제 2 교시

# 수학 영역

22. 이차항의 계수가 양인 이차함수 $f(x)$가 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$f(0)=1,\quad f(1)=2,\quad \int_0^1 |f'(x)|\,dx=9$$

이 때, $[0,1]$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**[해설]**

$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 도함수 $f'(x)$ 역시 최고차항의 계수가 양수인 일차함수입니다. 일차함수는 무조건 하나의 실근을 가지기 때문에 $f'(x)$ 역시 하나의 실근을 가집니다.
$f'(x)$의 실근을 $k$라고 할 경우 다음과 같이 세 가지로 케이스 분류가 가능합니다.

1) $k \le 0$
2) $0 < k < 1$
3) $k \ge 1$

먼저 1)의 경우부터 봅시다.

1) $k \le 0$

이 경우 $\int_0^1 |f'(x)|\,dx$를 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx = \int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0)=1$$

그러나 문제에서 해당 값은 9라고 했으므로 모순입니다.

2) $0 < k < 1$

이 경우 $\int_0^1 |f'(x)|\,dx$를 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x)|\,dx &= \int_0^k \{-f'(x)\}dx + \int_k^1 f'(x)dx \\ &= -f(k)+f(0)+f(1)-f(k) \\ &= 3-2f(k) \\ &= 9\end{aligned}$$

위의 식에 따르면 $f(k)=-3$입니다. $f'(x)$의 실근을 $k$라고 할 때, $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값이며 그 값을 기준으로 대칭입니다. 문제에서 요구하는 것이 $[0,1]$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값이고, $k$의 범위 역시 $0<k<1$이기 때문에 최댓값은 $|f(k)|$이며 그러므로 최댓값은 3입니다.

3) $k \ge 1$

이 경우 $\int_0^1 |f'(x)|\,dx$를 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx = \int_0^1 \{-f'(x)\}dx = f(0)-f(1) = -1$$

그러나 문제에서 해당 값은 9라고 했으므로 모순입니다.

해당 경우 중 문제를 만족시키는 경우는 2)의 경우이고, 그러므로 답은 3번입니다.