC의 부피가 40이다. $\overline{DB}^2$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{24}$



<위에서 내려다봄>

D에서 △ABC 위에 내린 수선의 발을 H라 가정

$\overline{DH} = 4$, $\overline{HH_1} = \overline{HH_2} = \overline{HH_3} = \frac{4}{\tan\theta}$

(θ: 이면각)

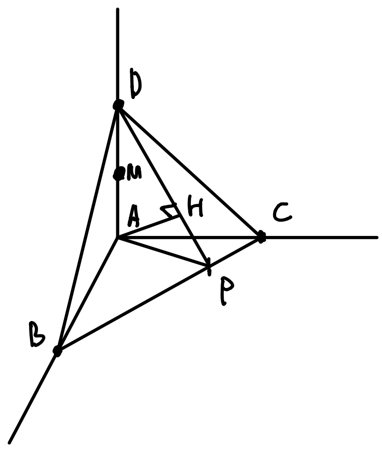
에서 H는 △ABC의 내심이다, 따라서

$\overline{DB}^2 = \overline{BH_1}^2 + \overline{H_1H}^2 + \overline{HD}^2$

$= 2^2 + 2^2 + 4^2 = \boxed{24}$

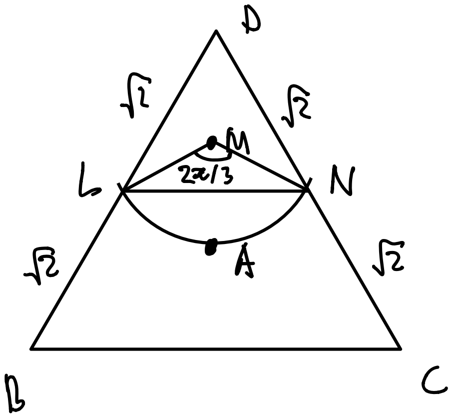
23. $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=2$이고 $\angle ABC=\angle ABD=\angle ACD=\frac{\pi}{2}$인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위의 점 P에 대하여, 점 A에서 선분 PD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 점 B에서 점 C까지 움직일 때, H의 자취의 길이는? [4점]

① $\frac{\sqrt6}{9}\pi$ ② $\frac{2\sqrt6}{9}\pi$ ③ $\frac{\sqrt6}{3}\pi$ ④ $\frac{4\sqrt6}{9}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt6}{9}\pi$



$\angle AHD=\frac{\pi}{2}$에서, 점 H는 $\overline{AD}$를 지름으로 하는 구와 $\triangle ABC$ 내부에 동시에 존재한다.

평면 BCD에 수직인 시선으로 그림을 바라보면

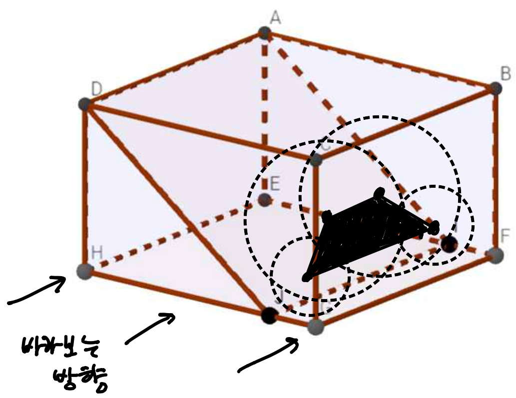


$\overline{AD}$의 중점 M에 대하여 구의 중심은 M이고, 원은 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$의 중점 L, N을 모두

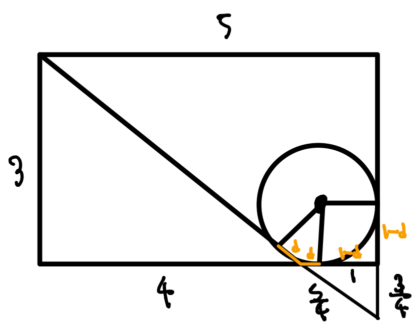
지나므로, 자취의 길이는

$r\theta=\overline{LM}\times\frac{2}{3}\pi=\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{2}{3}\pi=\boxed{\frac{2\sqrt6}{9}\pi}$

24. 그림과 같이 세 모서리 AE, EF, EH의 길이가 각각 3, 5, 5인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 모서리 EF를 4:1로 내분하는 점을 I, 모서리 GH를 1:4로 내분하는 점을 J라 하자. 점 X를 중심으로 하는 구가 이 직육면체의 내부에 있고, 평면 AIJD와 평면 BFGC에 동시에 접한다. 점 X가 나타내는 영역의 넓이는? [4점]



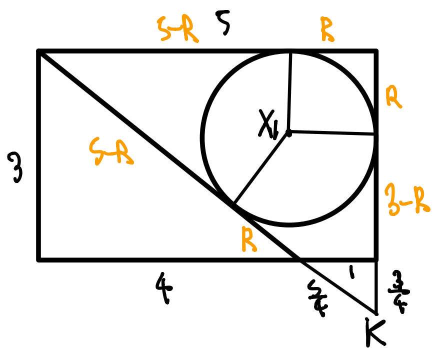
① $\frac{7\sqrt5}{6}$ ② $\frac{3\sqrt5}{2}$ ③ $\frac{11\sqrt5}{6}$ ④ $\frac{7\sqrt3}{6}$ ⑤ $\frac{3\sqrt3}{2}$



$\frac{5}{4}+d=\frac{1}{4}-d$

$2d=\frac{1}{2},\ d=\frac{1}{4}$

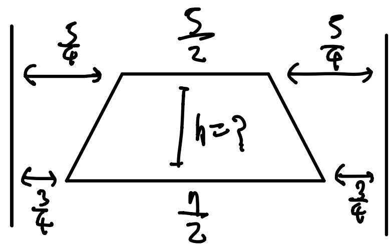
작은 구의 반지름 $=\frac{3}{4}$



$\frac{5}{4}+R=\frac{15}{4}-R$

$2R=\frac{5}{2},\ R=\frac{5}{4}$

큰 구의 반지름 $:\frac{5}{4}$



$h=\frac{2}{5}\overline{X_1K}$

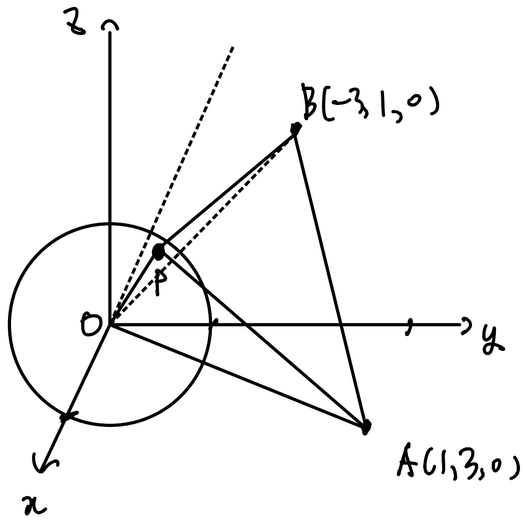
$=\frac{5}{4}\sqrt5\times\frac{2}{5}$

$=\frac{1}{2}\sqrt5$

$6\times\frac{\sqrt5}{2}\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt5}{2}}$

25. xy평면 위의 두 점 A$(1,3,0)$, B$(-3,1,0)$와 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 P에 대하여 두 직선 AP와 BP가 모두 구에 접할 때, 점 B와 평면 OPA 사이의 거리가 $\frac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{7}$



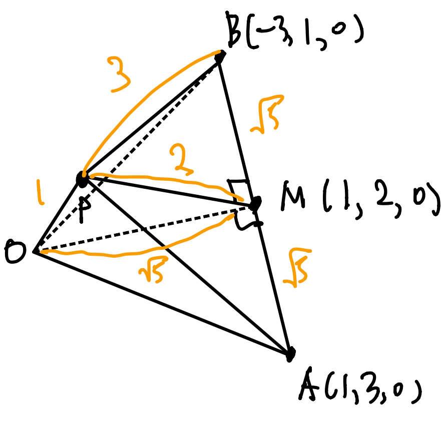
거리 h에 대하여

Area(△OPA) × h × $\frac{1}{3}$ = Volume(OPAB)

$\overline{OP}\perp\overline{PB}$, $\overline{OP}\perp\overline{PA}$ 에서

Volume(OPAB) = $\overline{OP}$ × Area(△PAB) × $\frac{1}{3}$

→ $h = \dfrac{\text{Area}(\triangle PAB)}{\text{Area}(\triangle OPA)}$



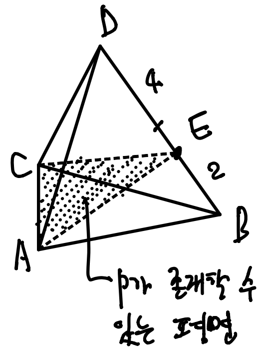
$\overline{OA}=\overline{OB}$ 이므로 $\overline{AB}$의 중점 M에 대하여 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$ 이고, 삼수선의 정리 에서 $\overline{PM}\perp\overline{AB}$

$\overline{OP}=1$, $\overline{OM}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{PM}=\sqrt{\sqrt{3}^2-1^2}=2$

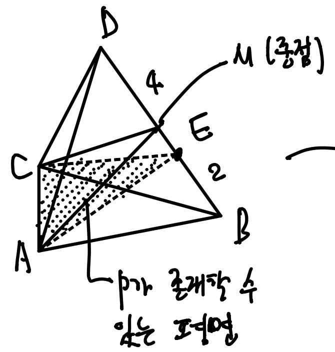
$\overline{PA}=\sqrt{\sqrt{5}^2+2^2}=3$

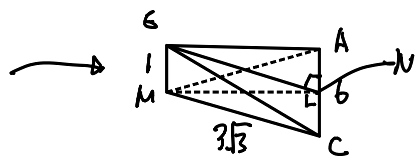
$$\frac{\text{Area}(\triangle PAB)}{\text{Area}(\triangle OPA)}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times2\times2\sqrt{5}}{\cancel{\frac{1}{2}}\times1\times3}=\frac{4}{3}\sqrt{5} \qquad p+q=\boxed{7}$$

26. 한 변의 길이가 6인 정사면체 ABCD 내부의 점 P에 대하여 사면체 ACDP의 부피가 사면체 ABCP의 부피의 2배이다. $\overline{DP}$의 최솟값을 h라 할 때, $h^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Area(△ACE) × h × $\frac{1}{3}$ = Volume(ABCD) × $\frac{2}{3}$





$\overline{MN}=3\sqrt{2}$, $\overline{EM}=1$ ...

$\overline{EN}=\sqrt{19}$,

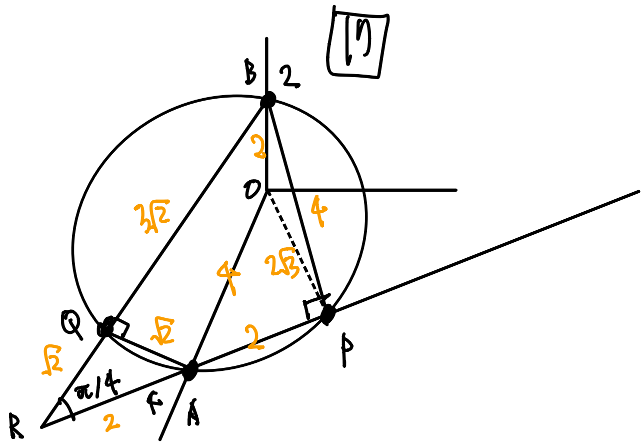
Area(△ACE) = $3\sqrt{19}$

Volume(ABCD) = $\frac{\sqrt{2}}{12}\times6^3=18\sqrt{2}$

$$h=\frac{2\times\text{Volume}(ABCD)}{\text{Area}(\triangle ACE)}=\frac{2\times\cancel{18}^{6}\sqrt{2}}{\cancel{3}\sqrt{19}}=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$$

$h^2=\dfrac{288}{19}$ $\qquad 288+19=\boxed{307}$

27. 좌표공간에서 점 A$(4, 0, 0)$, B$(0, 0, 2)$에 대하여, 선분 AB를 지름으로 하는 원 C가 xy평면과 점 P에서 만나고, 점 B를 지나고 직선 AP와 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$인 직선이 원 C와 점 Q에서 만난다. $\overline{\mathrm{AP}}=2$일 때, 점 Q의 좌표는 (a, b, c)이다. $2a-4\sqrt{3}b+c$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 y좌표는 양수이고, $\overline{\mathrm{BQ}}>2$이다.) [4점 *]



$\overline{AB}$ 지름 → $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ → $\angle APO=\frac{\pi}{2}$ (삼수선)

→ $\overline{OP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AP}^2}=2\sqrt{3}$ → $\overline{BP}=4$

→ $\overline{RP}=\dfrac{\overline{BP}}{\tan(\pi/4)}=4$

$\overline{AB}$ 지름 → $\angle AQB=\frac{\pi}{2}$ → $\overline{RQ}=\overline{AR}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

$\overline{BQ}=3\sqrt{2}$

점 P의 좌표는 $(3, \sqrt{3}, 0)$ 이고,

점 A$(4,0,0)$은 $\overline{RP}$의 중점 → $R=(5, -\sqrt{3}, 0)$

점 B$(0,0,2)$에 대하여

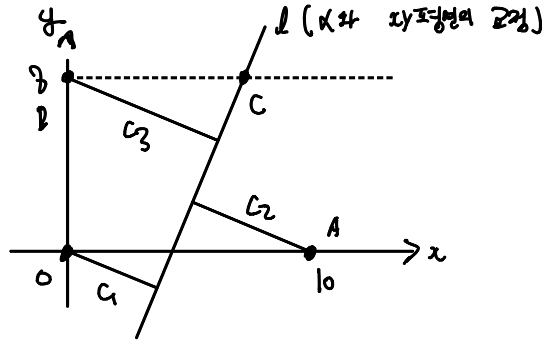
Q는 $\overline{BR}$의 3:1 내분점

→ $Q\left(\frac{15}{4}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

$\frac{15}{2}+9+\frac{1}{2}=\boxed{17}$

28. 좌표공간에 점 A$(10, 0, 0)$, B$(0, 8, 0)$, C$(k, 8, 0)$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α가 존재하도록 하는 6 이상의 양수 k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점 *]

> (가) xy평면과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이상이다.
> (나) 평면 α는 점 C를 지난다.
> (다) 평면 α와 점 O, A, B 사이의 거리는 모두 $\frac{5}{2}$ 이하이다.



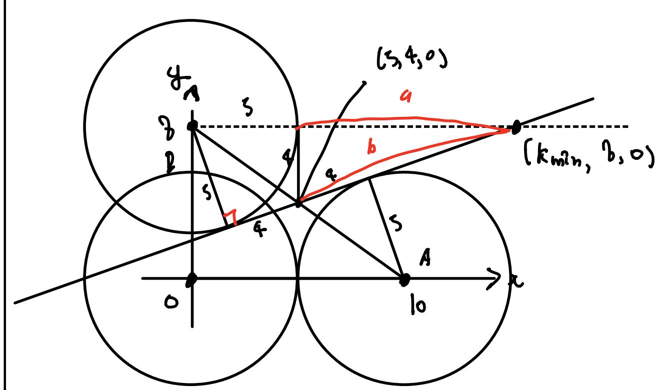
α와 O, A, B 사이의 거리를 각각 d_1, d_2, d_3라 하면

$c_1\cos\theta=d_1$
$c_2\cos\theta=d_2$
$c_3\cos\theta=d_3$
(θ는 α와 xy평면 사이의 이면각)

(가)에서 $\frac{1}{2}\le\cos\theta\le 0$ 이고, $d_1, d_2, d_3\le\frac{5}{2}$ 이므로

$\cos\theta=\frac{1}{2}$로 고정시킬 때, $c_1, c_2, c_3\le 5$ 를 얻는다.

따라서, O, A, B를 중심으로 하고 $r=5$인 원을 그리면



$a^2+4^2=b^2$, $(b+4)^2+5^2=(a+5)^2$

$a^2+16+8b+16=a^2+10a$, $4b=5a-16$

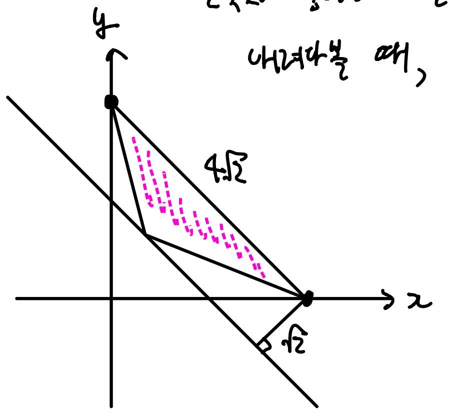
$(4a)^2+16^2=(4b)^2=(5a-16)^2$

$16a^2=25a^2-160a$, $a=\frac{160}{9}$, $k_{min}=a+5=\frac{205}{9}$

→ $\boxed{214}$

29. 좌표공간에서 점 A$(0, 4, m)$와 점 B$(4, 0, n)$, 평면 $x+y=2$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 평면 ABP와 z축이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin^2\theta$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점 #] $\boxed{259}$

z축과 평행한 시선으로 내려다볼 때,



$$\frac{\text{Area}(\text{정사영}(\triangle ABP))}{\text{Area}(\triangle ABP)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2}$$

$$= \frac{4}{9\sqrt{3}} = \cos\alpha$$

(α는 $\triangle ABP$와 xy평면 사이의 이면각)

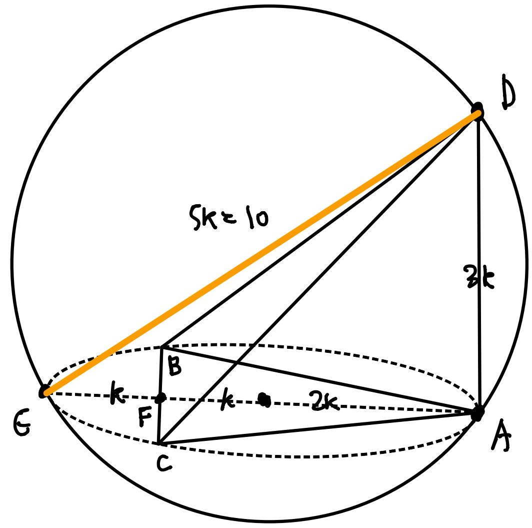
$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로, $\sin\theta = \frac{4}{9\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta = \frac{16}{243}$ $\quad 16+243=\boxed{259}$

30. 좌표공간에서 반지름의 길이가 5인 구 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 ABC는 정삼각형이다.
> (나) 선분 AD는 평면 ABC에 수직이다.

두 평면 ABC와 BCD가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 삼각형 BCD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이의 제곱을 구하시오. [4점 *] $\boxed{108}$

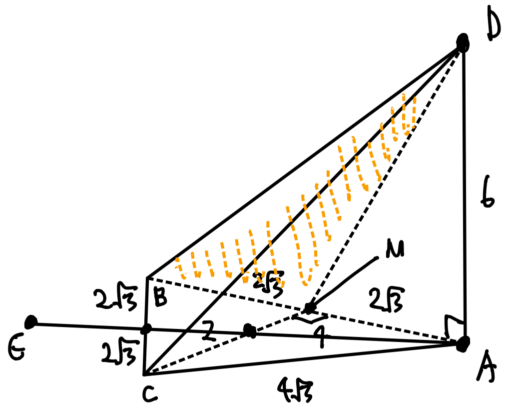


$\overline{AD}\perp ABC$ 이므로, DE가 지름이 되도록 평면 ABC 위에 점 E를 잡을 수 있다

$\overline{BC}$와 $\overline{AE}$의 교점을 F라 하고, $\overline{EF}=k$라 하면 $\overline{FA}=3k$,

ABC-BCD 이면각 크기 $\frac{\pi}{4}$ $\longrightarrow$ $\overline{AD}=3k$

$\longrightarrow$ $\overline{DE}=5k=10$, $k=2$



평면 ABC ⊥ 평면 ABD 이므로 $\triangle BCD$의 ABD 위로의 정사영 $= \triangle BMD$ 이다

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 6 = 6\sqrt{3}$

$(6\sqrt{3})^2 = \boxed{108}$