

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a} = (k+3, 3k-1)$ 과 $\vec{b} = (1, 1)$ 이 서로 평행할 때, 실수 k 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\frac{k+3}{3k-1} = 1 \quad \therefore k=2$$

답: ②

24. 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 $(2, \sqrt{2})$ 에서의 접선의 x 절편은? [3점]

- ① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$$\begin{aligned} \text{접선: } \frac{2x}{8} + \frac{\sqrt{2}y}{4} &= 1 \\ \Rightarrow 2\sqrt{2}y &= -2x + 8 \\ \Rightarrow y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2} \\ y=0 \text{ 대입) } 0 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2} \\ \therefore x &= 4. \end{aligned}$$

답: ⑤

25. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$ 에 대하여

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|$$

를 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형의 길이는?
(단, O 는 원점이다.) [3점]

- ① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP}$$

$$(\text{제4}) \Rightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}|$$

$$\text{한편, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (-3, 5) - (1, 2)$$

$$= (-4, 3)$$

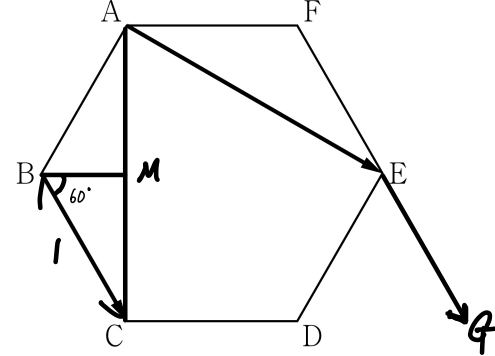
$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = 5$$

$(|\overrightarrow{AP}|)^2 = 25$ 이므로 P 는 A 를 중심,
반지름이 5인 원

$$\therefore 2 \times \pi \times 5 = 10\pi.$$

답 : ①

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 $ABCDEF$ 에서
 $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}|$ 의 값은? [3점]



- ① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

점 G는 $BC = CG$ 를 만족시키는 점이다.

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CG}$$

$$= \overrightarrow{AG}$$

$$MC = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore AC = \sqrt{3}$$

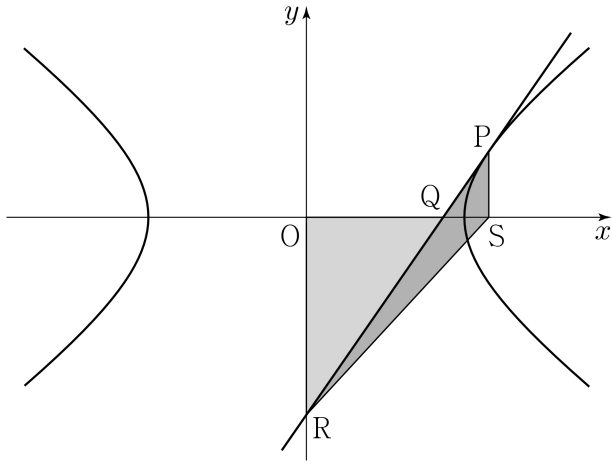
$\triangle ACG$ 에서 $AC = \sqrt{3}$, $CG = 2$, $\angle ACG = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}.$$

답 : ②

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k) (k > 0)$

에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q , y 축과 만나는 점을 R 라 하자. 점 $S(4, 0)$ 에 대하여 삼각형 QOR 의 넓이를 A_1 , 삼각형 PRS 의 넓이를 A_2 라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$ 일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O 는 원점이고, a 와 b 는 상수이다.) [3점]



- ① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

$$\text{접선: } \frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right), R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \times OQ \times OR$$

$$= \frac{1}{2} \times \left|\frac{a^2}{4}\right| \times \left|-\frac{b^2}{k}\right|$$

$$= \frac{a^2 b^2}{8k}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times PS \times OS \quad (\because PS \perp OS)$$

$$= \frac{1}{2} \times |k| \times 4$$

$$= 2k$$

$$A_1 : A_2 = \frac{a^2 b^2}{8k} : 2k = 9 : 4$$

$$\therefore 18k = \frac{a^2 b^2}{2k}$$

$$\Rightarrow 36k^2 = a^2 b^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

한편 P 는 쌍곡선 위의 점이므로 $\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$ 이다.

$$\Rightarrow 16b^2 - a^2 k^2 = a^2 b^2 \quad (\times a^2 b^2)$$

$$\Rightarrow 16b^2 - \frac{a^4 b^2}{36} = a^2 b^2 \quad (\because \textcircled{7})$$

$$\Rightarrow a^4 + 36a^2 - 576 = 0 \quad (b^2 \text{ 약분 후 } \div 36)$$

$$\Rightarrow (a^2 - 48)(a^2 + 12) = 0$$

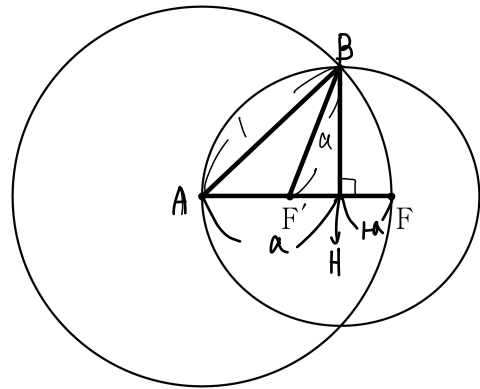
$$\Rightarrow a^2 = 48 \text{ or } 12 \quad \therefore (\text{주축의 길이}) = 4\sqrt{3}$$

답 : ③

28. 두 초점이 F, F' 이고 장축의 길이가 $2a$ 인 타원이 있다.

이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$
④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



장축의 길이가 $2a$ 이므로 $AF = BF' = a$

$$FH = AF - AH$$

$$= 1 - a$$

$$= FH$$

$\triangle ABH$ 에서

$$BH^2 = AB^2 - AH^2$$

$$= 1 - a^2$$

$\triangle BF'H$ 에서

$$BH^2 = BF'^2 - F'H^2$$

$$= a^2 - (1-a)^2$$

$$= 2a - 1$$

$$\therefore 1 - a^2 = 2a - 1$$

$$\Rightarrow a = -1 + \sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

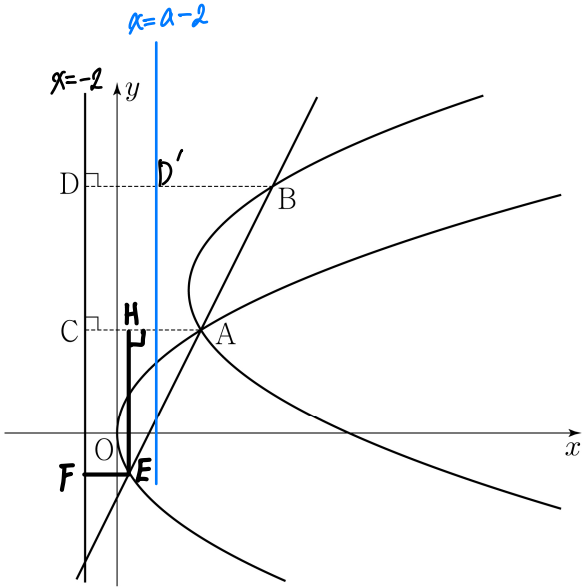
답 : ③

단답형

29. 포물선 $y^2=8x$ 와 직선 $y=2x-4$ 가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a 에 대하여

포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$ 와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$ 이다. k^2 의 값을 구하시오.

[4점]



점 E에서 평행이동 후 점 A가 된다.

$\Rightarrow a = (\text{A와 E의 } x\text{좌표의 차})$

점 A, E는 $y^2=8x$ 와 $y=2x-4$ 의 교점.

(연립) $\Rightarrow x^2-6x+4=0$

두 근의 합: 6, 곱: 4

$\Rightarrow \text{차: } 2\sqrt{5}$

$\therefore a=2\sqrt{5}$

$$\overline{AC} + \overline{BD} = (\overline{EF} + a) + (\overline{AC} + a)$$

$$= \overline{EF} + \overline{AC} + 2a$$

$$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{EF} + \overline{AC}$$

$$\therefore k = 2a$$

$$= 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow k^2 = 80$$

답 : 80

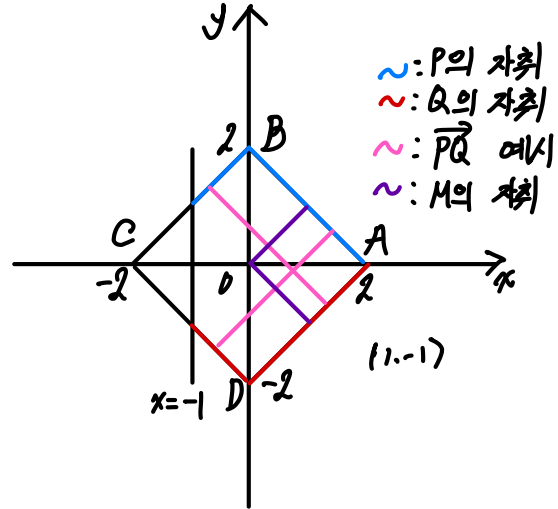
30. 좌표평면 위의 네 점 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 0)$, $D(0, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$(나) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2 \text{ 이고 } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0 \text{ 이다.}$$

$$(다) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2 \text{ 이고 } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0 \text{ 이다.}$$

점 $R(4, 4)$ 에 대하여 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



$$(가) \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB} \text{ or } \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AD}$$

$$(나) P\text{의 } x\text{좌표} \geq -1 \text{ and } P\text{의 } y\text{좌표} \geq 0$$

$$(다) Q\text{의 } x\text{좌표} \geq -1 \text{ and } Q\text{의 } y\text{좌표} \leq 0$$

$\overrightarrow{PQ}$ 의 중점을 S이라 하자.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} &= (\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MQ}) \\ &= (\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{RM} - \overrightarrow{MP}) \quad (\because \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}) \end{aligned}$$

$$= (|\overrightarrow{RM}|)^2 - (|\overrightarrow{MP}|)^2$$

$$= (|\overrightarrow{RM}|)^2 - 2 \quad (\because \overrightarrow{PQ} = 2\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{RM}|^2\text{의 최댓값은 } M\text{이 } (0,0)\text{일 때, } 3^2+5^2=34.$$

$$\text{최솟값은 } S\text{이 } (1,1)\text{일 때, } 3^2+5^2=18$$

$$\therefore M = 34 - 2 = 32$$

$$m = 18 - 2 = 16$$

$$M + m = 48.$$

답: 48

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.