# 수학 영역(수2)

**1.** 두 함수

$$f(x) = x^3 - 2kx^2 + 3$$

$$g(x) = x^2 - 3kx$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 $k$의 최댓값은?

> $a < b$인 모든 실수 $a$, $b$에 대하여
> $$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
> 이다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $1$ ⑤ $\frac{5}{4}$

**2.** 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 음수 $x$에 대하여 $\int_0^x f(t)dt \le 0$이다.
>
> (나) $f(3) = 0$이고 $\int_0^3 f(x)dx \le 0$이다.

$\frac{f(9)}{f(6)}$의 최댓값과 최솟값의 차는?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

**3.** 다음 조건을 만족시키고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 두 자연수 $m$, $n$의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오. (단, $m \le 2$)

> (가) 함수 $|f(x)-x^m|$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) $f(0)=n$이고 $f'(0) \le 17-m$이다.

**4.** 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f'(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

$f(1)+f(-1)=k$라 할 때, 모든 $k$의 값의 곱을 구하시오.

**5.** 최고차항의 계수가 $-1$이고 $f(0)=f'(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 $x=a(a>0)$에서 극대이고

$$f(a) \le (f \circ f)(a)$$

일 때, $f(\sqrt{2})$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

**6.** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=ax^2-\left(2a-\frac{1}{2}\right)x+1$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> $k=0,\ 2,\ p$일 때, $f(k)=k$이고, 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 $g(k)$이다.

두 상수 $a$, $p$에 대하여 $\dfrac{1}{a^2 \times p^2}$의 값을 구하시오. (단, $p>2$)

**7.** 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+k$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(|t|)dt$$

라 하자. 함수

$$h(x)=f'(x)g(x)-\int_0^x (2u+3)g(u)du$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 실수 $a$의 개수가 2가 되도록 하는 실수 $k$의 최솟값은?

① $-\frac{41}{2}$ ② $-\frac{43}{2}$ ③ $-\frac{45}{2}$ ④ $-\frac{47}{2}$ ⑤ $-\frac{49}{2}$

**8.** 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 $x$에 대하여 $(x-3)f(x)\le 0$이다.
(나) $\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{f(x)}=f(1)$

$f(1)\neq 0$일 때, $f'(k)$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ 1 ④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

9. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & (x \ge 1 \text{ 또는 } x \le -2) \\ x+k & (-2 < x < 1) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+5x & (x \le k) \\ -4x+5 & (x > k) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 $x=\alpha$에서 불연속인 $\alpha$의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 $k$의 값의 곱을 구하시오.

10. 함수

$$f(x)=\int_0^x |tx-|x||dt$$

에 대하여 $3\times\int_{-1}^{3} f(x)dx$의 값을 구하시오.

**11.** 최고차항의 계수가 1이고 극값 2를 갖는 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f'(x) & (x \le k) \\ f'(x)+f(1) & (x > k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 실수 $a$의 집합을 $A$, 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 극대 또는 극소인 실수 $b$의 집합을 $B$라 할 때,

$$A \cup B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 2\}$$

이다. $f(4)$의 값을 구하시오.

**12.** 다음 조건을 만족시키고 최고차항의 계수가 $\frac{1}{6}$인 삼차함수 $f(x)$의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오.

| |
|---|
| 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $a$라 할 때, $f'(0)=f'(a)=0$이고, 함수 $nf(x)$의 극댓값은 $a$이다. |

**13.** 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2를 갖는다.
> (나) 함수 $f'(x)$의 최솟값은 $-9$이다.
> (다) 방정식 $(f' \circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

함수 $f(x)$가 음수인 극솟값 $m$을 가질 때, $m^2$의 값을 구하시오.

**14.** 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1)\times\{f(x)\}^2 & (x<0) \\ f(x-1)\times\int_0^x f(t)dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 방정식 $g(x)=-\frac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. $f(2)$의 최솟값을 $k$라 할 때, $k^2$의 값을 구하시오.

**15.** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 $t$에 대하여

$$f(x)=t \text{ 또는 } (t-a)^2+x^2=0$$

을 만족시키는 모든 실수 $x$의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 실수 $k$에 대하여 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이면, 함수 $g(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.
(나) $g(-3)<g(4)$

$f'(0)=0$일 때, $f(1)$의 최솟값은? (단, $a$는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**16.** 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2-\int_1^x f(t)dt$$

가 $x=1$에서 극댓값 0을 갖는다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(1)=0$
ㄴ. $1<f(2)<2$
ㄷ. $a<1$인 실수 $a$에 대하여 $g'(a)=0$이면 $-\frac{1}{6}<g(a)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**17.** $a<1$인 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=9(x-a)(x-1)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} x-a-\dfrac{1}{3} & (f'(x)=0) \\ f(x) & (f'(x)\neq 0) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=0$이면 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$이다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=k(k<1)$에서 불연속이면 $f(k)>g(k)$이다.

ㄷ. 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 양수 $t$는 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**18.** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 $t$에 대하여 함수 $|f(x)-f(t)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않고, $t\leq a$인 모든 실수 $a$의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$와 음수 $k$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $g(t)=0$의 실근은 1 뿐이다.
(나) $g(0)=1$이고 $g(k)=2$이다.

$f(0)=0$, $f(k)<0$일 때, $f(2)$의 범위는 $\alpha<f(2)<\beta$이다. $36(\beta-\alpha)$의 값을 구하시오.

**19.** 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3\sqrt{3})$의 값을 구하시오. (단, $k$는 $k<1$인 상수이다.)

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) 실수 $t$에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 7이기 위한 필요충분조건은 $k<t<1$이다.

**20.** 자연수 $n$과 실수 $p$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p$가 될 수 있는 모든 수의 합은 $S$이다. $6S^2$의 값을 구하시오.

> 함수 $\left|x^3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}nx^2+a\right|$가 $x=t$에서 극소이고 $a\le t$인 실수 $t$의 개수가 2가 되도록 하는 실수 $a$의 집합은 $\{a|a\le p\}$이다.

정답

1. ④
2. ②
3. 22
4. 484
5. ②
6. 4
7. ③
8. ⑤
9. 10
10. 16
11. 34
12. 62
13. 100
14. 36
15. ②
16. ⑤
17. ②
18. 96
19. 351
20. 27

해설

1. 주어진 조건

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

에서 양 변에 $b-a(b-a>0)$를 곱해서 정리하면

$$f(a)-g(a) \le f(b)-g(b)$$

이고, 이는 함수 $f(x)-g(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가한다는 것을 알 수 있다.

$f(x)-g(x)=(x^3-2kx^2+3)-(x^2-3kx)=x^3-(2k+1)x^2+3kx+3$
에서 $f'(x)-g'(x) \ge 0$이어야 하므로
$f'(x)-g'(x)=3x^2-2(2k+1)x+3k \ge 0$이어야 한다.
즉, 이차방정식 $3x^2-2(2k+1)x+3k=0$의 판별식 $D$가 0보다 작거나 같아야 한다.

$$D=4(2k+1)^2-36k=4(4k-1)(k-1) \le 0$$

에서 $\frac{1}{4} \le k \le 1$이고, $k$의 최댓값은 1이다.

답) 1

2. 모든 음수 $x$에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt \le 0 \Rightarrow \int_x^0 f(t)dt \ge 0$$

이므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이며, 모든 음수 $x$에 대하여 $f(x) \ge 0$이다.

$f(3)=0$임을 이용해서 $f(x)=a(x-b)(x-3)$이라 두면,
$a>0$이고, 모든 음수 $x$에 대하여 $f(x) \ge 0$이므로 $b \ge 0$이다.

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 a(x-b)(x-3)dx = a \times \int_0^3 \{x^2-(3+b)x+3b\}dx$$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3+b}{2}x^2+3bx\right]_0^3=\frac{9}{2}a(b-1)$$

$\int_0^3 f(x)dx \le 0$에서 $\frac{9}{2}a(b-1) \le 0$이고, $b \le 1$이다.

즉, $0 \le b \le 1$이고 $\frac{f(9)}{f(6)}=\frac{6a(9-b)}{3a(6-b)}=\frac{18-2b}{6-b}$이므로

$b=0$에서 최솟값 3, $b=1$에서 최댓값 $\frac{16}{5}$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $\frac{16}{5}-3=\frac{1}{5}$이다.

답) $\frac{1}{5}$

3. (i) $m=1$일 때,

함수 $f(x)-x$는 삼차함수이므로 함수 $|f(x)-x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는

$$f(x)-x=(x+a)^3$$

이어야 한다. ($a$는 실수) 즉,
$f(x)=(x+a)^3+x=x^2+3ax^2+(3a^2+1)x+a^3$이다.

$f(0)=a^3=n$에서 $a=n^{\frac{1}{3}}$이고,
$f'(0)=3a^2+1\le 16$에서 $a^2=n^{\frac{2}{3}}\le 5,\ n\le 5\sqrt{5}$이다.
$n$이 자연수이므로 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11$
즉, 순서쌍 $(m,\ n)$은 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (1,\ 11)$이고 11개다.

(ii) $m=2$일 때,

함수 $f(x)-x^2$는 삼차함수이므로 함수 $|f(x)-x^2|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는

$$f(x)-x^2=(x+a)^3$$

이어야 한다. ($a$는 실수) 즉,
$f(x)=(x+a)^3+x^2=x^2+(3a+1)x^2+3a^2x+a^3$이다.

$f(0)=a^3=n$에서 $a=n^{\frac{1}{3}}$이고,
$f'(0)=3a^2\le 15$에서 $a^2=n^{\frac{2}{3}}\le 5,\ n\le 5\sqrt{5}$이다.
$n$이 자연수이므로 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11$
즉, 순서쌍 $(m,\ n)$은 $(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2,\ 11)$이고 11개다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $11+11=22$이다.

답) 22

4. $f(0)=0$이므로 조건 (가)에 따라 다음과 같은 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(x)-x=x(x-a)^2$

(ii) $f(x)-x=x^2(x-a)$ (단, $a\neq 0$)

(i) $f(x)-x=x(x-a)^2$

$f(x)=x(x-a)^2+x=x^3-2ax^2+(a^2+1)x$이고
$f'(x)=3x^2-4ax+a^2+1$이다. 이때 조건 (나)에 의하여 방정식 $f'(x)-x=0$이 중근을 가져야 한다.

$f'(x)-x=3x^2-(4a+1)x+a^2+1=0$에서 이 방정식이 중근을 가져야 하므로 (판별식)$=0$이아야 한다.

(판별식)$=(4a+1)^2-12(a^2+1)=4a^2+8a-11=0$

방정식 $4a^2+8a-11=0$은 서로 다른 두 실근 $\alpha,\ \beta$를 가지므로,
$f(1)+f(-1)=(1-a)^2-(-1-a)^2=-4a=k$에서 모든 $k$의 곱은
$(-4\alpha)(-4\beta)=16\alpha\beta=16\times\left(-\frac{11}{4}\right)=-44$ (근과 계수와의 관계)

(ii) $f(x)-x=x^2(x-a)$

$f(x)=x^2(x-a)+x=x^3-ax^2+x$이고
$f'(x)=3x^2-2ax+1$이다. 이때 조건 (나)에 의하여 방정식 $f'(x)-x=0$이 중근을 가져야 한다.

$f'(x)-x=3x^2-(2a+1)x+1=0$에서 이 방정식이 중근을 가져야 하므로 (판별식)$=0$이아야 한다.

(판별식)$=(2a+1)^2-12=4a^2+4a-11=0$

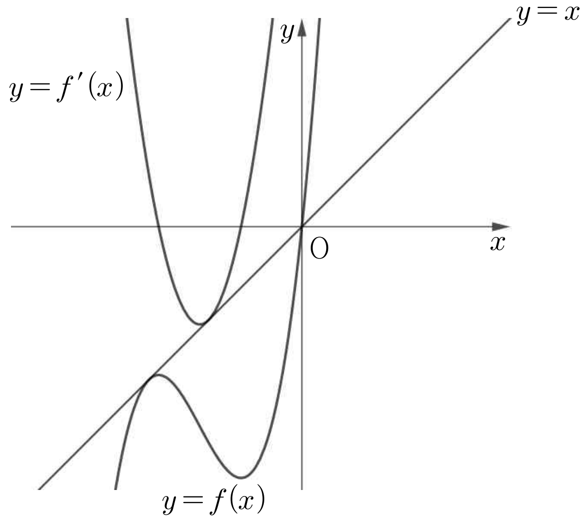
방정식 $4a^2+4a-11=0$은 서로 다른 두 실근 $\gamma,\ \delta$를 가지므로,
$f(1)+f(-1)=1-a-1-a=-2a=k$에서 모든 $k$의 곱은
$(-2\gamma)(-2\delta)=4\gamma\delta=4\times\left(-\frac{11}{4}\right)=-11$ (근과 계수와의 관계)

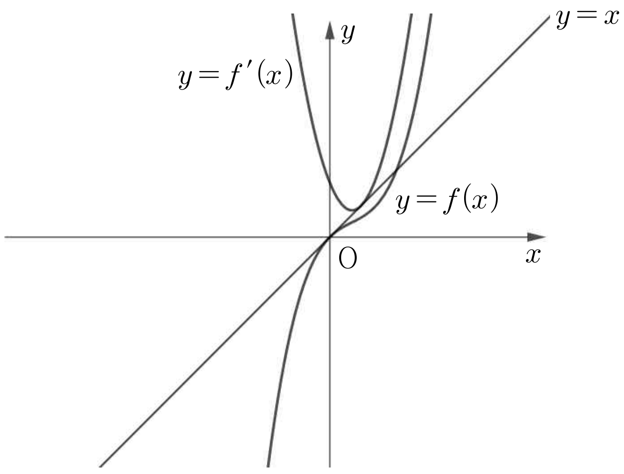
(i), (ii)에 의하여 모든 $k$의 값의 곱은 $(-44)\times(-11)=484$이다.

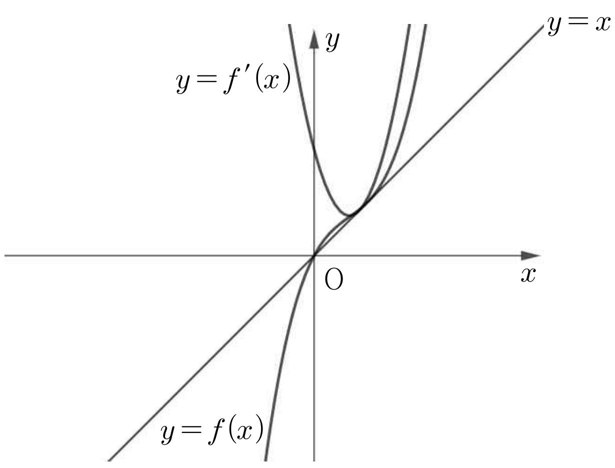
답) 484

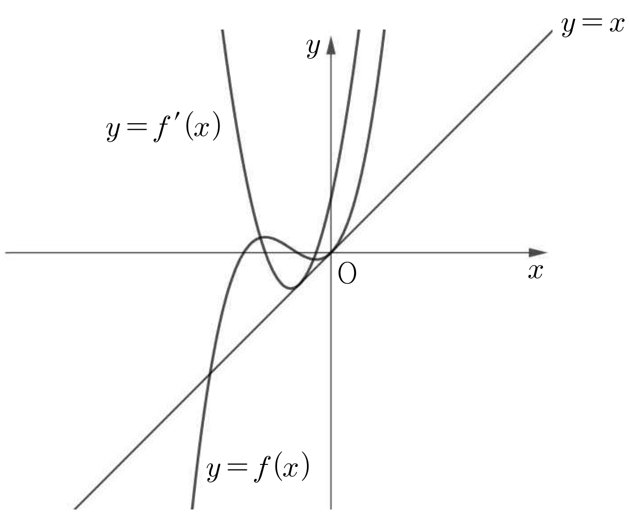
참고)

위의 상황에서 알 수 있듯이, 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 4이다. 이때의 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $f'(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



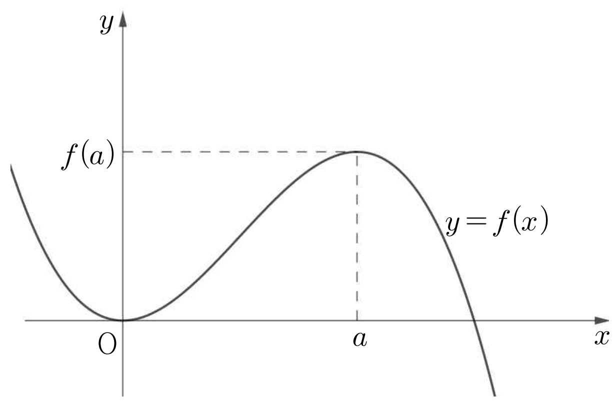




5. $f(x)=-x^2(x-k)$라 하면, $f'(x)=-x(3x-2k)$이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이므로 $f'(a)=0$이어야 한다.

$a>0$이므로 $3a-2k=0$이고, $k=\frac{3}{2}a$이다.

함수 $f(x)=-x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




위의 그래프에서 두 가지 사실을 알 수 있다.

(i) $f(a)>0$

(ii) 모든 양수 $x$에 대하여 $f(a)\geq f(x)$

위 두 가지 사실을 조합하면

$$f(a)\geq(f\circ f)(a)$$

를 얻고, $f(a)\leq(f\circ f)(a)$이므로

$$f(a)=(f\circ f)(a)$$

를 얻는다. 즉, $x=f(a)$일 때 극솟값 $f(a)$를 갖는다는 것을 알 수 있고, $f(a)=a$라는 것을 알 수 있다.

$f(a)=-a^2\left(-\frac{1}{2}a\right)=\frac{a^3}{2}=a$이므로 $a^2=2$에서 $a=\sqrt{2}$를 얻는다.

따라서 $f(x)=-x^2\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$이고 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$이다.

답) $\sqrt{2}$

6. 조건에 의하여 $f(0)=0,\ f(2)=2$이고, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
$g(0)=1$이므로 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖고, $g(2)=2$이므로 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 즉, 함수 $f(x)$는 극값 2를 갖고, $f(2)=2$이므로 다음의 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(x)=(x-2)(x-a)^2+2$

$f(0)=-2a^2+2=0$이므로 $a^2=1,\ a=1$ 또는 $a=-1$이다.

① $a=1$이면 $f(x)=(x-2)(x-1)^2+2$이다.
방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이어야 한다.

$f(x)-x=x(x-2)^2$에서 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a=-1$이면 $f(x)=(x-2)(x+1)^2+2$이다.
방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이어야 한다.

$f(x)-x=x(x-2)(x+2)$에서 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 조건을 만족시키고, $p=-2$이다. 그런데 $2<p$이므로 모순이다.

(ii) $f(x)=(x-2)^2(x-a)+2$

$f(0)=-4a+2=0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$이고,

$f(x)=(x-2)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+2$이다.

$f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이어야 하고,

$f(x)-x=x(x-2)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$이므로 조건을 만족시키고

$p=\dfrac{5}{2}>2$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=(x-2)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+2$이다.

방정식 $f(x)=\dfrac{5}{2}$이 서로 다른 실근의 개수가 $g\left(\dfrac{5}{2}\right)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 알아야 한다.

$f(x)=(x-2)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+2$에서 $f'(x)=3x^2-9x+6=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이고, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=\dfrac{5}{2}$를 갖는다. 따라서 방정식 $f(x)=\dfrac{5}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, $g\left(\dfrac{5}{2}\right)=2$이다.

$g\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{4}a+\dfrac{9}{4}=2$에서 $a=-\dfrac{1}{5}$이고 $\dfrac{1}{a^2\times p^2}=4$이다.

답) 4

7. $h(x)=f'(x)g(x)-\displaystyle\int_0^x(2u+3)g(u)du$

$=(x^2+3x)g(x)-\displaystyle\int_0^x(2u+3)g(u)du$에서

$h'(x)=(2x+3)g(x)+(x^2+3x)g'(x)-(2x+3)g(x)$
$=x(x+3)g'(x)=x(x+3)f(|x|)$이다.

함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 실수 $a$의 개수가 2가 되도록 하려면, 함수 $h'(x)$의 부호변화가 두 번 나타나야 한다.
$h'(0)=h'(3)=0$이므로 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(|x|)\geq 0$인 경우

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.
$f'(x)=x(x+3)$이고 $x\geq 0$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x\geq 0$에서 증가한다. 즉, $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=k$이다. 따라서 $k\geq 0$이다.

(ii) $f(|p|)=0$인 $p$가 존재하는 경우 $(p\neq 0)$

함수 $f(x)$는 $x\geq 0$에서 증가하고 $f(|p|)=f(|-p|)=0$이므로 방정식 $f(|x|)=0$의 실근은 $p$ 또는 $-p$이다.
함수 $h'(x)$의 부호변화가 두 번 나타나야 하고 $h'(0)=h'(3)=0,\ p\neq 0$이므로 방정식 $f(|x|)=0$의 실근이 $-3$이어야 한다. $f(|-3|)=f(3)=0$에서 $\dfrac{45}{2}+k=0$이고,

$k=-\dfrac{45}{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 $k=-\dfrac{45}{2}$ 또는 $k\geq 0$이고, $k$의 최솟값은 $-\dfrac{45}{2}$이다.

답) $-\dfrac{45}{2}$

8. 모든 실수 $x$에 대하여 $(x-3)f(x) \le 0$이므로, $x \le 3$이면 $f(x) \ge 0$, $x \ge 3$이면 $f(x) \le 0$이다. 즉, $f(3)=0$이다.

$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{f(x)} = f(1)$에서 $f(1) \ne 0$이므로 0이 아닌 극한값이 존재하려면 $f(-1)=0$이어야 한다.
$x \le 3$이면 $f(x) \ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 접해야 한다. 따라서 $f'(-1)=0$이다.

$f(x)=a(x+1)^2(x-3)$이라 두면,

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{f(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{a(x+1)^2(x-3)}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{f'(x)+k}{a(x+1)(x-3)} = f(1)$$

극한값이 존재하려면 $f'(-1)+k=k=0$이어야 한다. 따라서

$$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{a(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{2a(x+1)(x-3)+a(x+1)^2}{a(x+1)(x-3)}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{2a(x-3)+a(x+1)}{a(x-3)} = \frac{-8a}{-4a} = 2 = f(1)$$

$f(1)=2$이므로 $f(1)=a(1+1)^2(1-3)=-8a=2$, $a=-\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^2(x-3)$이고,

$f'(k)=f'(0)=\frac{5}{4}$이다.

답) $\frac{5}{4}$

9. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$인 $x$에서 항상 불연속이다. 이때, $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$이므로 $f(1)=f(-2)=0$이고, 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=1$, $x=-2$에서 불연속이다. 따라서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x \ne 1$이고 $x \ne -2$인 모든 실수 $x$에 대하여 연속이어야 한다.

$f(x)$는 $x \ne 1$이고 $x \ne -2$인 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) \ne 0$이어야 한다. 따라서 $-2 < x < 1$에서 $x+k > 0$ 또는 $x+k < 0$이어야 한다.
$x+k > 0$이어야 하는 경우는 $k \ge 2$이어야 하고,
$x+k < 0$이어야 하는 경우는 $k \le -1$이어야 한다.
따라서 $k \le -1$ 또는 $k \ge 2$이다.

$g(x)$가 $x=k$에서 연속인지 불연속인지에 따라서 경우를 나누면

(i) $g(x)$가 $x=k$에서 연속인 경우

$\lim_{x \to k+} g(x) = \lim_{x \to k-} g(x)$에서 $2k^2+5k=-4k+5$이고 $k=-5$ 또는 $k=\frac{1}{2}$인데, $k \le -1$ 또는 $k \ge 2$이므로 $k=-5$이다.

(ii) $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 경우

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x \ne 1$이고 $x \ne -2$인 모든 실수 $x$에 대하여 연속이어야 하므로 함수 $g(x)$는 $x=1$ 또는 $x=-2$에서 불연속이어야 한다. 따라서 $k=1$ 또는 $k=-2$이고, $k \le -1$ 또는 $k \ge 2$이므로 $k=-2$이다.

(i), (ii)에 의하여 $k=-5$ 또는 $k=-2$이고, 모든 $k$의 값의 곱은 $(-5)\times(-2)=10$이다.

답) 10

10. $f(x)=\int_0^x |tx-|x||dt$에서

(i) $-1 \le x \le 0$

$$f(x)=\int_0^x |tx-|x||dt=\int_0^x |tx+x|dt=\int_0^x |x||t+1|dt$$
$$=-x\int_0^x |t+1|dt=-x\int_0^x (t+1)dt=-x\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^x$$
$$=-\frac{1}{2}x^3-x^2$$

(ii) $0 \le x \le 1$

$$f(x)=\int_0^x |tx-|x||dt=\int_0^x |tx-x|dt=\int_0^x |x||t-1|dt$$
$$=x\int_0^x |t-1|dt=x\int_0^x (1-t)dt=x\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x$$
$$=x^2-\frac{1}{2}x^3$$

(iii) $1 \le x$

$$f(x)=\int_0^x |tx-|x||dt=\int_0^x |tx-x|dt=\int_0^x |x||t-1|dt$$
$$=x\int_0^x |t-1|dt=x\int_0^1 (1-t)dt+x\int_1^x (t-1)dt$$
$$=x\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+x\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_1^x=\frac{1}{2}x+x\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}x^3-x^2+x$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^3-x^2 & (-1 \le x < 0) \\ x^2-\frac{1}{2}x^3 & (0 \le x < 1) \\ \frac{1}{2}x^3-x^2+x & (1 \le x) \end{cases}$

$$\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=-\frac{5}{24}+\frac{5}{24}+\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$

따라서 구하는 값은 $3\times\frac{16}{3}=16$이다.

답) 16

다른 풀이)

$f(x)=\int_0^x |tx-|x||dt$에서

$$f(-x)=\int_0^{-x} |-tx-|-x||dt=\int_0^{-x} |tx+|x||dt$$
$$=-\int_{-x}^0 |tx+|x||dt$$

이때 $t$에 대한 두 함수 $|tx-|x||$, $|tx+|x||$의 그래프는 직선 $t=0$에 대하여 대칭이다. 따라서

$$\int_0^x |tx-|x||dt=\int_{-x}^0 |tx+|x||dt$$

이다. 즉,

$$f(-x)=-\int_{-x}^0 |tx+|x||dt=-f(x)$$

이므로 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서

$$\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^3=\frac{16}{3}$$

이고, 구하는 값은 $3\times\frac{16}{3}=16$이다.

11. 집합 $A\cup B$의 원소의 개수는 4이고, 함수 $A$의 원소의 개수는 2이다. 함수 $B$의 원소의 개수는 최대 2이므로, 함수 $B$의 원소의 개수가 2가 되어야 한다. 즉, 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 극대 또는 극소인 $b$의 개수는 2이다.

함수 $g(x)$는 $f'(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 $\alpha$인 경우와 $k$인 경우에서 극대 또는 극소를 가진다. 따라서 집합 $A\cup B$에 $\alpha$와 $k$가 포함되어 있다.

집합 $A$의 원소는 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 $p,\ q(p<q)$ 이므로

$$A\cup B=\{p,\ q,\ \alpha,\ k\}$$

이다.

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 $p,\ q(p<q)$와 $f'(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 $\alpha$에 대하여 세 수 $p,\ \alpha,\ q$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 집합 $A\cup B$의 원소가 $-2,\ -1,\ 0,\ 2$이므로 $p,\ \alpha,\ q$가 될 수 있는 경우는 다음의 두 가지 경우가 있다.

(i) $p=-2,\ \alpha=-1,\ q=0$인 경우

$f'(x)=3x(x+2)=3x^2+6x$이고 $f(x)=x^3+3x^2+C$이다. 또, $k=2$이므로 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}3x^2+6x & (x\le 2)\\ 3x^2+6x+f(1) & (x>2)\end{cases}$$

이다.

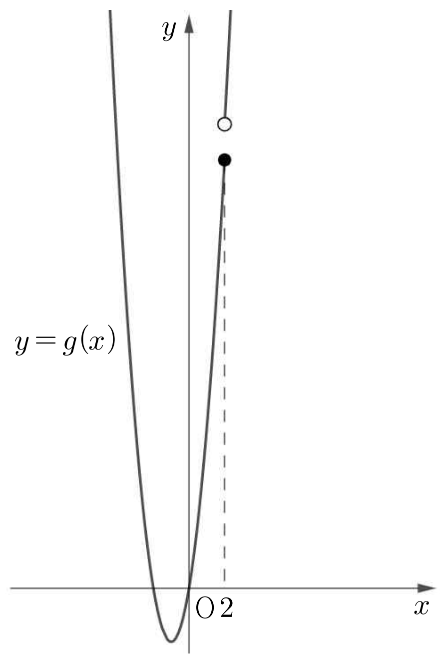
함수 $f(x)$가 극값 2를 가지므로 다음과 같은 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

① $f(-2)=2$인 경우

$f(-2)=-8+12+C=4+C=2$이므로 $C=-2$이고 $f(1)=1+3-2=2$이다. 따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}3x^2+6x & (x\le 2)\\ 3x^2+6x+2 & (x>2)\end{cases}$$

이고, 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




그림과 같이 $x=2$에서 극값을 갖지 않고, 조건을 만족시키지 않는다.

② $f(0)=2$인 경우

$C=2$이고, $f(1)=1+3+2=6$이다. 따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}3x^2+6x & (x\le 2)\\ 3x^2+6x+6 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 위의 ①의 경우와 같이 $x=2$에서 극값을 갖지 않고, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $p=-2,\ \alpha=0,\ q=2$인 경우

$f'(x)=3(x-2)(x+2)=3x^2-12$이고 $f(x)=x^3-12x+C$이다. 또, $k=-1$이므로 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}3x^2-12 & (x\le -1)\\ 3x^2-12+f(1) & (x>-1)\end{cases}$$

이다.

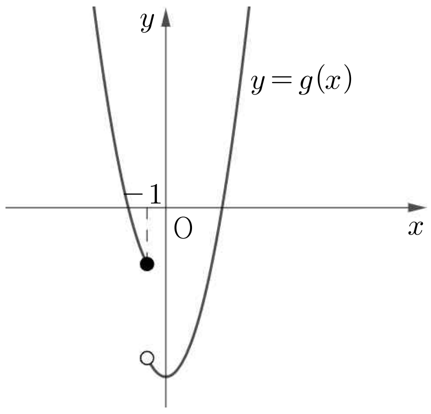
함수 $f(x)$가 극값 2를 가지므로 다음과 같은 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

③ $f(-2)=2$인 경우

$f(-2)=-8+24+C=16+C=2$이므로 $C=-14$이고 $f(1)=1-12-14=-25$이다. 따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}3x^2-12 & (x\le -1)\\ 3x^2-25 & (x>-1)\end{cases}$$

이고, 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



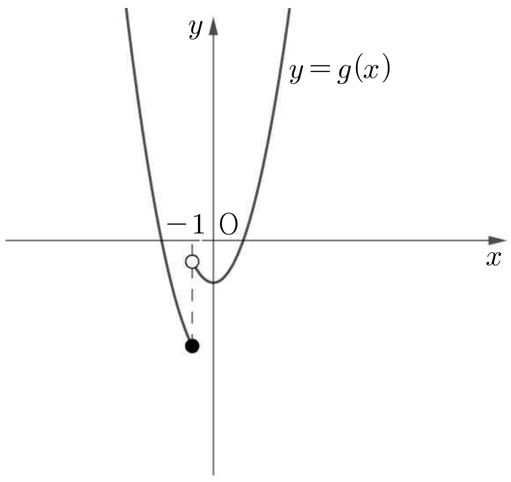

그림과 같이 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 조건을 만족시키지 않는다.

④ $f(2)=2$인 경우

$f(2)=8-24+C=-16+C=2$이므로 $C=18$이고
$f(1)=1-12+18=7$이다. 따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}3x^2-12 & (x\le -1)\\ 3x^2-5 & (x>-1)\end{cases}$$

이고, 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




그림과 같이 $x=-1$에서 극소이고, 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^3-12x+18$이고, $f(4)=34$이다.

답) 34

12. (i) $a=1$인 경우

$f'(0)=f'(1)=0$이므로 $f'(x)=\frac{1}{2}x(x-1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$이고,

$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+C$이다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지므로 함수 $f(x)$의 극솟값이 0보다 커야한다.

즉, $f(1)>0$이어야 한다. $f(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+C=C-\frac{1}{12}>0$에서

$C>\frac{1}{12}$이다.

또, 함수 $nf(x)$의 극댓값이 1이므로 $nf(0)=nC=1$,

$C=\frac{1}{n}$이다. 따라서 $\frac{1}{n}>\frac{1}{12}$이고 $n<12$이다.

(ii) $a=2$인 경우

$f'(0)=f'(2)=0$이므로 $f'(x)=\frac{1}{2}x(x-2)=\frac{1}{2}x^2-x$이고,

$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$이다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 의 실근의 개수가 2이므로 가지므로 함수 $f(x)$의 극값 중 0이 있어야 하고, 함수 $nf(x)$가 극댓값 2를 가지므로 $f(x)$의 극솟값이 0이어야 한다.

즉, $f(2)=0$이어야 한다. $f(1)=\frac{8}{6}-2+C=C-\frac{2}{3}=0$에서

$C=\frac{2}{3}$이다.

또, 함수 $nf(x)$의 극댓값이 2이므로 $nf(0)=\frac{2n}{3}=2$, $n=3$이다.

(iii) $a=3$인 경우

$f'(0)=f'(3)=0$이므로 $f'(x)=\frac{1}{2}x(x-3)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$이고,

$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{4}x^2+C$이다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 의 실근의 개수가 3이므로 가지므로 함수 $f(x)$의 극솟값이 0보다 작아야 한다.

즉, $f(3)<0$이어야 한다. $f(3)=\frac{27}{6}-\frac{27}{4}+C=C-\frac{9}{4}<0$에서

$C<\frac{9}{4}$이다.

또, 함수 $nf(x)$의 극댓값이 3이므로 $nf(0)=nC=3$.

$C=\frac{3}{n}$이고, $\frac{3}{n}<\frac{9}{4}$에서 $\frac{4}{3}<n$이다.

(i), (ii), (iii)에서

$n < 12$이면 $a=1$인 삼차함수 $f(x)$가 존재하고,
$n=3$이면 $a=2$인 삼차함수 $f(x)$가 존재하고,
$\frac{4}{3} < n$이면 $a=3$인 삼차함수 $f(x)$가 존재한다.

즉, $n=1$이면 함수 $f(x)$의 개수가 1이고
$n=2$이면 함수 $f(x)$의 개수가 2이고
$n=3$이면 함수 $f(x)$의 개수가 3이고
$n=4 \sim 11$이면 함수 $f(x)$의 개수가 2이고
$n \geq 12$이면 함수 $f(x)$의 개수가 1이다.

따라서 구하는 자연수 $n$은

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

이고 합은 $2+4+5+6+7+8+9+10+11=62$이다.

답) 62

13. 조건 (가)에서 $f'(x)=ax(x-k)$라 둘 수 있고, $k>0$이다.

조건 (나)에 의하여 $a>0$이다.

조건 (다)에서 $f(x)=t$라 두면 $f'(t)=0$의 실근의 개수가 5인데, $f'(0)=f'(k)=0$이므로 $t=0$ 또는 $t=k$인 실근의 개수가 5이다.

즉, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=k$인 실근의 개수가 5인데, 함수 $f(x)$가 양수인 극댓값과 음수인 극솟값을 가지므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $k$는 함수 $f(x)$의 극값이고, $k>0$이므로 $k=2$이어야 한다. 따라서 $f'(x)=ax(x-2)$이고, 조건 (나)에 의하여 $f'(1)=-9$이고, $a=9$이다.

$f'(x)=9x(x-2)=9x^2-18x$이고 $f(x)=3x^3-9x^2+C$
$f(0)=2$이므로 $C=2$이고 $f(x)=3x^3-9x^2+2$이며, 극솟값은 $f(2)=-10=m$이다. 따라서 $m^2=(-10)^2=100$이다.

답) 100

14. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0-} g(x)$이고, $f(1)\{f(0)\}^2 = 0$이다.

(i) $f(1)=0$일 때

$f(x) = m(x-1)$이고,

$\int_0^x f(t)dt = \left[\frac{m}{2}x^2 - mx\right]_0^x = \frac{m}{2}x^2 - mx = \frac{m}{2}x(x-2)$이다.

따라서 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} m^3x(x-1)^2 & (x<0) \\ \frac{m^2}{2}x(x-2)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. $m^2 > 0$이므로 $x \ge 0$에서 항상 $g(x) \ge 0$이고 방정식

$g(x) = -\frac{2}{3}$의 모든 실근은 음수이다.

$m^3x(x-1)^2 = g_1(x)$라 두면

$g_1{}'(x) = m^3(x-1)^2 + m^3 2x(x-1) = m^3(x-1)(3x-1)$

$x \le 0$인 모든 실수 $x$에 대하여

$m>0$이면 $g_1{}'(x) \ge 0$, $m<0$이면 $g_1{}'(x) \le 0$,

즉, 함수 $g_1(x)$는 $x \le 0$에서 증가하거나 감소하며, 방정식

$g_1(x) = -\frac{2}{3}$은 많아봐야 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x) = -\frac{2}{3}$은 많아봐야 하나의 실근을 갖고,

조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(0)=0$일 때

$f(x) = mx$이고, $\int_0^x f(t)dt = \left[\frac{m}{2}x^2\right]_0^x = \frac{m}{2}x^2$이다.

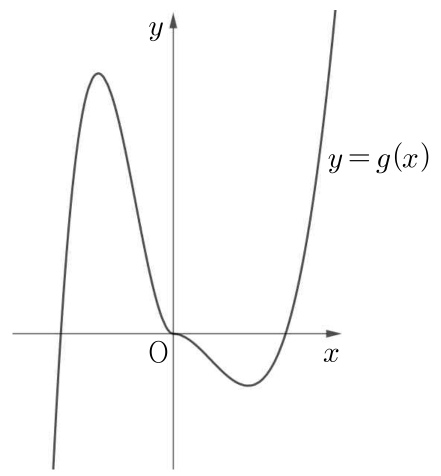
따라서 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} m^3x^2(x+1) & (x<0) \\ \frac{m^2}{2}x^2(x-1) & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다.

① $m>0$일 때

함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




방정식 $g(x) = -\frac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수

$g(x)$의 극솟값이 $-\frac{2}{3}$보다 작아야 한다.

$g_2(x) = \frac{m^2}{2}x^2(x-1)$라 두면,

$g_2{}'(x) = \frac{m^2}{2}x^2 + m^2x(x-1) = \frac{m^2}{4}x(3x-2)$

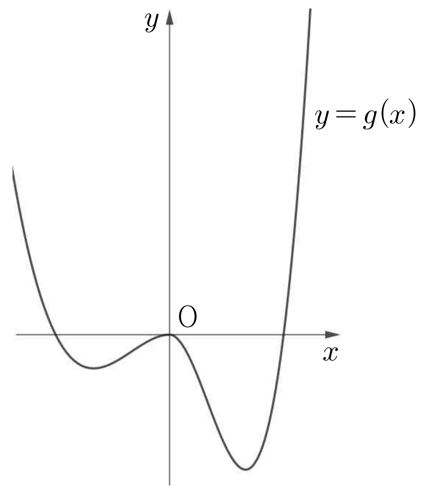
$g_2{}'(x) = 0$에서 $x=0$ 또는 $x = \frac{2}{3}$이고 함수 $g_2(x)$는 $x = \frac{2}{3}$에서

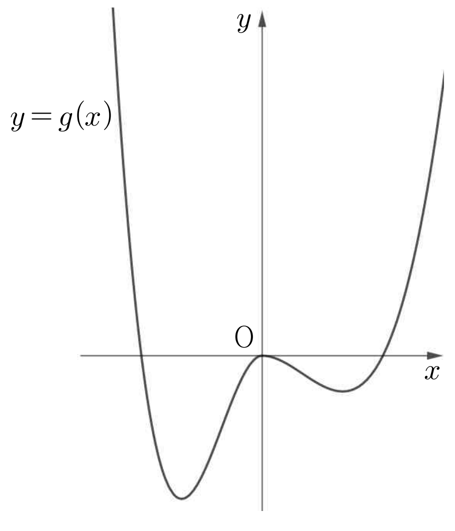
극솟값 $g_2\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{27}m^2$을 갖고, 극솟값이 $-\frac{2}{3}$보다 작아야

하므로 $-\frac{2}{27}m^2 < -\frac{2}{3}$, $3<m$이다.

② $m<0$일 때

함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.



$g_3(x)=m^3x^2(x+1)$이라 두면, $g_3{}'(x)=m^3x(3x+2)$

$g_3{}'(x)=m^3x(3x+2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}$이고,

$x=-\dfrac{2}{3}$에서 극소이며, 극솟값 $g_3\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}m^3$을 갖는다.

방정식 $g(x)=-\dfrac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면,

함수 $g(x)$의 극솟값이 $-\dfrac{2}{3}$이어야 하므로 $\dfrac{4}{27}m^3=-\dfrac{2}{3}$이거나

$-\dfrac{2}{27}m^2=-\dfrac{2}{3}$이어야 한다.

$\dfrac{4}{27}m^3=-\dfrac{2}{3}$이면, $m=-\dfrac{6^{\frac{2}{3}}}{2}$이고 $-\dfrac{2}{27}m^2=-\dfrac{6^{\frac{1}{3}}}{9}$

$-\dfrac{2}{3}<-\dfrac{6^{\frac{1}{3}}}{9}$이므로 방정식 $g(x)=-\dfrac{2}{3}$의 서로 다른 실근의

개수는 1이다. 따라서 조건을 만족시키지 않는다.

$-\dfrac{2}{27}m^2=-\dfrac{2}{3}$에서 $m=-3$이고, $\dfrac{4}{27}m^3=-4$이다.

$-4<-\dfrac{2}{3}$이므로 방정식 $g(x)=-\dfrac{2}{3}$의 서로 다른 실근의

개수는 3이다. 따라서 $m=-3$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=mx$이고, $m=-3$ 또는 $3<m$이다.

$f(2)=2m$에서 $m=-3$일 때 최솟값 $-6$을 갖는다.
따라서 $k=-6$이고, $k^2=36$이다.

답) 36

15. $(t-a)^2+x^2=0$에서 $t=a$일 때 $x=0$이다.
즉, 함수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(0,\ a)$가 직선 $y=t$와 만나는 모든 점의 개수와 같다.

모든 실수 $t$에 대하여 $g(t)\geq 1$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 $g(4)>1$이어야 한다.

만약 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 무조건 한 점에서 만난다. 따라서 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $a=0$이어야 하고, $g(-3)=g(4)=1$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

즉, 함수 $f(x)$는 극값을 가지고, 조건 (가)에 의하여 두 가지의 경우를 생각할 수 있다.

(i) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같은 경우

조건 (가)를 만족시키기 위해서는 점 $(0,\ a)$에서

① $f(0)=a$
② $a=0$
③ $a$는 함수 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값

이 세 가지 경우 중에서 하나를 만족시켜야 한다.

만약 함수 $f(x)$의 극솟값이 $-3$보다 크거나 같으면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 3보다 작다. 즉, ①, ②, ③의 모든 경우에서 $g(4)=1$이고, 조건을 만족시키지 않는다.

만약 함수 $f(x)$의 극솟값이 $-3$보다 작으면 ①, ②, ③의 모든 경우에서 $g(-3)=3$이다. 즉, $g(4)=4$이어야 한다.
① 또는 ② 또는 ③을 만족시키면서 $g(4)=4$를 만족시킬 수는 없다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극댓값이 0인 경우

함수 $f(x)$의 극솟값을 $m$이라 하자.
함수 $g(t)$가 무조건 $t=m$에서 불연속이므로, 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $g(t)$는 $t=-m$에서도 불연속이어야 한다.
양수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 무조건 한 점에서 만나므로 함수 $g(t)$가 $t=-m$에서도 불연속이려면 $a=-m$이어야 한다.

$g(4)>1$이므로 $g(4)=2$이어야 하고, $a=4=-m$, $m=-4$이다.

극솟값이 $-4$이므로 $g(-3)=3$이고, $g(-3)<g(4)$를 만족시킬 수 없다.

(iii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 0인 경우

함수 $f(x)$의 극댓값을 $M$이라 하자.

함수 $g(t)$가 무조건 $t=M$에서 불연속이므로, 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $g(t)$는 $t=-M$에서도 불연속이어야 한다. 음수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 무조건 한 점에서 만나므로 함수 $g(t)$가 $t=-M$에서도 불연속이려면 $a=-M$이어야 한다.

$g(4)>1$이므로 $M\geq 4$이어야 한다. $-M\leq -4$이므로 $g(-3)=1$이다. 즉, $M\geq 4$이면 $g(-3)<g(4)$를 만족시킨다.

(i) ,(ii) ,(iii)에 의하여

함수 $f(x)$의 극솟값은 0이고, 극댓값은 4 이상이다.
$f'(0)=0$이므로,

(1) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극소인 경우

$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^2(x-k)$라 둘 수 있다.
$f'(x)=x(3x-2k)$에서 $x=\frac{2}{3}k$에서 극대이고,
$f\left(\frac{2}{3}k\right)=-\frac{4}{27}k^3\geq 4$에서 $k\leq -3$,
$f(1)=1-k$에서 $k=-3$일 때 최솟값 4를 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대인 경우

$f(x)=(x-m)^2(x-n)$에서 $f'(x)=(x-m)(3x-2n-m)$
$x=0$에서 극대이므로 $f'(0)=0$이어야 하며, $m\neq 0$이므로
$-2n-m=0$, $m=-2n$이고, $f(x)=(x+2n)^2(x-n)$이다.
$f(0)=-4n^3\geq 4$에서 $n\leq -1$이고,
$f(1)=(1+2n)^2(1-n)$이다.

$h(n)=(1+2n)^2(1-n)$이라 두면 $h'(n)=3(1-2n)(1+2n)$이고, $n\leq -1$에서 $h'(n)<0$이므로 함수 $h(n)$은 $n\leq -1$에서 감소한다. 따라서 $f(1)$은 $n=-1$에서 최솟값 2를 갖는다.

(1), (2)에 의하여 $f(1)$의 최솟값은 2이다.

답) 2

16. ㄱ. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극댓값 0을 가지므로

$$g(1)=\frac{1}{2}\{f(1)\}^2=0$$

따라서 $f(1)=0$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $f(x)=(x-1)(x-\alpha)$이라 둘 수 있다.
$g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2-\int_1^x f(t)dt$에서

$$g'(x)=f(x)f'(x)-f(x)=f(x)\{f'(x)-1\}$$

이고, $f(x)=(x-1)(x-\alpha)$, $f'(x)=2x-\alpha-1$이므로

$$g'(x)=(x-1)(x-\alpha)(2x-\alpha-2)$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극대이므로
$\alpha<1<\frac{\alpha+2}{2}$이어야 한다.

$1<\frac{\alpha+2}{2}$에서 $0<\alpha$이므로 $\alpha<1<\frac{\alpha+2}{2}$를 만족시키기 위해서는 $0<\alpha<1$이어야 한다.
$f(2)=2-\alpha$에서 $0<\alpha<1$이므로 $1<f(2)<2$이다. (참)

ㄷ. 실수 $a(a<1)$에 대하여 $g'(a)=0$이므로 ㄴ에서 $a=\alpha$임을 알 수 있고, $f(a)=0$이다. 따라서

$$\begin{aligned} g(a)&=-\int_a^1 f(t)dt=-\int_a^1(t-1)(t-a)dt \\ &=-\int_a^1(t^2-(a+1)t+a)dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_a^1 \\ &=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}(a-1)^3 \end{aligned}$$

이고, ㄴ에서 $0<a<1$이므로 $-\frac{1}{6}<g(a)<0$이다. (참)

따라서 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

답) ㄱ,ㄴ,ㄷ

17. $f(x)=9(x-a)(x-1)^2$에서

$$f'(x)=9(x-1)^2+18(x-a)(x-1)=9(x-1)(3x-1-2a)$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{1+2a}{3}$이다.

따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}-a+\frac{2}{3} & (x=1)\\ -\frac{a}{3} & \left(x=\frac{1+2a}{3}\right)\\ 9(x-a)(x-1)^2 & (f'(x)\neq 0)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $a=0$이면 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\frac{2}{3} & (x=1)\\ 0 & \left(x=\frac{1}{3}\right)\\ 9x(x-1)^2 & (f'(x)\neq 0)\end{cases}$$

이고, $g\left(\frac{1}{3}\right)=0$이다 (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=k(k<1)$에서 불연속이고 $a<1$에서 $\frac{1+2a}{3}<1$이므로 $k=\frac{1+2a}{3}$이다.

$$f(k)=f\left(\frac{1+2a}{3}\right)=(3-3a)\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{4}{3}(a-1)^3$$

$$g(k)=g\left(\frac{1+2a}{3}\right)=-\frac{a}{3}$$

이고, $f(k)>g(k)$에서 $f(k)-g(k)=-\frac{4}{3}(a-1)^3+\frac{a}{3}>0$이 $a<1$에서 성립하는지를 보이면 충분하다.

$0<a<1$인 경우는 무조건 성립하므로 $a\le 0$인 경우만 보면 충분하다.

$-\frac{4}{3}(a-1)^3+\frac{a}{3}=h_1(a)$라 두면 $h_1'(a)=-4(a-1)^2+\frac{1}{3}$이고,

$h_1'(a)=-4(a-1)^2+\frac{1}{3}=0$이다. $0\le a$에서 $h_1'(a)<0$이므로

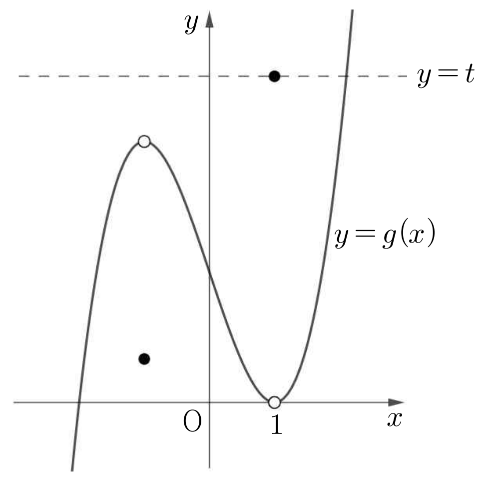
함수 $h_1(a)$는 $0\le a$에서 감소한다. 이때, $h_1(0)=\frac{4}{3}$이므로

$0\le a$에서 $h_1(a)>0$이다.

따라서 $a<1$에서 $h_1(a)>0$이고, $f(k)-g(k)>0$에서

$f(k)>g(k)$이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $f\left(\frac{2a+1}{3}\right)<g\left(\frac{2a+1}{3}\right)$이므로 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.




즉, 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 양수 $t$는 존재하지 않으려면, $a<1$인 모든 $a$에 대하여 $g(1)$의 값이 함수 $f(x)$의 극댓값인 $f\left(\frac{2a+1}{3}\right)$보다 작아야 한다.

$g(1)=-a+\frac{2}{3}$, $f\left(\frac{2a+1}{3}\right)=-\frac{4}{3}(a-1)^3$이고,

$-\frac{4}{3}(a-1)^3>-a+\frac{2}{3}$, 즉 $-\frac{4}{3}(a-1)^3+a-\frac{2}{3}>0$이어야 한다.

$h_2(a)=-\frac{4}{3}(a-1)^3+a-\frac{2}{3}$이라 두면

$h_2'(a)=-4(a-1)^2-1$이고, $h_2'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{2}$이다.

즉, $h_2(a)=-\frac{4}{3}(a-1)^3+a-\frac{2}{3}$는 $a=\frac{1}{2}$에서 최소이다. 그런데

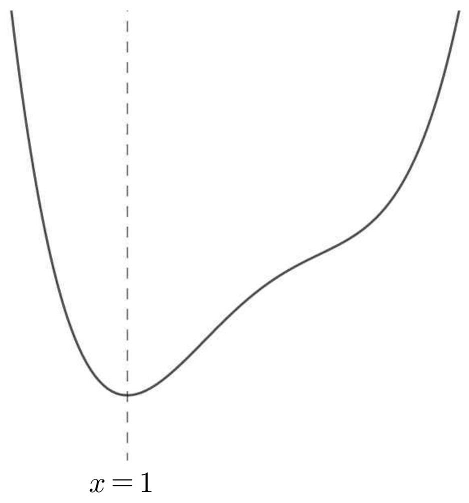
$h_2\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $-\frac{4}{3}(a-1)^3+a-\frac{2}{3}>0$를 만족시키지 않는다.

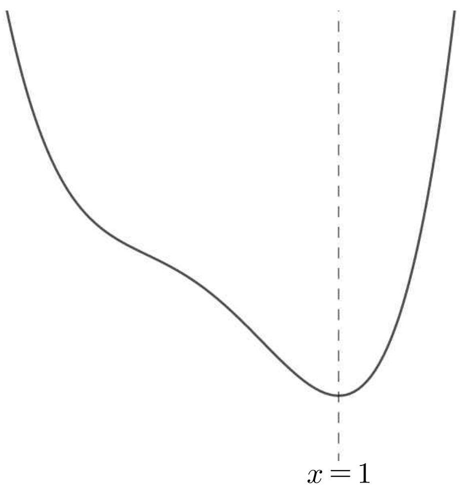
즉, $a=\frac{1}{2}$이면 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 양수 $t$는 존재한다. (거짓)

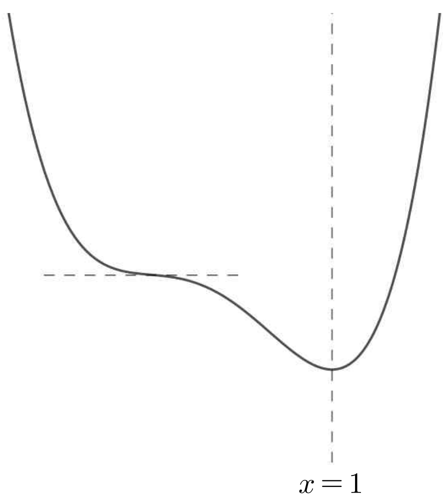
따라서 ㄱ,ㄴ이다.

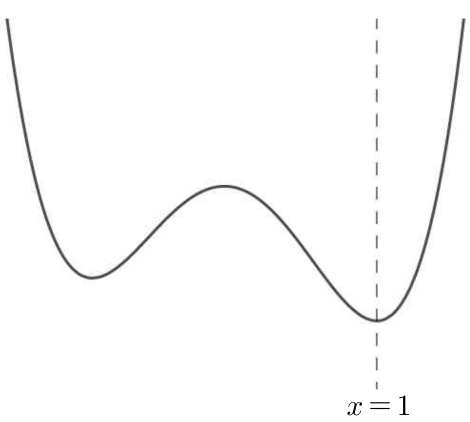
답) ㄱ,ㄴ

18. 방정식 $g(t)=0$의 실근이 1 뿐인 경우는 다음과 같다.

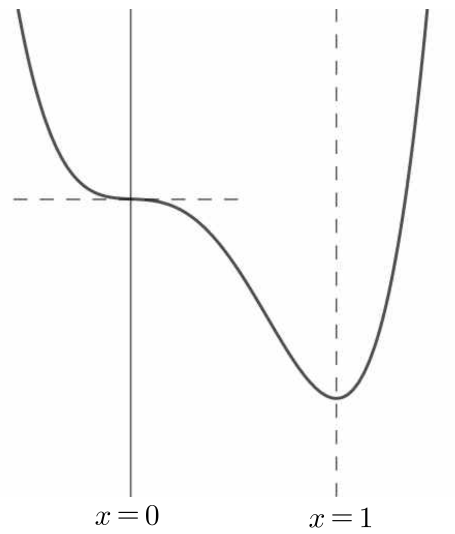


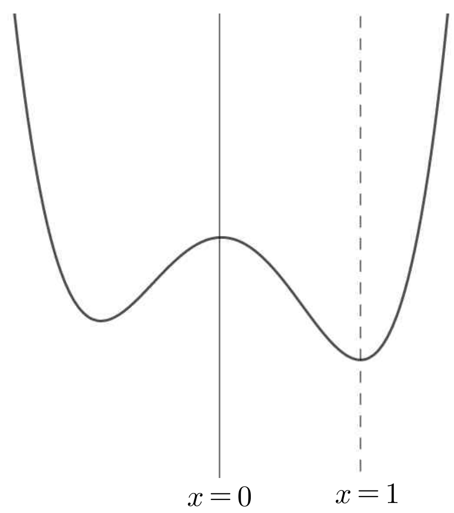



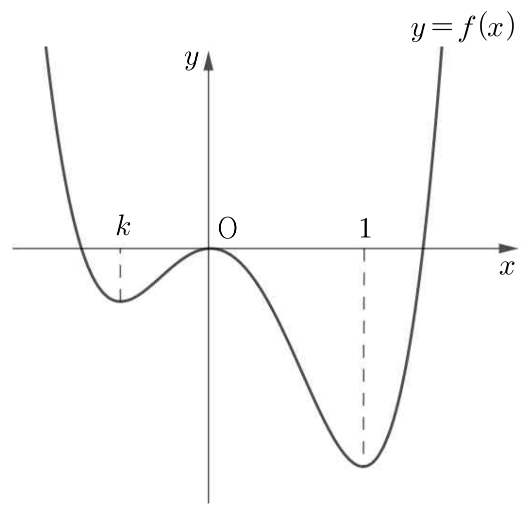




이때, $g(0)=1$이어야 하므로 다음의 경우만 가능하다.




이때, $g(k)=2$이고 $f(k)<0$인 음수 $k$가 존재하려면 두 번째 경우만 가능하다.




즉, $x=k$, $x=1$에서 극대이고, $x=0$에서 극소이며, $f(k)>f(1)$이다.

$f'(x)=4x(x-k)(x-1)$에서 $f(x)=x^4-\frac{4k}{3}x^3-\frac{4}{3}x^3+2kx^2$

$$f(1)=\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$$

$$f(k)=-\frac{1}{3}k^4+\frac{2}{3}k^3$$

이고 $f(k)>f(1)$이어야 하므로

$-\frac{1}{3}k^4+\frac{2}{3}k^3>\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$에서 $\frac{1}{3}k^4-\frac{2}{3}k^3+\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}<0$

즉, $k^4-2k^3+2k-1<0$인 $k$를 구하면 충분하다.

$k^4-2k^3+2k-1=(k-1)^3(k+1)<0$에서 $-1<k<0$이어야 한다.

$f(2)=-\frac{8}{3}k+\frac{16}{3}$에서 $-1<k<0$이므로 $\frac{16}{3}<f(2)<8$이다.

즉, $\alpha=\frac{16}{3}$, $\beta=8$이고, $36(\beta-\alpha)=36\times\frac{8}{3}=96$이다.

답) 96

19. 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에 의하여 실수 전체의 두 부분집합

$\{t\,|\,(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 $7\}$

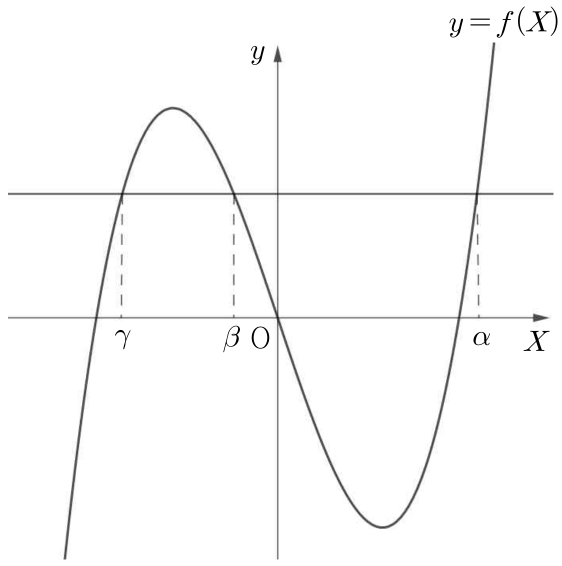
$\{t\,|\,k<t<1\}$

은 서로 같다.

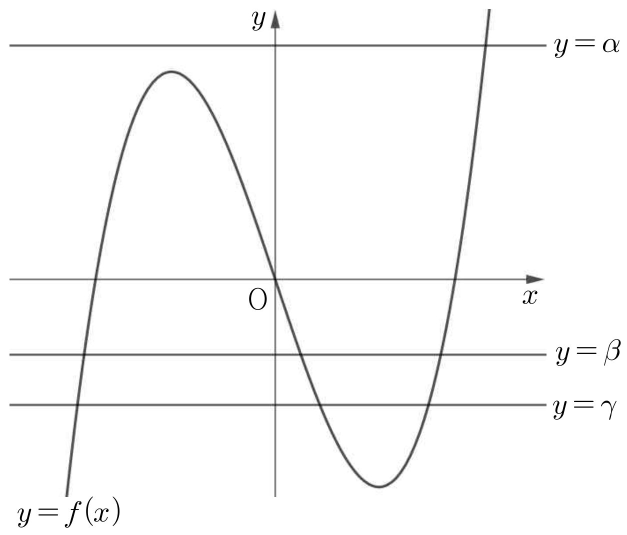
방정식 $(f\circ f)(x)=t$에서 $f(x)=X$라 두면 $f(X)=t$이다.
만약 방정식 $f(X)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이면 $f(X)=t$의 실근은 $X=\alpha$ 뿐이다. 즉, 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 실근의 개수는 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근의 개수와 같다.
즉, 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 최대 3개 갖는다.
같은 이유로 방정식 $f(X)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이면 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 최대 6개다.

방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 7이 되어야 하므로 방정식 $f(X)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 3이어야 한다. 즉, $k<t<1$인 모든 실수 $t$에 대하여 방정식 $f(X)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 3이어야 하므로, 1은 함수 $f(x)$의 극댓값보다 작거나 같고, $k$는 함수 $f(x)$의 극솟값보다 크거나 같다.

$k$가 양수라 하자.
방정식 $(f\circ f)(x)=t$에서 $f(x)=X$라 두면 $k<t<1$인 어떤 양수 $t$에 대하여 방정식 $f(X)=t$은 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$의 서로 다른 세 실근을 갖는다. 즉, 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 실근의 개수는 $f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ 또는 $f(x)=\gamma$를 만족시키는 모든 실수 $x$의 개수와 같고, 그 개수는 7이다.

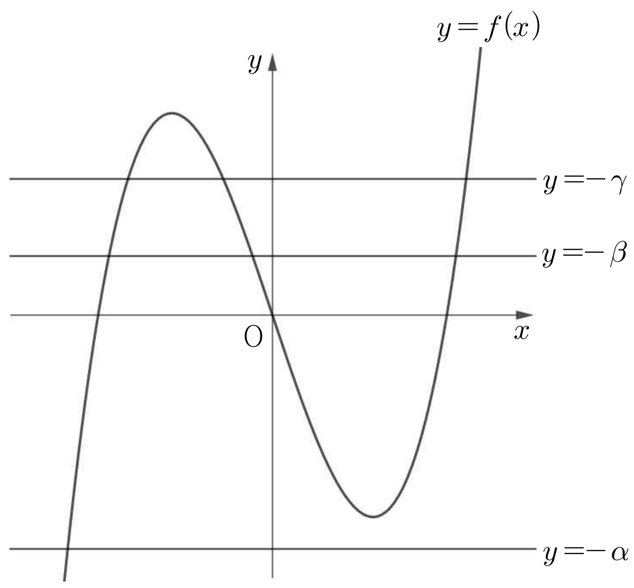



($|\beta|<|\gamma|<|\alpha|$이므로 $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수는 1이어야 한다.)




이때, 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로, 방정식 $f(X)=t$은 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$의 서로 다른 세 실근을 갖는다. 즉, 방정식 $(f\circ f)(x)=-t$의 실근의 개수는 $f(x)=-\alpha$ 또는 $f(x)=-\beta$ 또는 $f(x)=-\gamma$ 를 만족시키는 모든 실수 $x$의 개수와 같다.

위의 그림에서 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\alpha$보다 작고, 함수 $f(x)$의 극솟값이 $\gamma$보다 작으므로,
$-\alpha$는 함수 $f(x)$의 극솟값보다 작고, $-\gamma$는 함수 $f(x)$의 극댓값보다 작다.




그림과 같이 $f(x)=-\alpha$ 또는 $f(x)=-\beta$ 또는 $f(x)=-\gamma$ 를 만족시키는 모든 실수 $x$의 개수가 7이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=-t$의 서로 다른 실근의 개수가 7이다.

$k<t<1$인 모든 실수 $t$에 대해서만 $(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 7이어야 하는데, $(f\circ f)(x)=-t$의 서로 다른 실근의 개수도 7이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

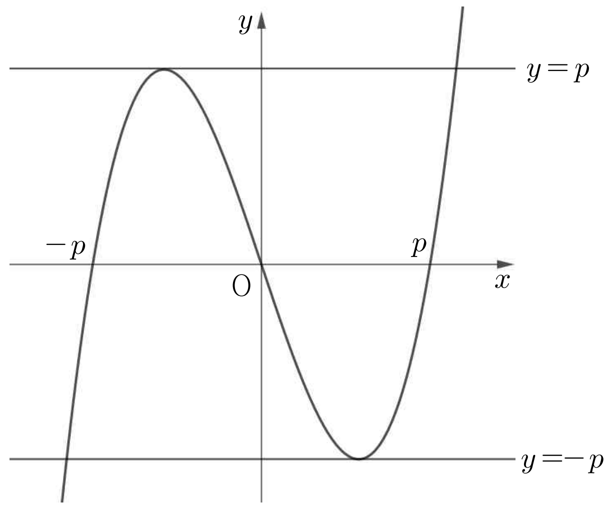
같은 이유로 $k=0$도 조건을 만족시키지 않고, $k<0$이다.

$k<0$이므로 $(f\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수도 7이다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 1보다 클 때,

$(f\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 7이다. $f(x)=0$의 모든 실근이 $-p$, $0$, $p\,(p>0)$이므로 $f(x)=-p$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=p$를 만족시키는 모든 실수 $x$의 개수가 7이다.

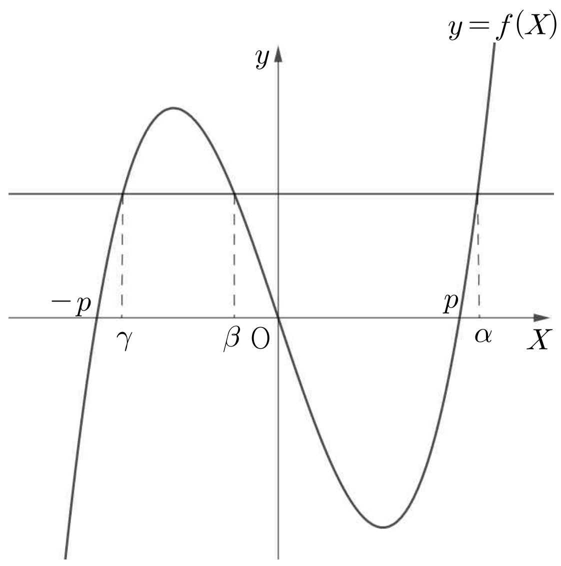
$f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 무조건 3이므로 방정식 $f(x)=p$의 서로 다른 실근의 개수는 2이어야 한다.



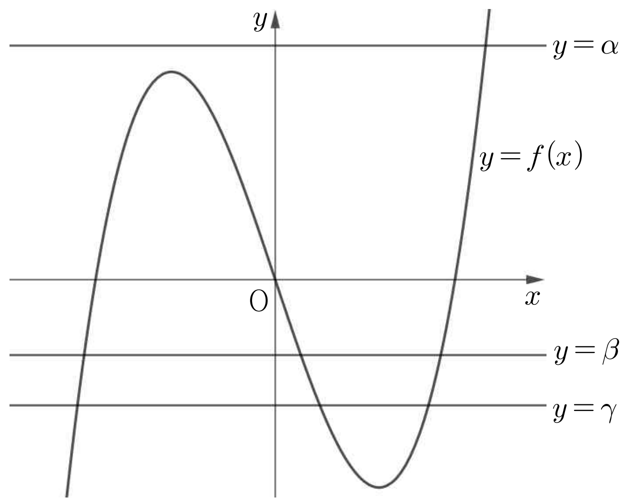

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값이 $p$이고, $p>1$이다.

조건 (나)를 만족키기 위해서는 $1<t<p$인 모든 실수 $t$에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 실근의 개수가 7이 될 수 없다.

방정식 $(f\circ f)(x)=t$에서 $f(x)=X$라 두면 $1<t<p$인 양수 $t$에 대하여 방정식 $f(X)=t$은 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$의 서로 다른 세 실근을 갖는다. 즉, 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 실근의 개수는 $f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ 또는 $f(x)=\gamma$를 만족시키는 모든 실수 $x$의 개수와 같다.




위의 그림에서 $-p<\gamma<\beta<0<p<\alpha$이고 함수 $f(x)$의 극댓값이 $p$이므로




그림과 같이 $f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ 또는 $f(x)=\gamma$를 만족시키는 모든 실수 $x$의 개수가 7이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 7이다.

즉, $1<t<p$인 모든 실수 $t$에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 실근의 개수가 7이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 1이고, 방정식 $(f\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 7이므로 (i)과 같은 방법으로 $f(-1)=f(0)=f(1)=0$임을 알 수 있다.

$f(x)=q(x-1)x(x+1)=qx^3-qx$라 두면, $f'(x)=q(3x^2-1)$

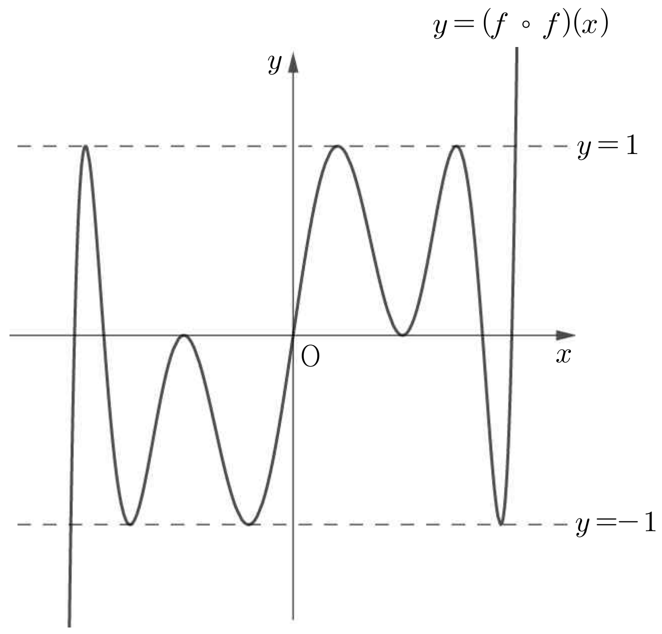
$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$이므로 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1$이어야 한다.

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}q=1$에서 $q=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이고,

$f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(x^3-x)$이다. 따라서 $f(3\sqrt{3})=351$이다.

답) 351

참고) $k=-1$이고, 함수 $(f\circ f)(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

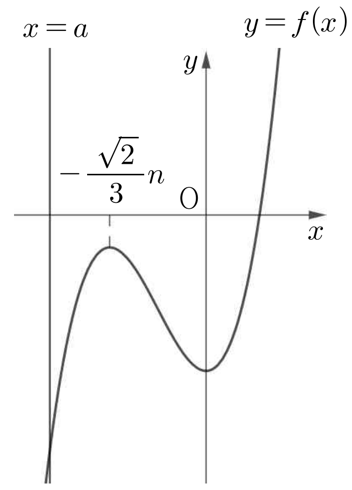


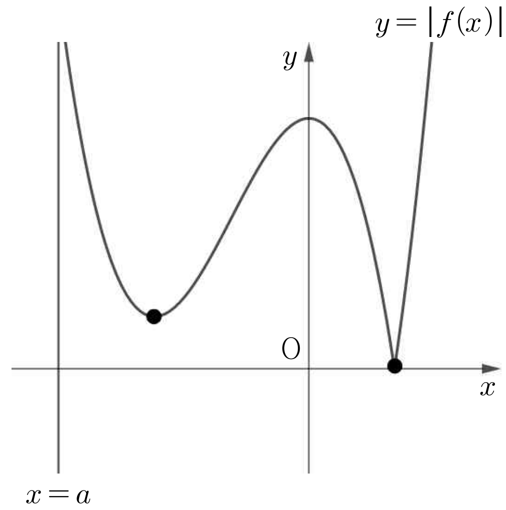

20. $f(x)=x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}nx^2+a$라 두면 $f'(x)=3x^2+\sqrt{2}nx$이고,

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{\sqrt{2}}{3}n$이다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\sqrt{2}}{3}n$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.

함수 $f(x)$가 $x\ge 0$에서 증가하므로 함수 $|f(x)|$가 $x=t$에서 극소이고 $a\le t$인 실수 $t$의 개수는 최대 1개다. 따라서 $a$는 음수이다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 0보다 작고 $a<-\frac{\sqrt{2}}{3}n$이면 두 함수 $f(x)$ ,$|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



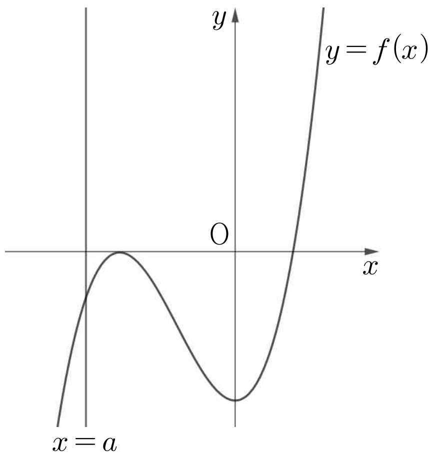

그림과 같이 극소인 점이 2개다.

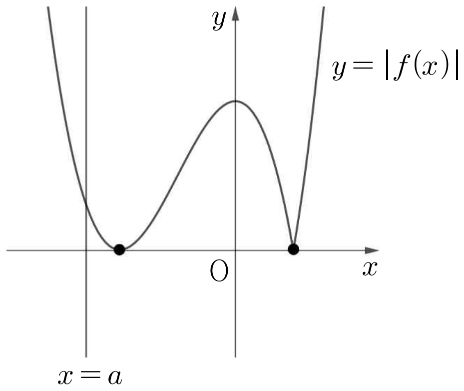
즉, 함수 $f(x)$의 극댓값이 0보다 작고 $a<-\frac{\sqrt{2}}{3}n$이면 극소인 점의 개수는 항상 2개다. ……①

따라서 $a=-\frac{\sqrt{2}}{3}n$일 때를 기준으로 조건을 나누자.

(i) $a=-\frac{\sqrt{2}}{3}n$일 때 $f(a)>0$인 경우

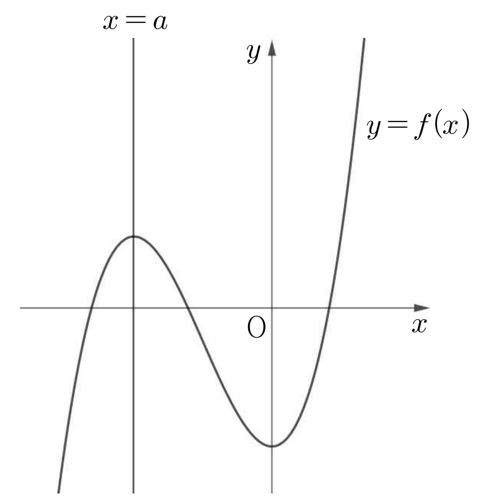
그림과 같이 $f(x)$의 극댓값이 0이 되도록 하는 $a\left(a<-\frac{\sqrt{2}}{3}n\right)$가 존재한다.

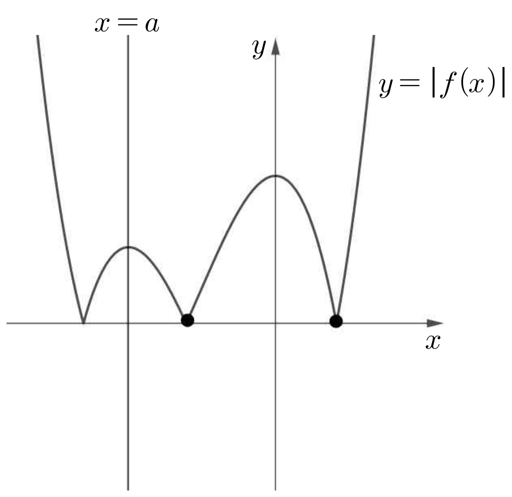



이때의 $a$를 $a_0$이라 하면, $|f(x)|$의 극소점이 2개이므로 $a_0 \in \{a|a \le p\}$이고, ①에 의하여 $a \le a_0$인 모든 $a$에 대하여 $a \in \{a|a \le p\}$이다.

또, $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}n$일 때 $f(a)>0$이므로 이때의 $f(x)$ ,$|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

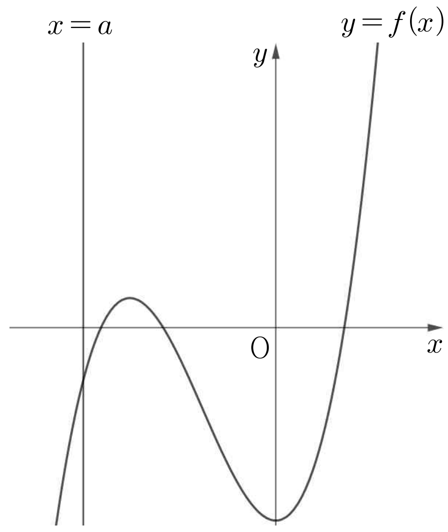


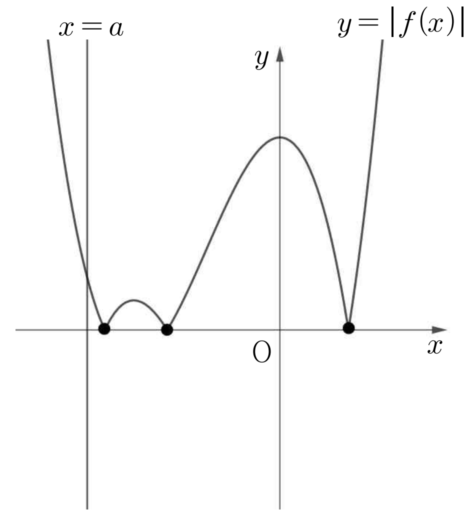




$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}n$일 때 $|f(x)|$의 극소점이 2개이므로 $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}n \in \{a|a \le p\}$이다.

조건을 만족시킬 $p$가 존재하려면 $a_0 < a < -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$인 모든 $a$에 대하여 $a \in \{a|a \le p\}$ 이어야 한다.

그러나 $a_0$보다 조금만 더 큰 어떤 $a$에 대하여 두 함수 $f(x)$ ,$|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




그림과 같이 $|f(x)|$의 극소점이 3개이므로 $a_0 < a < -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$인 모든 $a$에 대하여 $a \in \{a|a \le p\}$일 수 없다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}n$일 때 $f(a)=0$인 경우

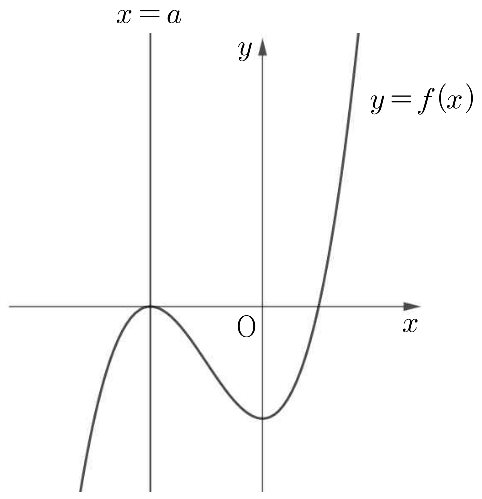
$f(a)=a^3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}na^2+a=0$에서 $a^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}na+1=0$이고,

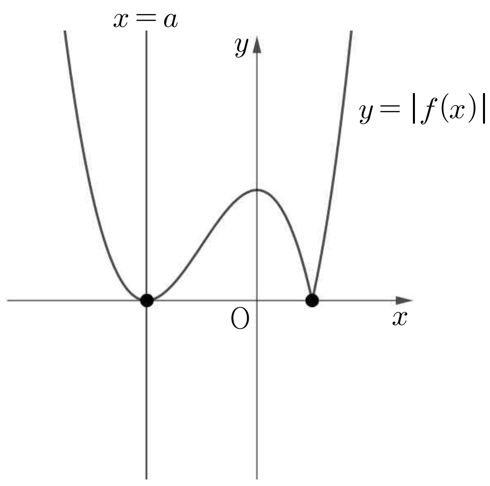
$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}n$이므로

$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}n\right)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}n\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}n\right)+1=-\dfrac{1}{9}n+1=0,\ n=3$

따라서 $a=-\sqrt{2}$일 때 $f(a)=0$이다.

$a=-\sqrt{2}$일 때 두 함수 $f(x)$ ,$|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

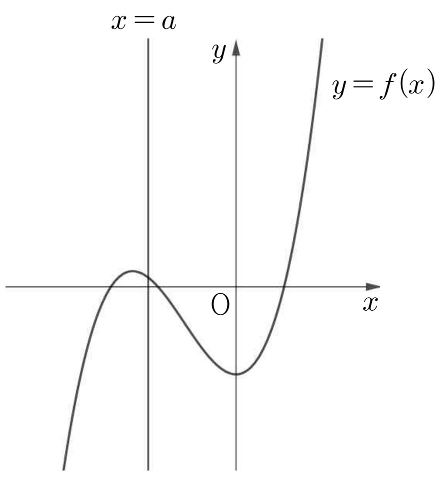


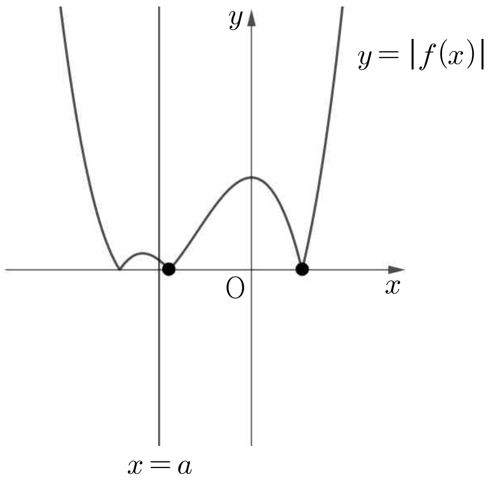




$a=-\sqrt{2}$일 때 $|f(x)|$의 극소점이 2개이므로
$-\sqrt{2}\in\{a|a\le p\}$이고, ①에 의하여 $a\le-\sqrt{2}$인 모든 $a$에 대하여 $a\in\{a|a\le p\}$이다.

즉, $-\sqrt{2}<a<0$인 경우만 더 알아보면 충분하다.

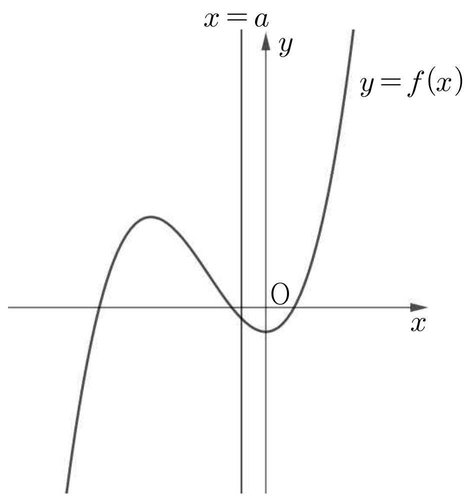
$f(a)\ge 0$이면

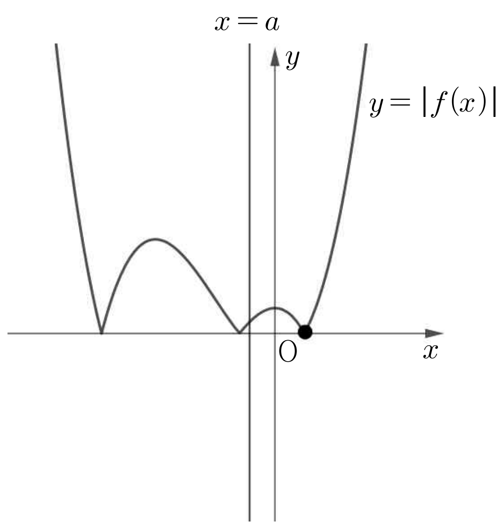



그림과 같이 $|f(x)|$의 극소점이 2개다.

$f(a)<0$이면




그림과 같이 그림과 같이 $|f(x)|$의 극소점이 1개다.

즉, $f(a)\ge 0$인 $a$의 범위를 알아야 한다.

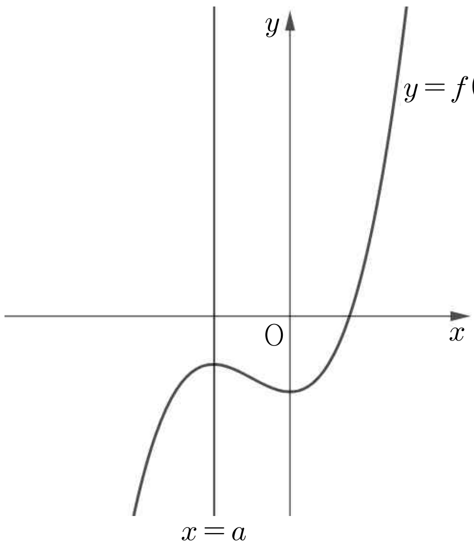
$f(a)=a^3+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^2+a$, $a=-\sqrt{2}$일 때 $f(a)=0$이므로 이를 이용해서 인수분해 하면 $f(a)=a(a+\sqrt{2})\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

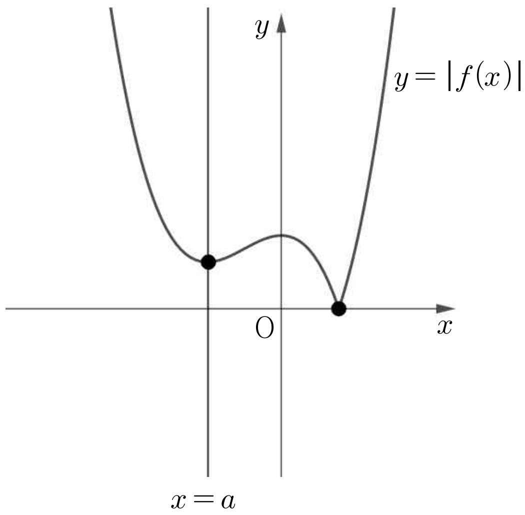
$a(a+\sqrt{2})\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\ge 0$에서 $-\sqrt{2}\le a\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

즉 $a \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$까지는 극소인 점의 개수가 2이고, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a$이면 극소인 점의 개수가 2가 아니다. 따라서 실수 $a$의 집합은 $\left\{a \middle| a \le -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$이고, $p = -\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(iii) $a = -\frac{\sqrt{2}}{3}n$일 때 $f(a) < 0$인 경우

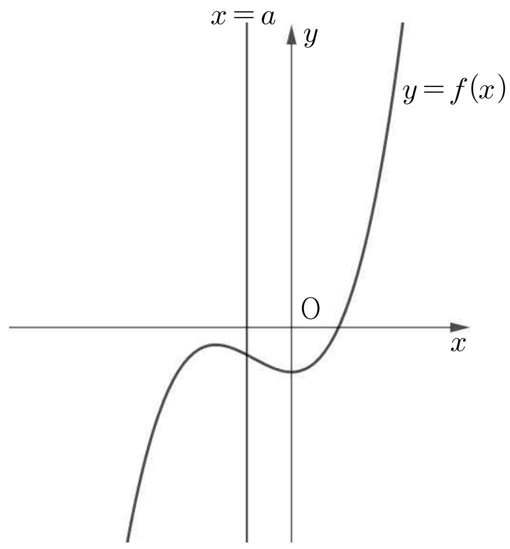
$a = -\frac{\sqrt{2}}{3}n$일 때 두 함수 $f(x)$ ,$|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

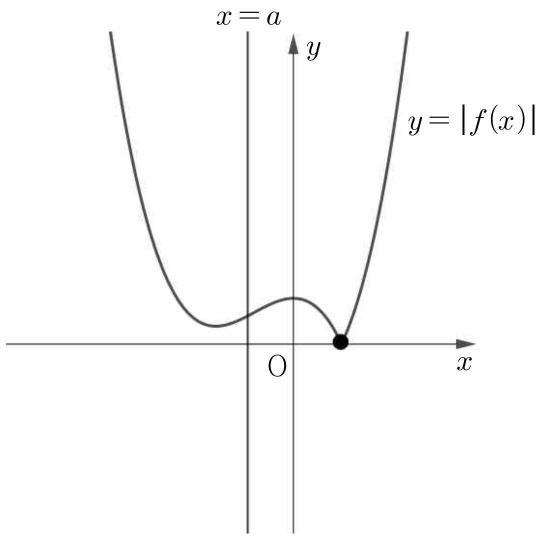



$a = -\frac{\sqrt{2}}{3}n$일 때 $|f(x)|$의 극소점이 2개이므로 $-\frac{\sqrt{2}}{3}n \in \{a | a \le p\}$이고, ①에 의하여 $a \le -\frac{\sqrt{2}}{3}$인 모든 $a$에 대하여 $a \in \{a | a \le p\}$이다.

$a$가 $-\frac{\sqrt{2}}{3}n$보다 조금 작을 때의 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




그림과 같이 $|f(x)|$의 극소점이 1개다. 따라서 실수 $p$가 존재하지 않기 위해서는 $-\frac{\sqrt{2}}{3}n < a < 0$일 때 $|f(x)|$의 극소점의 개수가 2가 아니어야 한다. 따라서 $-\frac{\sqrt{2}}{3}n < a < 0$에서 $f(a) < 0$이어야 한다.

$f(a) = a^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}na^2 + a < 0$에서 $a^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}na + 1 > 0$이다.

$a^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}na + 1 = \left(a + \frac{\sqrt{2}}{4}n\right)^2 + 1 - \frac{n^2}{8}$이므로 $1 - \frac{n^2}{8} > 0$이면 충분하다. $n^2 < 8$에서 $n$이 자연수이므로 $n = 1$ 또는 $n = 2$이다.

$a \le -\frac{\sqrt{2}}{3}n$까지는 극소인 점의 개수가 2이고, $-\frac{\sqrt{2}}{3}n < a$이면 극소인 점의 개수가 2가 아니다. 따라서 실수 $a$의 집합은 $\left\{a \middle| a \le -\frac{\sqrt{2}}{3}n\right\}$이고, $p = -\frac{\sqrt{2}}{3}n$이다.

$n = 1$이면 $p = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $n = 2$이면 $p = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $p=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $p=-\frac{\sqrt{2}}{3}$, $p=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고, 모든 $p$의 합은 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$이다. 따라서 $S=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$이고,

$6S^2=27$이다.

답) 27