수능완성

수학영역 | **수학 Ⅰ·수학 Ⅱ·기하**

정답과 풀이

EBS 수능완성 수학영역

한눈에 보는 정답

01 지수함수와 로그함수

정답 본문 8~17쪽

01 ③	02 ②	03 81	04 ③	05 ①
06 22	07 ③	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 36	12 ③	13 8	14 ②	15 6
16 8	17 ③	18 9	19 ④	20 ④
21 9	22 16	23 3	24 ④	25 7
26 2	27 22	28 ①	29 ②	30 ③

02 삼각함수

정답 본문 20~29쪽

01 50	02 ③	03 ⑤	04 24	05 ④
06 ②	07 ①	08 ③	09 ④	10 7
11 8	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ③	17 ②	18 ③	19 5	20 ④
21 ⑤	22 ③	23 ③	24 33	25 7
26 ②	27 ②	28 ③	29 ④	30 49
31 ②	32 ③			

03 수열

정답 본문 32~43쪽

01 ④	02 ②	03 ④	04 ②	05 ③
06 ②	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ④	19 340	20 ③
21 ②	22 ④	23 ②	24 ③	25 ①
26 ②	27 ①	28 ②	29 ④	30 ③
31 ③	32 ②	33 77	34 50	

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 46~57쪽

01 ②	02 ③	03 ③	04 ③	05 ①
06 ①	07 ②	08 40	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 10	14 7	15 ⑤
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 18	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 ④	25 ④
26 ⑤	27 13	28 ①	29 ①	30 ③
31 ③	32 ②	33 ②	34 ④	35 ②
36 16	37 ③	38 ⑤		

05 다항함수의 미분법

정답 본문 61~73쪽

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ③	07 ③	08 11	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ③	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ③	20 ④
21 ②	22 ④	23 ③	24 ④	25 ⑤
26 ⑤	27 689	28 121	29 ③	30 ①
31 ②	32 2	33 ④	34 ③	35 ⑤
36 ②	37 ⑤	38 ③	39 ①	40 ⑤
41 6				

06 다항함수의 적분법

정답 본문 76~85쪽

01 ②	02 ③	03 ②	04 ④	05 95
06 32	07 108	08 ③	09 ③	10 ①
11 ①	12 ④	13 ③	14 ②	15 ①
16 ④	17 ④	18 ④	19 ④	20 ②
21 ⑤	22 ③	23 ④	24 6	25 37
26 5	27 ②	28 426	29 ②	30 ③
31 127				

07 이차곡선

정답 본문 89~98쪽

01 ③	02 ②	03 ④	04 ①	05 ⑤
06 ③	07 ①	08 76	09 ①	10 38
11 ④	12 ③	13 ④	14 ③	15 18
16 ④	17 ②	18 ②	19 ③	20 64
21 ②	22 ⑤	23 ②	24 ⑤	25 ②
26 ②	27 ⑤	28 ②	29 ④	30 ①

08 평면벡터

정답 본문 102~111쪽

01 ④	02 ④	03 12	04 ⑤	05 ⑤
06 ②	07 ②	08 ④	09 ①	10 ②
11 ②	12 ④	13 ①	14 ②	15 48
16 ④	17 ②	18 ③	19 ③	20 ②
21 ⑤	22 ⑤	23 12	24 ②	25 ⑤
26 45	27 ④			

09 공간도형과 공간좌표

정답 본문 116~128쪽

01 ④	02 10	03 ④	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 63	08 ②	09 ②	10 ④
11 ④	12 ⑤	13 25	14 135	15 ⑤
16 ⑤	17 ②	18 ①	19 7	20 12
21 18	22 ①	23 ②	24 ④	25 ①
26 ③	27 ⑤	28 6	29 41	30 ②
31 ②	32 ③	33 ②	34 28	

EBS 수능완성 수학영역

한눈에 보는 정답

실전편

실전 모의고사 1회
본문 130~137쪽

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ③	08 ③	09 ②	10 ②
11 ②	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 8	17 29	18 4	19 14	20 9
21 383	22 31	23 ①	24 ④	25 ②
26 ②	27 ③	28 ①	29 320	30 17

실전 모의고사 2회
본문 138~145쪽

01 ④	02 ④	03 ②	04 ③	05 ③
06 ①	07 ①	08 ②	09 ②	10 ③
11 ②	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ⑤
16 60	17 10	18 80	19 8	20 35
21 330	22 32	23 ④	24 ①	25 ①
26 ②	27 ④	28 ①	29 18	30 12

실전 모의고사 3회
본문 146~153쪽

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ①	07 ②	08 ③	09 ③	10 ②
11 ②	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 11	17 7	18 9	19 12	20 68
21 11	22 550	23 ②	24 ③	25 ④
26 ⑤	27 ⑤	28 ②	29 8	30 30

실전 모의고사 4회
본문 154~161쪽

01 ④	02 ③	03 ②	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ②	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 10	17 7	18 33	19 7	20 612
21 25	22 120	23 ①	24 ④	25 ③
26 ⑤	27 ⑤	28 ④	29 16	30 180

실전 모의고사 5회
본문 162~168쪽

01 ②	02 ①	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 ③	15 ③
16 55	17 32	18 12	19 30	20 424
21 12	22 150	23 ②	24 ④	25 ④
26 ③	27 ②	28 ②	29 12	30 43

01 지수함수와 로그함수

정답

본문 8~17쪽

01 ③	02 ②	03 81	04 ③	05 ①
06 22	07 ③	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 36	12 ③	13 8	14 ②	15 6
16 8	17 ③	18 9	19 ④	20 ④
21 9	22 16	23 3	24 ④	25 7
26 2	27 22	28 ①	29 ②	30 ③

01

$(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2=\sqrt[3]{(\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[6]{4}=\sqrt[3\times2]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2})^3}=\sqrt[3]{2}$

따라서 $\dfrac{(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2+\sqrt[6]{4}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=3$

답 ③

02

a의 세제곱근 중 실수를 x라 하면 x는 8의 여섯제곱근 중 음의 실수이므로

$x=-\sqrt[6]{8}=-\sqrt[2\times3]{2^3}=-\sqrt{2}$

따라서 $a=x^3=(-\sqrt{2})^3=-2\sqrt{2}$ …… ㉠

또한 b의 제곱근 중 양의 실수를 y라 하면 y는 $\sqrt[4]{8}$의 세제곱근이므로

$y=\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[4]{2}$

따라서 $b=y^2=(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$ …… ㉡

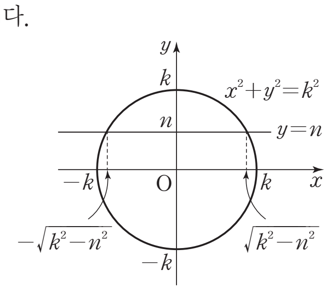
㉠, ㉡에서

$a+b=-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

답 ②

03

원 $x^2+y^2=k^2$ $(k>2)$ 위의 점 중 y좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합이 A이므로 $(a, n)\in A$이면 $x^2=k^2-y^2$에서 $a^2=k^2-n^2$, 즉 $a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이다.



(ⅰ) n이 $2\le n<k$인 짝수일 때

$a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이므로

$\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$, $-\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$

$-\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 없다.

따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$의 1개이다.

(ⅱ) n이 $3\le n<k$인 홀수일 때

$a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이므로

$\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$

$-\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{-\sqrt{k^2-n^2}}$

따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$의 1개이다.

(ⅲ) $n=k$일 때

$a=0$이므로 0의 n제곱근은 0뿐이다.

따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $2\le n<k$인 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 양의 실수는 하나씩 생기고 모두 서로 다르다.

따라서 집합 B의 원소의 개수가 7이므로

$8<k\le9$일 때 $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$에서 집합 B의 원소의 개수가 하나씩 생기므로 k^2의 최댓값은 $9^2=81$이다.

답 81

참고

(1) $A=\{(a, n)\,|\,a^2+n^2=k^2$, n은 1보다 크고 k보다 작거나 같은 자연수$\}$

(2) $2\le n_1<n_2<k$ (n_1, n_2는 자연수)일 때

$a_1=\sqrt{k^2-n_1^{\,2}}$, $a_2=\sqrt{k^2-n_2^{\,2}}$이면 $0<a_2<a_1$이고 $\sqrt[n_2]{a_2}<\sqrt[n_1]{a_1}$이다.

즉, $\sqrt[n_2]{a_2}\ne\sqrt[n_1]{a_1}$이다.

04

$27^{-1}\div\left(\dfrac{1}{9}\times\sqrt[3]{81}\right)^{\frac{9}{2}}=(3^3)^{-1}\div\left(3^{-2}\times3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$

$=3^{-3}\div\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$

$=3^{-3}\div3^{-3}=3^{-3-(-3)}$

$=3^0=1$

답 ③

05

$2^{a+\frac{b}{2}}=\dfrac{1}{3}$, $2^{a-\frac{b}{2}}=27$에서 변끼리 곱하면

$2^{a+\frac{b}{2}}\times2^{a-\frac{b}{2}}=\dfrac{1}{3}\times27$

$2^{\left(a+\frac{b}{2}\right)+\left(a-\frac{b}{2}\right)}=9$, $2^{2a}=3^2$

$2^a=(2^{2a})^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}=3$

또한 $2^{a+\frac{b}{2}}=\dfrac{1}{3}$에서 $2^{\frac{b}{2}}=\dfrac{1}{2^a}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

$2^b=\left(2^{\frac{b}{2}}\right)^2=\left(\dfrac{1}{9}\right)^2=3^{-4}$

따라서

$\sqrt{2^{3a}}\times\sqrt[3]{2^b}=(2^a)^{\frac{3}{2}}\times(2^b)^{\frac{1}{3}}$

$=3^{\frac{3}{2}}\times3^{-\frac{4}{3}}$

$=3^{\frac{3}{2}+\left(-\frac{4}{3}\right)}=3^{\frac{1}{6}}$

답 ①

06

$9^x-3^{x+\frac{10}{n}}=-1$

$(3^x)^2-3^{x+\frac{10}{n}}=-1$의 양변을 3^x으로 나누면

$3^x-3^{\frac{10}{n}}=-3^{-x}$이므로 $3^x+3^{-x}=3^{\frac{10}{n}}$

$9^x+9^{-x}-2=(3^x+3^{-x})^2-4=\left(3^{\frac{10}{n}}\right)^2-4=3^{\frac{20}{n}}-4$

$3^{\frac{20}{n}}-4$의 값이 자연수가 되려면 $3^{\frac{20}{n}}$의 값이 4보다 큰 자연수가 되어야 한다.

$3^{\frac{20}{n}}$의 값이 자연수가 되려면 $\frac{20}{n}$이 음이 아닌 정수이어야 하므로 n은 1, 2, 4, 5, 10, 20이고 $n=20$일 때 $3^{\frac{20}{n}}=3$으로 4보다 작다.

따라서 n은 1, 2, 4, 5, 10이므로 그 합은

$1+2+4+5+10=22$

답 22

07

밑의 조건에서 $|a+3|>0$, $|a+3|\neq1$이므로

$a\neq-4$, $a\neq-3$, $a\neq-2$ …… ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax-a+3>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+ax-a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(-a+3)<0$, $a^2+4a-12<0$

$(a+6)(a-2)<0$

$-6<a<2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 만족시키는 정수 a의 값은 -5, -1, 0, 1이므로 그 합은

$-5+(-1)+0+1=-5$

답 ③

08

$$\begin{aligned}\log_2 30-\log_2\frac{3}{2}-\log_2\frac{5}{4}&=\log_2\left(30\div\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}\right)\\&=\log_2\left(30\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right)\\&=\log_2 16=\log_2 2^4\\&=4\log_2 2=4\end{aligned}$$

답 ④

09

$a^2b^{-3}=1$의 양변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a^2b^{-3}=\log_b 1$이므로 $\log_b a^2+\log_b b^{-3}=0$

$2\log_b a=3$, $\log_b a=\frac{3}{2}$

$\log_b(a^m\times\sqrt{b^n})=m\log_b a+\frac{n}{2}=\frac{3m+n}{2}=10$

$3m+n=20$을 만족시키는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은

$(1, 17)$, $(2, 14)$, $(3, 11)$, $(4, 8)$, $(5, 5)$, $(6, 2)$

이므로 $m+n$의 최솟값은 $6+2=8$이다.

답 ①

10

$\left(4^{\log_2\frac{1}{3}}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=4^{\log_2\frac{1}{3}\times\log_3\frac{1}{6}}$

이때

$$\begin{aligned}\log_2\frac{1}{3}\times\log_3\frac{1}{6}&=\log_2 3^{-1}\times\log_3 6^{-1}\\&=(-\log_2 3)\times(-\log_3 6)\\&=\log_2 3\times\log_3 6\\&=\log_2 3\times\frac{\log_2 6}{\log_2 3}\\&=\log_2 6\end{aligned}$$

따라서 $\left(4^{\log_2\frac{1}{3}}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=4^{\log_2\frac{1}{3}\times\log_3\frac{1}{6}}=4^{\log_2 6}=6^{\log_2 4}=6^2=36$

답 ⑤

다른 풀이

$4^{\log_2\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 4}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$이므로

$\left(4^{\log_2\frac{1}{3}}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_3\frac{1}{9}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_3 3^{-2}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}=6^2=36$

11

$\frac{1}{\log_2 a}=\log_a 2$, $\frac{1}{\log_3 a}=\log_a 3$, $\log_{25} a=\log_{5^2} a=\frac{1}{2}\log_5 a$

이므로

$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{\log_{25} a}{\log_5 a}=\log_a 2+\log_a 3+\frac{1}{2}=1$

$\log_a 2+\log_a 3=\frac{1}{2}$

$\log_a 6=\frac{1}{2}$, $a^{\frac{1}{2}}=6$

따라서 $a=6^2=36$

답 36

12

조건 (가)에서 $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[5]{c}=k$라 하면 $a=k^2$, $b=k^3$, $c=k^5$이다.

이를 조건 (나)에 대입하면

$$\begin{aligned}\log_2\frac{bc}{a}&=\log_2\left(\frac{k^3\times k^5}{k^2}\right)\\&=\log_2 k^6\\&=6\log_2 k=3\end{aligned}$$

에서

$\log_2 k=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\log_2 a\times\log_m b\times\log_n c&=\log_2 a\times\frac{\log_2 b}{\log_2 m}\times\frac{\log_2 c}{\log_2 n}\\&=\log_2 k^2\times\frac{\log_2 k^3}{\log_2 m}\times\frac{\log_2 k^5}{\log_2 n}\\&=2\times3\times5\times(\log_2 k)^3\times\frac{1}{\log_2 m}\times\frac{1}{\log_2 n}\\&=2\times3\times5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{\log_2 m}\times\frac{1}{\log_2 n}\\&=1\end{aligned}$$

에서 $\log_2 m\times\log_2 n=\frac{15}{4}$

$m>1$, $n>1$에서 $\log_2 m>0$, $\log_2 n>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_2 m+\log_2 n \ge 2\sqrt{\log_2 m \times \log_2 n}$

(단, 등호는 $\log_2 m=\log_2 n$일 때 성립한다.)

$\log_2 mn \ge 2\sqrt{\dfrac{15}{4}}$

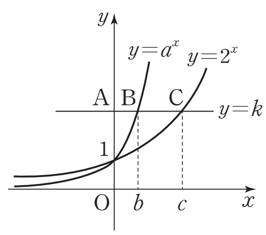
$\log_2 mn \ge \sqrt{15}$

따라서 $\log_2 mn$의 최솟값은 $\sqrt{15}$이다.

답 ③

13

두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0<b<c)$라 하면



$\overline{AB} : \overline{BC}=1 : 2$이므로

$c=3b$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 점 B, C의 y좌표는 서로 같으므로

$a^b=2^c$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

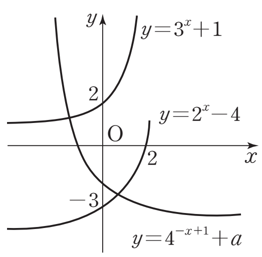
$a^b=2^{3b}=8^b$ $\cdots\cdots$ ㉢

따라서 $a>2$, $b>0$이므로 ㉢에서 $a=8$

답 8

14

두 곡선 $y=3^x+1$, $y=2^x-4$는 다음과 같다.



$f(x)=4^{-x+1}+a$라 하면

곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=3^x+1$과 제2사분면에서 만나려면

$f(0)=4+a<2$

$a<-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=2^x-4$와 제4사분면에서 만나려면

$f(0)=4+a>-3$, $f(2)=4^{-1}+a<0$

즉, $-7<a<-\dfrac{1}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-7<a<-2$이므로 정수 a는 -6, -5, -4, -3의 4개이다.

답 ②

15

$f(x)=2^{x+3}+k$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축이 서로 만나려면 $k<0$이다.

선분 OA의 길이가 자연수일 때 점 A의 x좌표를 a (a는 0이 아닌 정수)라 하면

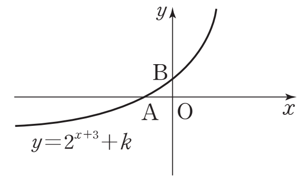
$0=2^{a+3}+k$에서 $k=-2^{a+3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 B의 y좌표를 b라 하면

$b=2^{0+3}+k$

$b=8+k$ $\cdots\cdots$ ㉡

(ⅰ) $a<0$일 때



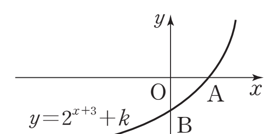
음의 정수 a의 값에 따라 ㉠, ㉡에서 각각 k, b의 값이 다음 표와 같이 결정된다.

a	-1	-2	-3	-4	$\cdots$
k	-4	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
b	4	6	7	$\dfrac{15}{2}$	$\cdots$

삼각형 AOB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BO}=\dfrac{1}{2}\times(-a)\times b=-\dfrac{ab}{2}$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k=-4$일 때 2이다.

(ⅱ) $a>0$일 때



양의 정수 a의 값에 따라 ㉠, ㉡에서 각각 k, b의 값이 다음 표와 같이 결정된다.

a	1	2	3	4	$\cdots$
k	-16	-32	-64	-128	$\cdots$
b	-8	-24	-56	-120	$\cdots$

삼각형 AOB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BO}=\dfrac{1}{2}\times a\times(-b)=-\dfrac{ab}{2}$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k=-16$일 때 4이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k=-4$일 때 2이므로

$S=2$, $s=-4$이다.

따라서 $S-s=2-(-4)=6$

답 6

16

$9^{x+1}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-x}+24$에서 $9\times9^x=9^x+24$

$(9-1)\times9^x=24$, $8\times9^x=24$

$9^x=3$, $3^{2x}=3$

$2x=1$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$이므로

$6a+5=6\times\dfrac{1}{2}+5=8$

답 8

17

$2^x\times4^{x^2-\frac{5}{2}x}=2^x\times2^{2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)}=2^{2x^2-4x}$

$2\times\left(\frac{1}{8}\right)^{x-3}=2\times2^{-3(x-3)}=2^{-3x+10}$

이므로 주어진 부등식은 $2^{2x^2-4x}\leq2^{-3x+10}$

이때 밑이 1보다 크므로

$2x^2-4x\leq-3x+10$

$2x^2-x-10\leq0$, $(2x-5)(x+2)\leq0$

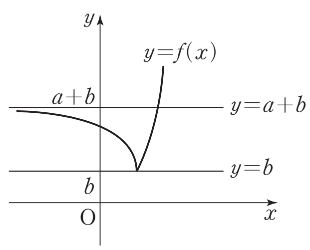
$-2\leq x\leq\frac{5}{2}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

답 ③

18

$f(x)=|3^x-a|+b$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$4^{f(x)}-5\times2^{f(x)+2}+64=0$

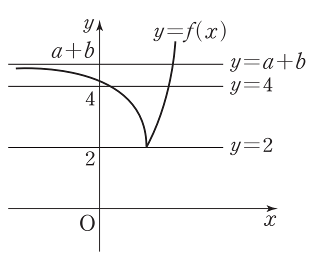
$(2^{f(x)})^2-20\times2^{f(x)}+64=0$, $(2^{f(x)}-4)(2^{f(x)}-16)=0$

$2^{f(x)}=4$ 또는 $2^{f(x)}=16$

$f(x)=2$ 또는 $f(x)=4$

(ⅰ) $b=2$일 때

직선 $y=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.



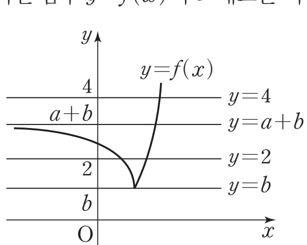
방정식 $4^{f(x)}-5\times2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$a+b>4$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $\cdots$, $(9, 2)$의 7개이다.

(ⅱ) $b\neq2$일 때

조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



방정식 $4^{f(x)}-5\times2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$는 한 점에서만 만나야 하므로

$b<2$, $2<a+b\leq4$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(3, 1)$의 2개이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$7+2=9$

답 9

19

함수 $y=\log_2(2x+a)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=\log_2\{2(x-3)+a\}+b$의 그래프와 같다.

함수 $y=\log_2\left\{2\left(x-3+\frac{a}{2}\right)\right\}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3-\frac{a}{2}$이므로

$3-\frac{a}{2}=-2$에서 $a=10$

또한 함수 $y=\log_2(2x+4)+b$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\log_2 4+b$에서 $b=-2$

따라서 $a+b=10+(-2)=8$

답 ④

20

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면

$\log_4 a=\log_8 b$

$\frac{1}{2}\log_2 a=\frac{1}{3}\log_2 b$

$\frac{3}{2}\log_2 a=\log_2 b$

$b=a^{\frac{3}{2}}$

두 점 B, C의 x좌표는 서로 같으므로 두 점 A, C의 좌표는 각각

$(a, \log_4 a)$, $\left(a^{\frac{3}{2}}, \log_4 a^{\frac{3}{2}}\right)$이다.

두 직선 OA, OC의 기울기가 서로 같으므로

$\frac{\log_4 a}{a}=\frac{\log_4 a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$

$a^{\frac{3}{2}}\times\log_4 a=a\times\log_4 a^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}}\times a\times\log_4 a=\frac{3}{2}\times a\times\log_4 a$

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

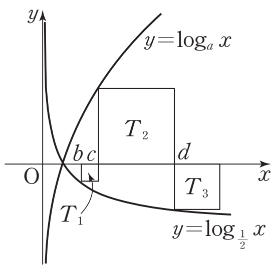
$a=\frac{9}{4}$

따라서 $k=\log_4\frac{9}{4}=\log_2\frac{3}{2}=-1+\log_2 3$

답 ④

21

그림과 같이 3개의 정사각형 T_1, T_2, T_3 각각의 x축 위에 있는 두 꼭짓점 중 x좌표의 값이 작은 점의 x좌표를 각각 b, c, d라 하자.



정사각형 T_1의 한 변의 길이가 1이므로

$\log_{\frac{1}{2}} b=-1$, $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

정사각형 T_3의 한 변의 길이가 3이므로

$\log_{\frac{1}{2}} d=-3$, $d=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

$c=b+1=2+1=3$이고 $d-c=8-3=5$이므로

정사각형 T_2의 한 변의 길이는 5이다.

$\log_a 3=5$에서 $a^5=3$

따라서 $a^{10}=3^2=9$

답 9

22

진수는 0보다 커야 하므로

$4x+11>0$, $x+1>0$

즉, $x>-\frac{11}{4}$, $x>-1$이므로 $x>-1$ ······ ㉠

주어진 방정식에서

$\log_3(4x+11)=\log_3 3(x+1)^2$

$4x+11=3x^2+6x+3$

$3x^2+2x-8=0$, $(x+2)(3x-4)=0$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

그런데 ㉠에서 $x>-1$이므로 $x=\frac{4}{3}$

$\alpha=\frac{4}{3}$이므로 $12\alpha=12\times\frac{4}{3}=16$

답 16

23

$\log_2(x+3)+\log_2(5-x)=a$ ······ ㉠

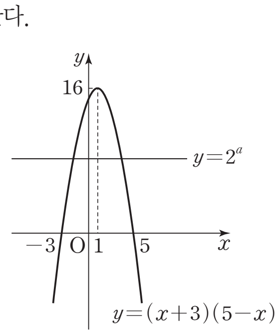
㉠에서 진수는 0보다 커야 하므로

$-3<x<5$

$\log_2(x+3)(5-x)=a$

$(x+3)(5-x)=2^a$ ······ ㉡

이차방정식 ㉡이 $-3<x<5$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=(x+3)(5-x)$와 직선 $y=2^a$이 $-3<x<5$에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$y=(x+3)(5-x)=-(x-1)^2+16$은 $x=1$에서 최댓값 16을 가지므로 그림과 같이 $0<2^a<16=2^4$이어야 한다. 즉, $a<4$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

답 3

24

$\log_{\frac{1}{2}}[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge -5$

$-\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge -5$

$\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\le 5$

진수는 0보다 커야 하므로 $\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}>0$

즉, $f(x)<2$ 또는 $f(x)>6$ ······ ㉠

$\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\le 5$에서

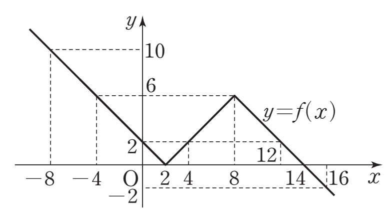
$\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}\le 2^5=32$

$\{f(x)\}^2-8f(x)-20\le 0$, $\{f(x)+2\}\{f(x)-10\}\le 0$

$-2\le f(x)\le 10$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)$의 값의 범위는

$-2\le f(x)<2$ 또는 $6<f(x)\le 10$



$-8\le x<-4$ 또는 $0<x<4$ 또는 $12<x\le 16$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -8, -7, -6, -5, 1, 2, 3, 13, 14, 15, 16이므로 그 개수는 11이다.

답 ④

25

함수 $f(x)$는 밑이 1보다 큰 로그함수이고, 함수 $g(x)$는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 함수 $f(x)$와 3보다 큰 모든 실수 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$y=\log_9(x-3)+2$의 역함수를 구하면

$y-2=\log_9(x-3)$

$x-3=9^{y-2}$, $x=9^{y-2}+3$

x, y를 서로 바꾸면 $y=9^{x-2}+3=3^{2x-4}+3$

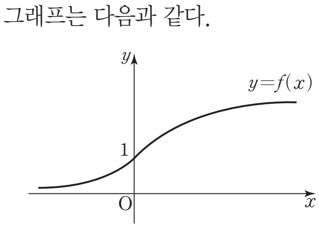
따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$2a+b=2\times 2+3=7$

답 7

26

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$x<0$일 때, $0<f(x)<1$이고 $x\ge 0$일 때, $f(x)\ge 1$이다.

$g\left(\frac{1}{16}\right)=k\ (k<0)$이라 하면 $f(k)=\frac{1}{16}<1$이므로

$f(k)=4^k=\frac{1}{16}=4^{-2}$에서 $k=-2$

$a\geq1$이므로 $g(a)=2$

$f(2)=a$

따라서 $a=\log_3(2+1)+1=\log_3 3+1=2$

답 2

다른 풀이

$y=4^x$의 역함수를 구하자.

$x=\log_4 y$

x, y를 서로 바꾸면

$y=\log_4 x$

$y=\log_3(x+1)+1$의 역함수를 구하자.

$y-1=\log_3(x+1)$, $x+1=3^{y-1}$

$x=3^{y-1}-1$

x, y를 서로 바꾸면

$y=3^{x-1}-1$

또한 $x<0$일 때, $0<f(x)<1$이고 $x\geq0$일 때, $f(x)\geq1$이므로 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}\log_4 x & (0<x<1)\\ 3^{x-1}-1 & (x\geq1)\end{cases}$$

$\left|g\left(\frac{1}{16}\right)\right|=|g(a)|$이므로

$-\log_4\frac{1}{16}=3^{a-1}-1$, $2=3^{a-1}-1$, $3^{a-1}=3$

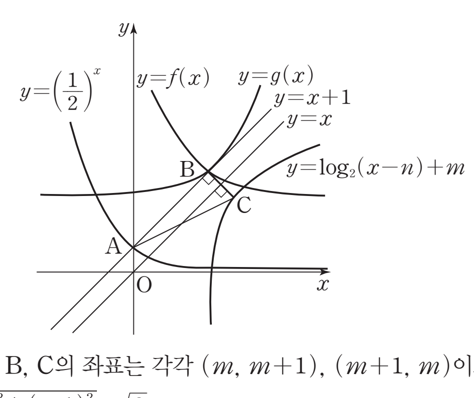
따라서 $a=2$

27

점 A의 좌표는 $(0, 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m, 1+n)$이다.

점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.

함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $B(m, 1+n)$을 지난다. 또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이 두 함수 $y=g(x)$, $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m, m+1)$, $(m+1, m)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서 $\angle B=90^\circ$이다.

$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}=m=6$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$

답 22

28

$g(x)=x^2-x+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$이라 하면

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $g(x)$는

최댓값 $g(-2)=\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{27}{4}$,

최솟값 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$을 가진다.

이때 함수 $f(x)$에서 로그의 밑은 1보다 크므로

$M=\log_2\frac{27}{4}$, $m=\log_2\frac{1}{2}=-1$

$(2^M)^m=\left(2^{\log_2\frac{27}{4}}\right)^{-1}=\left(\frac{27}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{27}$

답 ①

29

$0<\frac{a}{a+1}<1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값을 가진다.

$f(-2)=2\times\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-2}=72$

$\left(\frac{a+1}{a}\right)^2=36$

$\frac{a+1}{a}=6$, $a+1=6a$에서 $a=\frac{1}{5}$

따라서 $f(x)=2\times\left(\frac{1}{6}\right)^x$이고 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값

$f(1)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$을 가진다.

답 ②

30

(i) $-1<a<0$일 때

$0<a+1<1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$일 때 최댓값을 가진다.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{(a+1)}\frac{1}{4}=2$

$(a+1)^2=\frac{1}{4}$, $a+1=\pm\frac{1}{2}$

$-1<a<0$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

(ii) $a>0$일 때

$a+1>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=16$일 때 최댓값을 가진다.

$f(16)=\log_{(a+1)}16=2$

$(a+1)^2=16$, $a+1=\pm4$

$a>0$이므로 $a=3$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 $-\frac{1}{2}$ 또는 3이므로 그 합은

$-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

답 ③

02 삼각함수

정답 본문 20~29쪽

01 50	02 ③	03 ⑤	04 24	05 ④
06 ②	07 ①	08 ③	09 ④	10 7
11 8	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ③	17 ②	18 ③	19 5	20 ④
21 ⑤	22 ③	23 ③	24 33	25 7
26 ②	27 ②	28 ③	29 ④	30 49
31 ②	32 ③			

01

부채꼴의 호의 길이가 2π이므로 $r\theta=2\pi$ ······ ㉠

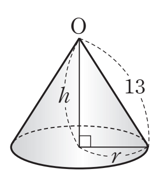
부채꼴의 넓이가 10π이므로 $\frac{1}{2}r^2\theta=10\pi$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $r=10$, $\theta=\frac{\pi}{5}$

따라서 $\frac{r\pi}{\theta}=\frac{10\pi}{\frac{\pi}{5}}=50$

답 50

02



부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면

$l=13\times\frac{10}{13}\pi=10\pi$

원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

$2\pi r=10\pi$에서 $r=5$

$5^2+h^2=13^2$에서 $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times12=100\pi$

답 ③

03

$\angle AOB=\theta$, $\overline{OC}=a$, $\overline{CD}=b$라 하면

색칠한 두 영역의 넓이가 서로 같으므로

$\frac{1}{2}a^2\theta=\frac{1}{2}\times10^2\times\theta-\frac{1}{2}\times(a+b)^2\times\theta$

$a^2+(a+b)^2=10^2$

a, b는 모두 자연수이므로 $a=6$, $a+b=8$

세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π이므로

$6\theta+8\theta+10\theta=6\pi$, $24\theta=6\pi$, $\theta=\frac{\pi}{4}$

따라서 통로 CEFD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(a+b)^2\times\theta-\frac{1}{2}\times a^2\times\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times(8^2-6^2)=\frac{7}{2}\pi$

답 ⑤

04

$\sin\theta=\frac{b}{6}$, $\tan\theta=\frac{b}{a}$이므로 $\sin\theta\times\tan\theta=\frac{b}{6}\times\frac{b}{a}=\frac{b^2}{6a}$

따라서 $\frac{b^2}{6a}=\frac{5}{6}$에서 $b^2=5a$

또한 $a^2+b^2=6^2$이므로 $a^2+5a=36$

$a^2+5a-36=0$, $(a-4)(a+9)=0$

$a=4$ 또는 $a=-9$

그런데 $|a|\le6$이므로 $a=4$

$b^2=5a=5\times4=20$

따라서 $a+b^2=4+20=24$

답 24

05

$$\begin{aligned}\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}&=\tan\theta\left(\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\\&=\tan\theta\left\{\frac{1+\cos\theta-(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}\right\}\\&=\tan\theta\times\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\\&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}\end{aligned}$$

$\frac{2}{\sin\theta}=-8$에서 $\sin\theta=-\frac{1}{4}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서

$(2\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+2\cos\theta)^2$

$=4\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$+(\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta)$

$=5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+8\sin\theta\cos\theta$

$=5\times1+8\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=5+\frac{\sqrt{15}}{2}$

답 ④

06

$\sin\theta\tan\theta<0$ ······ ㉠

$\cos\theta\tan\theta>0$ ······ ㉡

㉡에서 $\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$이므로 $\sin\theta>0$ ······ ㉢

㉠, ㉢에서 $\tan\theta<0$

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로 각 θ는 제2사분면의 각이다.

또한 θ를 나타내는 동경과 3θ를 나타내는 동경이 서로 y축에 대하여 대칭이므로 $\theta+3\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)에서 $\theta=\frac{2n+1}{4}\pi$

그런데 θ는 제2사분면의 각이므로 양수 θ의 최솟값은

$n=1$일 때 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$

따라서 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\alpha=-1$이므로

$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-1}=-\sqrt{2}$

답 ②

07

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이고 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

따라서

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}=-7$$

답 ①

08

주어진 함수 $y=2\tan(ax+b)$의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{6}$이므로

$\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{6}$이고 $a>0$이므로 $a=6$

$f(x)=2\tan(6x+b)$라 하면 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$이므로

$2\tan\left(6\times\frac{\pi}{12}+b\right)=0$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+b\right)=0$

$0<b<\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<b+\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$

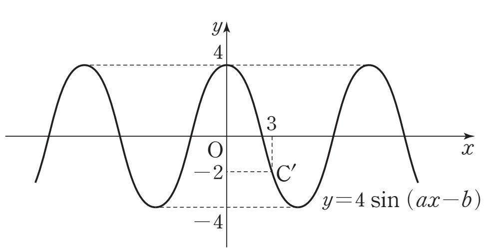
$b+\frac{\pi}{2}=\pi$에서 $b=\frac{\pi}{2}$

따라서 $ab=6\times\frac{\pi}{2}=3\pi$

답 ③

09

함수 $y=4\sin(ax-b)$의 그래프는 함수 $y=4\sin(ax-b)-1$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=4\sin(ax-b)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=4\sin(ax-b)-1$의 그래프가 점 C$(3, -3)$을 지나므로 함수 $y=4\sin(ax-b)$의 그래프는 점 C$'(3, -2)$를 지난다.
$f(x)=4\sin(ax-b)$라 하자.
$0<\alpha<3$일 때 $f(\alpha)=0$이면 $f(0)=4$, $f(3)=-2$이므로

$(3-\alpha) : \alpha=\frac{\pi}{6} : \frac{\pi}{2}=1 : 3$, $3-\alpha=\frac{\alpha}{3}$

즉, $\alpha+\frac{\alpha}{3}=3$에서 $\alpha=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 주기는 $4\alpha=4\times\frac{9}{4}=9$이다.

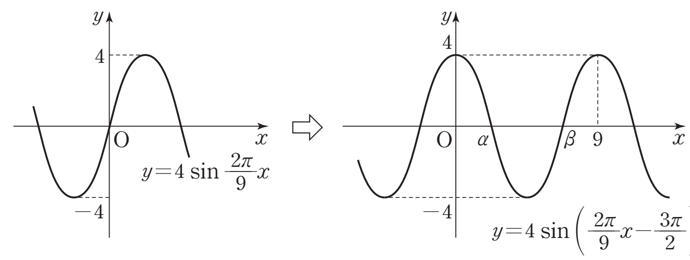
즉, $\frac{2\pi}{a}=9$에서 $a=\frac{2\pi}{9}$

함수 $y=4\sin(ax-b)=4\sin\left\{a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right\}$의 그래프는 함수

$y=4\sin ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{b}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

$\alpha<\beta<9$일 때 $f(\beta)=0$이면 $\beta=9\times\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$이므로 $\frac{b}{a}$의 최솟값은

$\frac{27}{4}$이고 그때의 b의 값은 $b=\frac{27}{4}\times a=\frac{27}{4}\times\frac{2\pi}{9}=\frac{3\pi}{2}$



따라서 $\frac{a+b}{\pi}$의 최솟값은 $\frac{\frac{2\pi}{9}+\frac{3\pi}{2}}{\pi}=\frac{31}{18}$

답 ④

주의

함수 $f(x)=4\sin(ax-b)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}x-b\right)$의 그래프가 점 C$'(3, -2)$를 지난다는 것을 이용하여 b의 최솟값을 구할 때는 주의해야 한다.

$f(3)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}\times3-b\right)=-2$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-b\right)=-\frac{1}{2}$

$b>0$이므로 $\frac{2\pi}{3}-b<\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}-b=-\frac{\pi}{6}$에서 $b=\frac{5\pi}{6}$

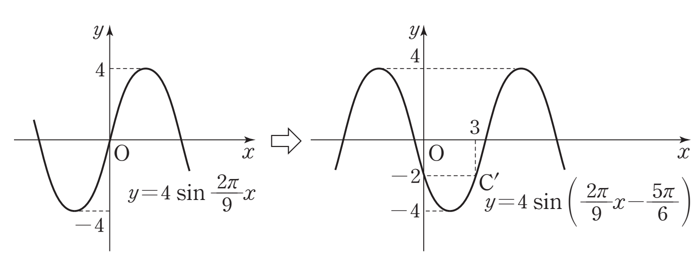
$\frac{2\pi}{3}-b=-\frac{5\pi}{6}$에서 $b=\frac{3\pi}{2}$

$\vdots$

$b=\frac{5\pi}{6}$일 때 $f(x)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}x-\frac{5\pi}{6}\right)=4\sin\left\{\frac{2\pi}{9}\left(x-\frac{15}{4}\right)\right\}$

이므로 그림과 같이 함수 $y=4\sin\frac{2\pi}{9}x$의 그래프를 x축의 방향으로

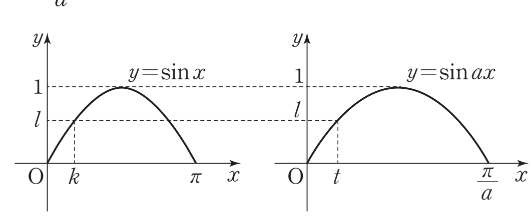
$\frac{15}{4}$만큼 평행이동한 것으로 주어진 그래프와 일치하지 않는다.



참고

다음 그림에서 삼각함수의 그래프의 주기가 바뀌어도 비례식

$k : \pi=t : \frac{\pi}{a}$가 성립한다.



$\sin at=l$에서 $at=k$, $t=\frac{k}{a}$

따라서 $t : \frac{\pi}{a}=\frac{k}{a} : \frac{\pi}{a}=k : \pi$이다.

10

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+b=3$

$b=3$

함수 $f(x)=a\cos\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+3$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+3=-1,\ a=4$

따라서 함수 $f(x)=4\cos\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+3$의 최댓값은

$4+3=7$

답 7

11

$-1\le\sin\frac{x}{2}\le1$이므로

$-3+k\le3\sin\frac{x}{2}+k\le3+k$

$(3+k)-(-3+k)=6$인데 $M-m=5$이므로

$-3+k<0,\ 3+k>0$

따라서 함수 $f(x)=\left|3\sin\frac{x}{2}+k\right|-2$의 최댓값은

$-(-3+k)-2=-k+1$ 또는 $(3+k)-2=k+1$이고 최솟값은

-2이다.

$-k+1-(-2)=5$에서 $k=-2$

$k+1-(-2)=5$에서 $k=2$

구하는 모든 실수 k의 제곱의 합은

$(-2)^2+2^2=8$

답 8

12

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,\ \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos^2 x+4\sin x\\&=-\sin^2 x-5(1-\sin^2 x)+4\sin x\\&=4\sin^2 x+4\sin x-5\end{aligned}$$

이때 $\sin x=t$라 하면 $0\le x<2\pi$이므로 $-1\le t\le1$이다.

따라서 함수 $y=4t^2+4t-5=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-6$의 최댓값은 $t=1$일 때 3이고, 최솟값은 $t=-\frac{1}{2}$일 때 -6이다.

따라서 $M=3,\ m=-6$이므로

$M-m=3-(-6)=9$

답 ④

13

$1-2\sin^2 x=\cos x$에서

$1-2(1-\cos^2 x)=\cos x$

$2\cos^2 x-1=\cos x,\ 2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$이므로

$\cos x=1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$이므로

(i) $\cos x=1$에서

$x=0$

(ii) $\cos x=-\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $n=3,\ \alpha=\frac{4}{3}\pi$이므로

$n\alpha=3\times\frac{4}{3}\pi=4\pi$

답 ③

14

방정식 $\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\tan 2x=0$의 실근은 두 함수

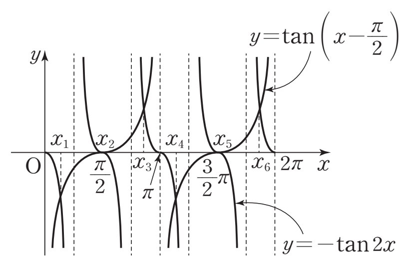
$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ y=-\tan 2x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

또한 $y=-\tan 2x$의 그래프는 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이고 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ y=-\tan 2x$의 그래프는 그림과 같고 $0\le x<2\pi$에서 6개의 점에서 만난다.

만나는 6개의 점의 x좌표를 작은 값부터 차례대로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$이라 하자.



두 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ y=-\tan 2x$의 그래프는 모두 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{\pi}{2}$에서

$x_1+x_3=\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}$

$\frac{x_4+x_6}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서

$x_4+x_6=3\pi,\ x_5=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6&=(x_1+x_3)+x_2+(x_4+x_6)+x_5\\&=\pi+\frac{\pi}{2}+3\pi+\frac{3}{2}\pi\\&=6\pi\end{aligned}$$

답 ⑤

15

$\frac{x-\pi}{3}=\theta$라 하면 $x=3\theta+\pi$이므로

$\frac{2x+\pi}{6}=\frac{2(3\theta+\pi)+\pi}{6}=\theta+\frac{\pi}{2}$

x에 대한 부등식 $2\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right)<0$을 θ에 대한 부등식으로 바꾸면

$2\sin^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)<0$

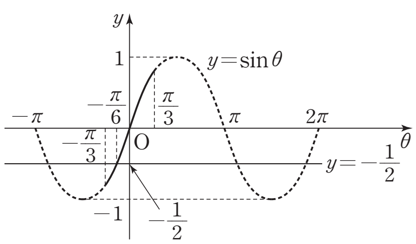
$2\sin^2\theta+\sin\theta<0$

$\sin\theta(2\sin\theta+1)<0$

$-\frac{1}{2}<\sin\theta<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$0\le x<2\pi$이므로 $-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{3}$이다.

$y=\sin\theta$의 그래프는 다음과 같으므로 $-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{3}$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 θ의 값의 범위는 $-\frac{\pi}{6}<\theta<0$



즉, $-\frac{\pi}{6}<\frac{x-\pi}{3}<0$이므로

$-\frac{\pi}{2}<x-\pi<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\pi$이므로

$4\alpha+\beta=2\pi+\pi=3\pi$

답 ③

16

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$A+C=\pi-B$

따라서

$4\sin(A+C)\sin B=4\sin(\pi-B)\sin B=4\sin^2 B=3$

$\sin^2 B=\frac{3}{4}$

$0<B<\pi$이므로 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로

사인법칙에 의하여

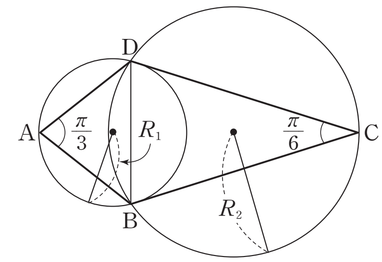
$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times\sqrt{10}$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AC}&=2\times\sqrt{10}\times\sin B\\&=2\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\sqrt{30}\end{aligned}$$

답 ③

17



그림과 같이 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

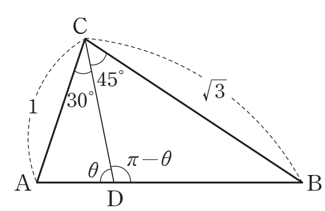
$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R_2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{2R_2}{2R_1}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

답 ②

18



그림과 같이 $\angle ADC=\theta$로 놓으면

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ}$

$\overline{AD}=\frac{1}{\sin\theta}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2\sin\theta}$

삼각형 BCD에서 $\angle BDC=\pi-\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}$

$\overline{BD}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}\times\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin\theta}$

따라서

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2\sin\theta}}{\frac{1}{2\sin\theta}}=\sqrt{6}$

답 ③

다른 풀이

삼각형 ADC와 삼각형 BCD의 넓이의 비는 선분 AD와 선분 BD의 길이의 비와 같다.

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{(\text{삼각형 BCD의 넓이})}{(\text{삼각형 ADC의 넓이})}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\sqrt{3}\times\sin 45^\circ}{\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times 1\times\sin 30^\circ}$$

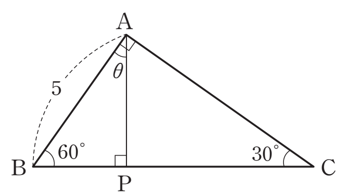
$$=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$$

19

삼각형 ABP에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ}$가 성립하므로

$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값은 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때이다.



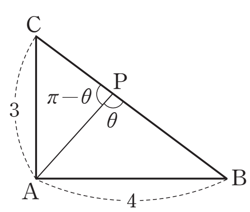
$\overline{AP}$의 길이는 점 P가 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발일 때 최소이므로 $\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값은

$$\frac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AB}\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ}=\overline{AB}=5$$

답 5

20

$\angle APB=\theta$로 놓으면 $\angle APC=\pi-\theta$



삼각형 ABP와 삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin\theta}=2R_1$, $\frac{3}{\sin(\pi-\theta)}=2R_2$

이때 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$이므로

$R_1 : R_2=4 : 3$

따라서 삼각형 ABP와 삼각형 APC의 외접원의 넓이의 비는

$S_1 : S_2=\pi {R_1}^2 : \pi {R_2}^2$

$=4^2 : 3^2=16 : 9$

답 ④

21

원에 내접하는 삼각형의 개수를 n이라 하면

$30^\circ\times n<180^\circ$에서

$n<6$

따라서 원에 내접하는 삼각형의 최대 개수는 5이다.

또 삼각형 AP_1P_{n+1} $(n=1, 2, 3, 4, 5)$의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin 30^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_2}=2R\times\frac{1}{2}=R$

$\frac{\overline{P_1P_3}}{\sin 60^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_3}=2R\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\frac{\overline{P_1P_4}}{\sin 90^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_4}=2R\times 1=2R$

$\frac{\overline{P_1P_5}}{\sin 120^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_5}=2R\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\frac{\overline{P_1P_6}}{\sin 150^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_6}=2R\times\frac{1}{2}=R$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_1P_{k+1}}=\sum_{k=1}^{5}\overline{P_1P_{k+1}}$$
$$=\overline{P_1P_2}+\overline{P_1P_3}+\overline{P_1P_4}+\overline{P_1P_5}+\overline{P_1P_6}$$
$$=4R+2\sqrt{3}R$$
$$=2(2+\sqrt{3})R=6(2+\sqrt{3})$$

이므로 $R=3$

답 ⑤

22

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{9^2+7^2-5^2}{2\times 9\times 7}=\frac{105}{126}=\frac{5}{6}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\cos C$$
$$=7^2+3^2-2\times 7\times 3\times\frac{5}{6}=23$$

$\overline{AD}>0$이므로 $\overline{AD}=\sqrt{23}$

답 ③

23

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$$
$$=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$$

따라서 직사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{AO}=\overline{CO}=2$이고 $\overline{OB}=2$이다.

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{2^2+2^2-3^2}{2\times 2\times 2}=-\frac{1}{8}$$

또 $\alpha+\beta=\pi$이므로

$$\sin\beta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서

$$\cos\alpha+\sin\beta=\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}-1}{8}$$

답 ③

24

$\overline{\mathrm{PC}}=x$라 하면

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=10^2+x^2-2\times10\times x\times\cos120^\circ$

$\quad=100+x^2+10x$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

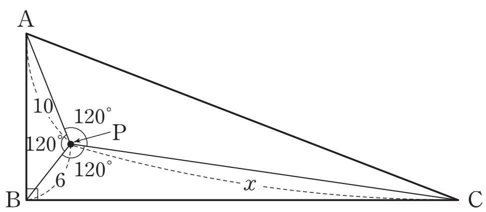
$\overline{\mathrm{AB}}^2=10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos120^\circ$

$\quad=100+36+60=196$

삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=6^2+x^2-2\times6\times x\times\cos120^\circ$

$\quad=36+x^2+6x$



삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$

$100+x^2+10x=196+36+x^2+6x$

$4x=132$

따라서 $x=33$

답 33

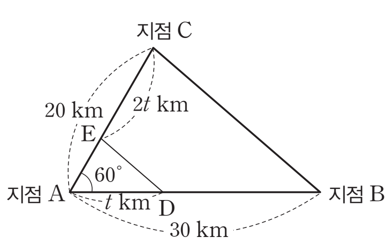
25

그림과 같이 두 여객선 P와 Q의 위치를 잇는 선분이 두 지점 B와 C를 잇는 선분과 평행이 되는 순간의 두 여객선의 위치를 각각 D, E라고 하자. 이때 여객선 P가 움직인 거리를 t km라 하면 여객선 Q는 여객선 P의 2배의 속력으로 움직이므로 여객선 Q가 움직인 거리는 $2t$ km이다.

즉, $\overline{\mathrm{AD}}=t$ km, $\overline{\mathrm{CE}}=2t$ km이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=20-2t$(km)

$\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{DE}}$이므로 삼각형 ADE와 삼각형 ABC는 서로 닮은 도형이다.



따라서 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$t:(20-2t)=30:20$

$20t=30(20-2t)$

$80t=600,\ t=\dfrac{15}{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{15}{2}$ km, $\overline{\mathrm{AE}}=20-2\times\dfrac{15}{2}=5$(km)

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos60^\circ$

$\quad=\left(\dfrac{15}{2}\right)^2+5^2-2\times\dfrac{15}{2}\times5\times\dfrac{1}{2}$

$\quad=\dfrac{225}{4}+25-\dfrac{75}{2}$

$\quad=\dfrac{175}{4}$

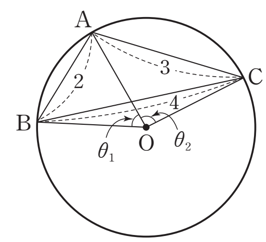
$\overline{\mathrm{DE}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$(km)

따라서 $p=2,\ q=5$이므로

$p+q=7$

답 7

26



$\theta_3=\theta_1+\theta_2$이므로 그림과 같이 현을 옮겨 세 변의 길이가 각각 2, 3, 4인 삼각형 ABC를 만들 수 있다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\dfrac{3}{12}=-\dfrac{1}{4}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin A}=2R$

$R=\dfrac{4}{2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{8}{\sqrt{15}}$

삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta_1=\dfrac{R^2+R^2-2^2}{2\times R\times R}=\dfrac{2\times\dfrac{64}{15}-4}{2\times\dfrac{64}{15}}$

$\quad=\dfrac{128-60}{128}=\dfrac{68}{128}=\dfrac{17}{32}$

답 ②

27

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=a,\ \overline{\mathrm{CA}}=b,\ \overline{\mathrm{AB}}=c$라 하면

$\dfrac{\sin A}{7}=\dfrac{\sin B}{3}=\dfrac{\sin C}{5}$에서

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:3:5$

따라서 $a=7k,\ b=3k,\ c=5k\ (k>0)$으로 놓으면

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}$

$\quad=\dfrac{-15k^2}{30k^2}=-\dfrac{1}{2}$

따라서

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=2R$이므로

$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{3}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$

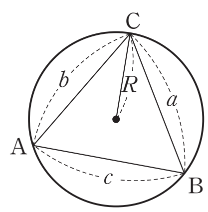
따라서 원의 넓이는

$\pi R^2=\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$

답 ②

참고

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면



사인법칙 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$에서

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\sin A : \sin B : \sin C=a : b : c$

28

$A+B+C=\pi$에서 $B+C=\pi-A$이므로

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

$\sin(B+C)\cos A=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$에서

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\frac{a}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

양변에 $4Rabc$를 곱하면

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$a^4-b^4-c^2(a^2-b^2)=0$

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

따라서 $a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

그런데 $a\neq b$이므로 구하는 삼각형 ABC는 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

답 ③

29

$\angle\mathrm{ADB}=150^\circ$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=3^2+(\sqrt{3})^2-2\times3\times\sqrt{3}\times\cos 150^\circ$

$=9+3-2\times3\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=21$

$\overline{\mathrm{AB}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{21}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ$

$=1+3-2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$\overline{\mathrm{AC}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=1$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin C}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 30^\circ}$

$\sin C=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\times\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=2R$에서

$R=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sin C}=\frac{\sqrt{21}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$

답 ④

다른 풀이

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ$

$=1+3-2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$\overline{\mathrm{AC}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=1$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CD}}=1$이므로 삼각형 ADC는 이등변삼각형이다.

따라서 $C=120^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos C$

$=1^2+4^2-2\times1\times4\times\cos 120^\circ$

$=1+16+4=21$

$\overline{\mathrm{AB}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{21}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=2R$에서

$R=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sin C}=\frac{\sqrt{21}}{2\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{21}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$

30

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos(\angle\mathrm{BAD})$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos 120^\circ$

$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=19$ ...... ㉠

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=x$로 놓으면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos 120^\circ$

$=x^2+x^2-2\times x\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=3x^2$ ...... ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$3x^2=19$, $x^2=\frac{19}{3}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이와 삼각형 BCD의 넓이의 합이므로

$$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin120^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times x^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{19\sqrt{3}}{12}$$
$$=\frac{37\sqrt{3}}{12}$$

$p=12$, $q=37$이므로

$p+q=12+37=49$

답 49

31

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$$
$$=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)$$

주어진 조건에서

$c=2\sqrt{26}$, $a+b=8+2\sqrt{2}$, $C=135^\circ$

이므로

$$(2\sqrt{26})^2=(8+2\sqrt{2})^2-2ab(1+\cos135^\circ)$$
$$104=72+32\sqrt{2}-2ab\left\{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$
$$104=72+32\sqrt{2}-2ab+\sqrt{2}ab$$
$$(2-\sqrt{2})ab=-32+32\sqrt{2}$$
$$ab=\frac{32(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{32(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{32}{\sqrt{2}}=16\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times16\sqrt{2}\times\sin135^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times16\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$$

답 ②

32

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$$
$$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{19}$

$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{EC}$이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{AD}$에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이므로

삼각형 CPA의 높이를 h라 하면 삼각형 CPA의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times h=\frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times h\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times h=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$h=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{57}}{19}$$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$

따라서 삼각형 DEP의 높이를 h'이라 하면

$$h'=\sqrt{3}h=\frac{9\sqrt{19}}{19}$$

그러므로 삼각형 PDE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times h'=\frac{1}{2}\times\sqrt{57}\times\frac{9\sqrt{19}}{19}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{19}\times\frac{9\sqrt{19}}{19}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

다른 풀이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$$
$$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=19$$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{19}$

$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{EC}$이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{AD}$에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 서로 같으므로

$\overline{CP}=2$, $\overline{AP}=3$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PE}=\sqrt{3}\times\overline{PC}=2\sqrt{3}$, $\overline{PD}=\sqrt{3}\times\overline{PA}=3\sqrt{3}$

$\angle ABC=\angle APC=\angle DPE=120^\circ$이므로

삼각형 PDE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PE}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

참고

삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$에서 넓이의 비는 $1:3$

삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 삼각형 PDE의 넓이는 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$이다.

03 수열

정답				본문 32~43쪽
01 ④	02 ②	03 ④	04 ②	05 ③
06 ②	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ④	19 340	20 ③
21 ②	22 ④	23 ②	24 ③	25 ①
26 ②	27 ①	28 ②	29 ④	30 ③
31 ③	32 ②	33 77	34 50	

01

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1a_9=a(a+8d)$

$=a^2+8ad=-60$ …… ㉠

$a_4a_6=(a+3d)(a+5d)$

$=a^2+8ad+15d^2=0$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면

$15d^2=60$, $d^2=4$ …… ㉢

따라서

$a_3a_7=(a+2d)(a+6d)$

$=a^2+8ad+12d^2$

$=-60+12\times4$ (㉠, ㉢에서)

$=-60+48=-12$

답 ④

02

$n=2$일 때,

$\{1, 2\}$에서 $A_2=\{3\}$이므로 $a_2=1$

$n=3$일 때,

$\{1, 2, 3\}$에서 $A_3=\{3, 4, 5\}$이므로 $a_3=3$

$n=4$일 때,

$\{1, 2, 3, 4\}$에서 $A_4=\{3, 4, 5, 6, 7\}$이므로 $a_4=5$

⋮

$n=k$일 때,

$\{1, 2, 3, \cdots, k-1, k\}$에서 $A_k=\{3, 4, 5, \cdots, 2k-1\}$이므로

$a_k=2k-3$

즉, $a_n=2n-3$ ($n=2, 3, 4, \cdots$)이므로

$2n-3=99$, $2n=102$

$n=51$

따라서 $a_n=99$를 만족시키는 자연수 n의 값은 51이다.

답 ②

03

등차수열 $\{a_n\}$에서 공차가 $2d$이고

$|a_4|>|a_5|$이므로

$(a_4)^2>(a_5)^2$

즉, $(a_1+6d)^2>(a_1+8d)^2$

$(a_1)^2+12a_1d+36d^2>(a_1)^2+16a_1d+64d^2$

$4a_1d+28d^2=4d(a_1+7d)<0$

$d>0$이므로 $a_1<-7d$ …… ㉠

$a_4a_5=(a_1+6d)(a_1+8d)$

$=(a_1)^2+14a_1d+48d^2$

$=(a_1+7d)^2-d^2$

㉠에서 $a_1<-7d$이고 a_1은 정수이므로

$a_1=-7d-1$일 때, a_4a_5는 최솟값을 가진다.

따라서 $f(d)=-7d-1$이므로

$f(2)+f(3)=(-15)+(-22)=-37$

답 ④

다른 풀이

모든 항이 정수이고 공차가 $2d>0$ (d는 자연수)이므로 $a_4<a_5$

$|a_4|>|a_5|$에서 $a_4<0<a_5$, $a_4+a_5<0$ …… ㉠

(i) $d=2$일 때, 공차가 4이므로 ㉠에서

$a_4=-3$, $a_5=1$

이때 $a_1=f(2)=a_4-3\times(\text{공차})=-3-3\times4=-15$

(ii) $d=3$일 때, 공차가 6이므로 ㉠에서

$a_4=-4$, $a_5=2$ 또는 $a_4=-5$, $a_5=1$

그런데 a_4a_5의 값이 최소이려면 $a_4=-4$, $a_5=2$이다.

이때 $a_1=f(3)=a_4-3\times(\text{공차})=-4-3\times6=-22$

(i), (ii)에서

$f(2)+f(3)=-15-22=-37$

04

$\log_3\frac{1}{2}$, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}, $\log_3 18$이 등차수열을 이루므로 12개의 수의 합을 S_{12}라 하면

$$S_{12}=\frac{12\left(\log_3\frac{1}{2}+\log_3 18\right)}{2}$$

$$=\frac{12\log_3\left(\frac{1}{2}\times18\right)}{2}$$

$$=6\times\log_3 9=6\times2\log_3 3=12$$

따라서

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=S_{12}-\left(\log_3\frac{1}{2}+\log_3 18\right)$$

$$=12-\log_3 9$$

$$=12-2=10$$

답 ②

05

3^n 이하의 모든 자연수의 합은 첫째항과 공차가 1이고 끝항이 3^n인 등차수열의 합이므로

$1+2+3+\cdots+3^n=\dfrac{3^n(3^n+1)}{2}$

$=\dfrac{3^{2n}+3^n}{2}$ …… ㉠

3^n 이하의 자연수 중에서 3의 배수인 모든 자연수의 합은 첫째항과 공차가 3이고 끝항이 3^n인 등차수열의 합이므로

$3+6+9+\cdots+3^n=3(1+2+3+\cdots+3^{n-1})$

$=3\times\dfrac{3^{n-1}(3^{n-1}+1)}{2}$

$=\dfrac{3^{2n-1}+3^n}{2}$ …… ㉡

따라서 3^n 이하의 자연수 중에서 3과 서로소인 모든 자연수의 합은 ㉠−㉡이므로 a_n은

$a_n=\dfrac{3^{2n}+3^n}{2}-\dfrac{3^{2n-1}+3^n}{2}$

$=\dfrac{3^{2n}-3^{2n-1}}{2}$

$=\dfrac{3^{2n-1}(3-1)}{2}$

$=3^{2n-1}$

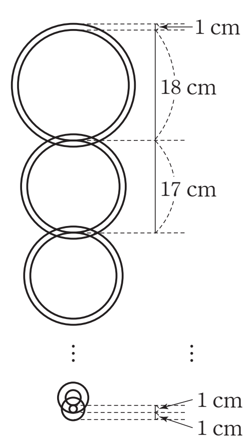
따라서 $\log_3 a_n=\log_3 3^{2n-1}=2n-1$이므로

$\log_3 a_{50}=2\times50-1=99$

답 ③

06

그림과 같이 가장 위의 폭 1 cm와 가장 아래의 폭 1 cm를 남겨두고 고리의 안쪽 지름의 길이를 구하면 18 cm, 17 cm, …, 1 cm이므로 가장 위에 있는 고리의 위 끝에서 가장 아래에 있는 고리의 아래 끝까지의 길이는



$1+(1+2+\cdots+18)+1$

$=2+\dfrac{18\times19}{2}$

$=2+171=173(\text{cm})$

따라서 $a=173$

답 ②

07

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_3=-\dfrac{5}{2}$에서 $a+ar^2=-\dfrac{5}{2}$ …… ㉠

$r^2>0$이므로 $a<0$

$a_2a_4=4$에서 $ar\times ar^3=a^2r^4=(ar^2)^2=4$

$a<0$, $r^2>0$이므로

$ar^2=-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a=-\dfrac{1}{2}$이고 $r^2=4$

따라서 $a_7=ar^6=-\dfrac{1}{2}\times(r^2)^3=-\dfrac{1}{2}\times4^3=-32$

답 ③

08

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

조건 (가)에서

$b_3+b_5+b_7=\log_2 ar^2+\log_2 ar^4+\log_2 ar^6$

$=\log_2 a^3r^{12}$

$=\log_2(ar^4)^3$

$=3\log_2 ar^4=15$

이므로 $\log_2 ar^4=5$

$ar^4=2^5$ …… ㉠

조건 (나)에서

$b_4+b_6+b_8=\log_2 ar^3+\log_2 ar^5+\log_2 ar^7$

$=\log_2 a^3r^{15}$

$=\log_2(ar^5)^3$

$=3\log_2 ar^5=21$

이므로 $\log_2 ar^5=7$

$ar^5=2^7$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r=2^2=4$이므로 $a=\dfrac{1}{8}$

$a_n=\dfrac{1}{8}\times4^{n-1}=2^{-3}\times2^{2n-2}=2^{2n-5}$

따라서 $b_{15}=\log_2 a_{15}=\log_2 2^{25}=25$

답 ③

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=ar^{n-1}$이라 하면

$b_n=\log_2 ar^{n-1}=\log_2 a+(n-1)\log_2 r$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하고 조건 (나)의 식에서 조건 (가)의 식을 변끼리 빼면 $3d=6$에서 $d=2$이고, 조건 (가)에서

$b_3+b_5+b_7=(b_1+4)+(b_1+8)+(b_1+12)=15$

$3b_1+24=15$

$3b_1=-9$, $b_1=-3$

따라서 $b_{15}=-3+14\times2=25$

09

첫째항이 $\dfrac{1}{64}$이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=\dfrac{1}{64}\times2^{n-1}$

$=2^{-6}\times2^{n-1}=2^{n-7}$

이다.

$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n>128$에서

$2^{-6}\times2^{-5}\times\cdots\times2^{n-7}>128$

$2^{-6}\times2^{-5}\times\cdots\times2^{n-7}=2^{-6+(-5)+\cdots+(n-7)}$이고

$-6+(-5)+\cdots+(n-7)=\dfrac{n\{-6+(n-7)\}}{2}$

$=\dfrac{n(n-13)}{2}$

이므로

$2^{\frac{n(n-13)}{2}}>2^7$

$\frac{n(n-13)}{2}>7$, $n^2-13n>14$

$n^2-13n-14>0$, $(n-14)(n+1)>0$

$n+1>0$이므로 $n>14$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 15이다.

답 ⑤

10

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{3a_3}{a_2}=\frac{3ar^2}{ar}=3r$, $\frac{a_6}{a_4}=\frac{ar^5}{ar^3}=r^2$

이므로 $\frac{3a_3}{a_2}+\frac{a_6}{a_4}=10$에서

$3r+r^2=10$, $r^2+3r-10=0$

$(r+5)(r-2)=0$

모든 항이 양수이므로 $r=2$이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\frac{3\times(2^7-1)}{2-1}=381$

답 ②

11

함수 $f(x)$가 다항함수이므로 함수 $g(x)=(f\circ f)(x)$도 다항함수이다.

$g(0)=(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(\sqrt{2})$

따라서

$$\begin{aligned}f(\sqrt{2})&=(\sqrt{2})^{10}+(\sqrt{2})^9+\cdots+\sqrt{2}+\sqrt{2}\\&=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^{10}-1\}}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}\\&=\frac{31\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}\\&=31\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\\&=62+32\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ③

12

조건 (가)에서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=85$

조건 (나)에서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=170$이므로

$$\begin{aligned}a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}&=a_1r+a_3r+a_5r+\cdots+a_{2k-1}r\\&=r\times(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1})=170\end{aligned}$$

에서 $85r=170$

$r=2$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2k}=\frac{2^{2k}-1}{2-1}=85+170$

$2^{2k}-1=255$, $2^{2k}=256=2^8$

이므로 $k=4$

따라서 $r+k=2+4=6$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이므로 등비수열 $\{a_{2n-1}\}$의 공비는 r^2이다.

조건 (가)에서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=85$

이므로 $\frac{(r^2)^k-1}{r^2-1}=85$ …… ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이므로 등비수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 r^2이고

$a_1=1$에서 $a_2=r$이다.

조건 (나)에서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=170$

이므로 $\frac{r\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=170$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$85r=170$

$r=2$

㉠에 $r=2$를 대입하면

$\frac{2^{2k}-1}{2^2-1}=85$

$2^{2k}-1=255$, $2^{2k}=256=2^8$

이므로 $k=4$

따라서 $r+k=2+4=6$

13

세 수 16, 16^a, 32^b이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(16^a)^2=16\times32^b$에서

$2^{8a}=2^4\times2^{5b}=2^{4+5b}$

$8a=4+5b$ …… ㉠

세 수 $\log 5$, $\log 2a$, $\log b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log 2a=\log 5+\log b$에서

$\log(2a)^2=\log 5b$

$4a^2=5b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$4a^2-8a+4=0$, $4(a^2-2a+1)=0$

$4(a-1)^2=0$

따라서 $a=1$, $b=\frac{4}{5}$이므로

$a+b=\frac{9}{5}$

답 ②

14

세 수 a, b, $a-b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+(a-b)=2a-b$

$3b=2a$, $b=\frac{2}{3}a$ …… ㉠

세 수 a^2, 12, $(a-b)^2$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2(a-b)^2=12^2$

$\{a(a-b)\}^2=12^2$

$a(a-b)>0$이므로

$a(a-b)=12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a\left(a-\frac{2}{3}a\right)=12$

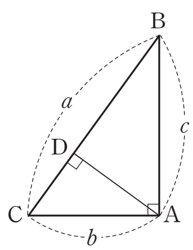
$\frac{a^2}{3}=12$, $a^2=36$

a는 자연수이므로 $a=6$, $b=4$

따라서 $a+b=10$

답 ②

15



그림과 같이 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$a^2=b^2+c^2$ ...... ㉠

세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC는 닮은 도형이므로 각 변의 길이의 비에 의하여

$\overline{BD}:c=c:a$에서 $\overline{BD}=\frac{c^2}{a}$

$\overline{CD}:b=b:a$에서 $\overline{CD}=\frac{b^2}{a}$

$\overline{AD}:b=c:a$에서 $\overline{AD}=\frac{bc}{a}$

그런데 세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times$(삼각형 ABD의 넓이)

$=$(삼각형 ABC의 넓이)$+$(삼각형 ADC의 넓이)

즉, $2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{c^2}{a}\times\frac{bc}{a}\right)=\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{a}\times\frac{bc}{a}$

$\frac{2bc^3}{a^2}=bc+\frac{b^3c}{a^2}$

$a^2>0$이므로 $2bc^3=a^2bc+b^3c$

$b>0$, $c>0$이므로 $2c^2=a^2+b^2$ ...... ㉡

㉠과 ㉡에서 $2c^2=a^2+(a^2-c^2)$

$3c^2=2a^2$, $c^2=\frac{2}{3}a^2$

$c>0$이므로 $c=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

따라서 $\sin C=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

다른 풀이

세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$ ...... ㉠

그런데

(삼각형 ABC의 넓이)

$=$(삼각형 ABD의 넓이)$+$(삼각형 ADC의 넓이)

이므로 $S_1=S_2+S_3$ ...... ㉡

㉠과 ㉡에서 $S_2=2S_3$이므로

$S_2:S_3=2:1$

삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 비는 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$의 길이의 비와 같으므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$

$\overline{BD}=2k$, $\overline{CD}=k$ $(k>0)$이라 하면

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=2k+k=3k$

$\overline{AB}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}=2k\times3k=6k^2$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{6}k$ $(\overline{AB}>0)$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$\sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{6}k}{3k}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

16

$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$이라 하면

$\log_2 S_n=n+2$에서

$S_n=2^{n+2}$이므로

$a_6=S_6-S_5$

$=2^8-2^7$

$=2^7\times(2-1)=128$

답 ②

17

$a_1+a_4=S_1+(S_4-S_3)$

$=2+k+\{(32+k)-(18+k)\}$

$=2+k+14$

$=16+k$

$a_1+a_4=14$에서

$16+k=14$

따라서 $k=-2$

답 ②

다른 풀이

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2+k$

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+k-\{2(n-1)^2+k\}$

$=4n-2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\begin{cases}2+k & (n=1)\\ 4n-2 & (n\geq2)\end{cases}$

$a_1+a_4=14$에서

$(2+k)+14=14$

따라서 $k=-2$

18

$b_n=na_n$에서

$n=1$일 때, $b_1=1\times a_1=S_1=\frac{1\times2\times3}{3}=2$ …… ㉠

$S_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$에서

$S_{n-1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}$

$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

이므로 $n\geq2$일 때,

$na_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{n(n+1)}{3}\{(n+2)-(n-1)\}$

$=n(n+1)$

$a_n=n+1$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $a_n=n+1\ (n\geq1)$

따라서 $a_1+a_{2021}=2+2022=2024$

답 ④

19

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 40이므로

$\sum_{k=1}^{20}a_k=40$이고,

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 60이므로

$\sum_{k=1}^{20}b_k=60$이다.

수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{20}c_k=\sum_{k=1}^{20}(3a_k+b_k+8)$이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{20}(3a_k+b_k+8)=\sum_{k=1}^{20}3a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}8$

$=3\sum_{k=1}^{20}a_k+60+8\times20$

$=3\times40+60+160=340$

답 340

20

$\sum_{k=1}^{15}k(a_k-a_{k+1})$

$=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+15(a_{15}-a_{16})$

$=a_1+(-a_2+2a_2)+(-2a_3+3a_3)$

$+\cdots+(-14a_{15}+15a_{15})-15a_{16}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})-15a_{16}$

$=\sum_{k=1}^{15}a_k-15\times\frac{1}{3}$

이므로 $\sum_{k=1}^{15}a_k-5=100$

따라서 $\sum_{k=1}^{15}a_k=105$

답 ③

21

두 자연수 m과 n $(m<n)$ 사이에 있는 유리수 중에서 분모가 8인 기약분수를 나열하면

$m+\frac{1}{8},\ m+\frac{3}{8},\ m+\frac{5}{8},\ m+\frac{7}{8},$

$(m+1)+\frac{1}{8}, (m+1)+\frac{3}{8},\ (m+1)+\frac{5}{8}, (m+1)+\frac{7}{8}$

$\vdots$

$(n-1)+\frac{1}{8},\ (n-1)+\frac{3}{8},\ (n-1)+\frac{5}{8},\ (n-1)+\frac{7}{8}$

따라서 m과 n 사이에 있는 유리수 중에서 분모가 8인 기약분수의 합은

$\sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{1}{8}\right)+\sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{3}{8}\right)+\sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{5}{8}\right)+\sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{7}{8}\right)$

$=\sum_{k=m}^{n-1}(4k+2)$

$=\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)-\sum_{k=1}^{m-1}(4k+2)$

$=4\times\frac{(n-1)n}{2}+2(n-1)-4\times\frac{(m-1)m}{2}-2(m-1)$

$=2n^2-2n+2n-2-2m^2+2m-2m+2$

$=2n^2-2m^2$

$=-2m^2+2n^2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

답 ②

22

$\sum_{k=1}^{22}|10-k|+\sum_{k=1}^{22}(k-10)$

$=\sum_{k=1}^{22}\{|10-k|+(k-10)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(10-k+k-10)+\sum_{k=11}^{22}\{(-10+k)+(k-10)\}$

$=0+\sum_{k=11}^{22}(2k-20)$

$=\sum_{k=1}^{22}(2k-20)-\sum_{k=1}^{10}(2k-20)$

$=\left(2\times\frac{22\times23}{2}-20\times22\right)-\left(2\times\frac{10\times11}{2}-20\times10\right)$

$=(506-440)-(110-200)$

$=66+90=156$

답 ④

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{22}|10-k|+\sum_{k=1}^{22}(k-10)$

$=\sum_{k=1}^{22}\{|10-k|+(k-10)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(10-k+k-10)+\sum_{k=11}^{22}\{(-10+k)+(k-10)\}$

$=0+\sum_{k=11}^{22}(2k-20)$

$=\sum_{k=11}^{22}2(k-10)$

$=\sum_{k=1}^{12}2k$

$=2\times\frac{12\times13}{2}=156$

참고

$\sum_{k=11}^{22} 2(k-10)$에서 $k-10=i$라 하면

$k=11$일 때 $i=1$이고, $k=22$일 때 $i=12$이므로

$\sum_{k=11}^{22} 2(k-10)=\sum_{i=1}^{12} 2i=\sum_{k=1}^{12} 2k$

23

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=(-1)^{n+1}n^2$이므로

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2\\&=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+\{(2n-1)^2-(2n)^2\}\\&=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\cdots\\&\qquad+\{(2n-1)-2n\}\{(2n-1)+2n\}\\&=-\{1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n\}\\&=-\frac{2n(2n+1)}{2}\\&=-2n^2-n\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} S_{2k}&=\sum_{k=1}^{6}(-2k^2-k)\\&=-2\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k\\&=-2\times\frac{6\times7\times13}{6}-\frac{6\times7}{2}\\&=-182-21=-203\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2\\&=\{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\}-\{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2\}\\&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k)^2\\&=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1-4k^2)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-4k+1)\\&=-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=-2n^2-n\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} S_{2k}&=\sum_{k=1}^{6}(-2k^2-k)\\&=-2\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k\\&=-2\times\frac{6\times7\times13}{6}-\frac{6\times7}{2}\\&=-182-21=-203\end{aligned}$$

24

$f(x)=x^3+x^2-6x+4$라 하면

$f(1)=0$이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+2x-4)$

따라서 α, β는 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$

$$\begin{aligned}&(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-2)(\beta-2)+(\alpha-3)(\beta-3)\\&\qquad+\cdots+(\alpha-10)(\beta-10)\\&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1^2+\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2^2\\&\qquad+\cdots+\alpha\beta-10(\alpha+\beta)+10^2\\&=10\alpha\beta-(\alpha+\beta)(1+2+\cdots+10)+1^2+2^2+\cdots+10^2\\&=10\times(-4)-(-2)\times\frac{10\times11}{2}+\frac{10\times11\times21}{6}\\&=-40+110+385=455\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$f(x)=x^3+x^2-6x+4$라 하면

$f(1)=0$이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+2x-4)$

따라서 α, β는 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이므로

$x^2+2x-4=(x-\alpha)(x-\beta)=(\alpha-x)(\beta-x)$

따라서

$$\begin{aligned}&(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-2)(\beta-2)+(\alpha-3)(\beta-3)\\&\qquad+\cdots+(\alpha-10)(\beta-10)\\&=\sum_{x=1}^{10}(\alpha-x)(\beta-x)\\&=\sum_{x=1}^{10}(x^2+2x-4)\\&=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}-40\\&=385+110-40=455\end{aligned}$$

25

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$$\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$$

$a_1=S_1=5$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)\\&=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)\\&=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}\end{aligned}$$

에서 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{5}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$

따라서 $S_{11}=30$

답 ①

26

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_{2n+1}-a_{2n}=a_{2n}-a_{2n-1}=2$이다.

한편, $\frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}}=\frac{1}{a_{2k+1}-a_{2k-1}}\left(\frac{1}{a_{2k-1}}-\frac{1}{a_{2k+1}}\right)$이고

$$\begin{aligned}a_{2k+1}-a_{2k-1}&=(a_{2k+1}-a_{2k})+(a_{2k}-a_{2k-1})\\&=2+2=4\end{aligned}$$

이므로

$\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_{2k-1}}-\frac{1}{a_{2k+1}}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{15}}-\frac{1}{a_{17}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{17}}\right)$

$=\frac{1}{18}$

$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{17}}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$

$a_{17}=a_1+16\times2=a_1+32$

이므로 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+32}=\frac{2}{9}$

$\frac{32}{a_1(a_1+32)}=\frac{2}{9}$, $a_1(a_1+32)=144$

$a_1{}^2+32a_1-144=0$, $(a_1+36)(a_1-4)=0$

모든 항이 양수이므로 $a_1=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$

이므로 $a_{20}=42$

답 ②

27

점 A$(0, -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 접선의 기울기를 m $(m>0)$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-1$이다.

$y=\frac{1}{n}x^2$, $y=mx-1$을 연립하면

$\frac{1}{n}x^2=mx-1$

$\frac{1}{n}x^2-mx+1=0$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=m^2-\frac{4}{n}=0$, $m^2=\frac{4}{n}$

$m>0$이므로 $m=\frac{2}{\sqrt{n}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\sqrt{n}}x-1$이고

접점의 x좌표 x_n은 ㉠에서

$\frac{1}{n}x_n{}^2-\frac{2}{\sqrt{n}}x_n+1=0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n-1\right)^2=0$이므로 $x_n=\sqrt{n}$

이때 $y_n=1$이므로 접점은 P$(\sqrt{n}, 1)$이다.

따라서

$\sum_{n=1}^{15} \frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}$

$=\sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\sum_{n=1}^{15} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}=-1+4=3$

답 ①

참고

미분을 이용하여 다음과 같이 점 P의 좌표를 구할 수도 있다.

곡선 $y=\frac{1}{n}x^2$ 위의 점 (x_n, y_n)에서의 접선의 방정식을 구하면

$y-y_n=\frac{2}{n}x_n(x-x_n)$이고 이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1-\frac{1}{n}x_n{}^2=\frac{2}{n}x_n(0-x_n)$

$-1-\frac{1}{n}x_n{}^2=-\frac{2}{n}x_n{}^2$

$\frac{1}{n}x_n{}^2=1$

$x_n{}^2=n$

$x_n>0$이므로 $x_n=\sqrt{n}$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 이차함수식에 대입하면

$y_n=\frac{1}{n}\times n=1$이므로 접점 P의 좌표는 $(\sqrt{n}, 1)$이다.

28

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$a_1=6$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=-3$, $a_5=6$, $a_6=3$, $\cdots$

이므로 $a_n=a_{n+4}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$임을 알 수 있다.

이때 $50=4\times12+2$이고, $\sum_{k=1}^{4} a_k=6$이므로

$\sum_{k=1}^{50} a_k=12\sum_{k=1}^{4} a_k+(a_{49}+a_{50})$

$=12\times6+(6+3)$

$=72+9=81$

답 ②

29

$a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$에서

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

$b_1=2$, $b_{n+1}=b_n+2$에서

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n=2+(n-1)\times2=2n$

$\frac{a_n}{2^{b_n}}=\frac{2^n}{2^{2n}}=2^{n-2n}=2^{-n}$이므로

$\frac{a_n}{2^{b_n}}>\frac{1}{1024}$에서

$2^{-n}>\frac{1}{1024}=2^{-10}$

이때 밑이 1보다 크므로

$-n>-10$

$n<10$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 9이다.

답 ④

30

$a_{2n+2}-a_{2n}=p$에서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a_2이고 공차가 p인 등차수열이므로

$a_{2n}=a_2+(n-1)p$

$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=p$에서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 p인 등비수열이므로

$a_{2n-1}=a_1p^{n-1}$, $a_7=a_1p^3=8$ ...... ㉠

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a_1, p도 자연수이다.

따라서 $p=1$ 또는 $p=2$이다.

(i) $p=1$일 때

$a_8=a_2+3=8$에서 $a_2=5$

(ii) $p=2$일 때

$a_8=a_2+6=8$에서 $a_2=2$

(i), (ii)와 $a_2\neq5$에 의하여 $a_2=2$, $p=2$이고 ㉠에서 $a_1=1$이다.

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_3=2$, $a_5=4$

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=2$이고 공차가 2인 등차수열이므로

$a_4=4$, $a_6=6$

따라서

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$$
$$=1+2+2+4+4+6=19$$

답 ③

참고

수열 $\{a_n\}$을 나열하면 다음과 같다.

1, 2, 2, 4, 4, 6, 8, 8, 16, 10, ⋯

31

수열 $\{a_n\}$에서 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$a_1=f(1)+f(2)=1^2-2^2=(1-2)(1+2)=-(1+2)$

$a_2=f(2)+f(3)=-2^2+3^2=(3-2)(3+2)=2+3$

$a_3=f(3)+f(4)=3^2-4^2=(3-4)(3+4)=-(3+4)$

$a_4=f(4)+f(5)=-4^2+5^2=(5-4)(5+4)=4+5$

⋮

$a_{49}=f(49)+f(50)=49^2-50^2=(49-50)(49+50)=-(49+50)$

$a_{50}=f(50)+f(51)=-50^2+51^2=(51-50)(51+50)=50+51$

따라서

$$\sum_{k=1}^{50}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}$$
$$=-(1+2)+(2+3)-(3+4)+\cdots+(50+51)$$
$$=-1+51=50$$

답 ③

다른 풀이

$a_n=f(n)+f(n+1)$에서

$$a_{2k-1}+a_{2k}=f(2k-1)+f(2k)+f(2k)+f(2k+1)$$
$$=f(2k-1)+2f(2k)+f(2k+1)$$
$$=(2k-1)^2-2(2k)^2+(2k+1)^2$$
$$=4k^2-4k+1-8k^2+4k^2+4k+1$$
$$=2$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{50}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{49}+a_{50})$$
$$=2+2+\cdots+2$$
$$=2\times25=50$$

32

$a_1=\alpha$, $a_2=\beta$로 놓고 관계식 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$을 나열하면 다음과 같다.

α, β, $\beta-\alpha$, $-\alpha$, $-\beta$, $\alpha-\beta$, α, β, ⋯

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은

α, β, $\beta-\alpha$, $-\alpha$, $-\beta$, $\alpha-\beta$

가 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

한편, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$이고

$40=6\times6+4$이므로

$$S_{40}=\sum_{k=1}^{36}a_k+a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4$$
$$=\alpha+\beta+(\beta-\alpha)+(-\alpha)$$
$$=-\alpha+2\beta=25 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$65=6\times10+5$이므로

$$S_{65}=\sum_{k=1}^{60}a_k+a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}+a_{65}$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$
$$=\alpha+\beta+(\beta-\alpha)+(-\alpha)+(-\beta)$$
$$=-\alpha+\beta=19 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=-13$, $\beta=6$

따라서 $a_1+a_2=\alpha+\beta=-7$

답 ②

다른 풀이

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서

$$a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}$$
$$=(a_{n+1}-a_n)-a_{n+1}=-a_n$$

$a_{n+6}=-a_{n+3}=-(-a_n)=a_n$

따라서 $a_{n+3}=-a_n$, $a_{n+6}=a_n$이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=a_1+a_2+a_3+(-a_1)+(-a_2)+(-a_3)$$
$$=0$$

$40=6\times6+4$이므로

$$S_{40}=\sum_{k=1}^{36}a_k+(a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40})$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_3+(-a_1)$$
$$=a_2+a_3=25 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$65=6\times10+5$이므로

$$S_{65}=\sum_{k=1}^{60}a_k+(a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}+a_{65})$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a_1+a_2+a_3+(-a_1)+(-a_2)$$
$$=a_3=19 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서 $a_2=6$이고, $a_3=a_2-a_1$이므로

$19=6-a_1$, $a_1=-13$

따라서 $a_1+a_2=-13+6=-7$

33

점 A_1의 좌표가 $(12, 6)$이므로 $a_1=12+6=18$

점 A_1의 y좌표와 점 B_1의 y좌표가 같으므로 점 B_1의 좌표를 $(\alpha_1, 6)$이라 하자.

점 B_1은 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위에 있으므로 $6=\frac{1}{\alpha_1}$에서 $\alpha_1=\frac{1}{6}$

따라서 점 B_1의 좌표는 $\left(\frac{1}{6}, 6\right)$이다.

점 B_1의 x좌표와 점 A_2의 x좌표가 같으므로 점 A_2의 좌표를 $\left(\frac{1}{6}, \beta_2\right)$라 하자.

점 A_2는 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위에 있으므로 $\beta_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

따라서 점 A_2의 좌표는 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$이므로

$a_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

점 A_2의 y좌표와 점 B_2의 y좌표가 같으므로 점 B_2의 좌표를 $\left(\alpha_2, \frac{1}{12}\right)$이라 하자.

점 B_2는 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위에 있으므로 $\frac{1}{12}=\frac{1}{\alpha_2}$에서 $\alpha_2=12$

따라서 점 B_2의 좌표는 $\left(12, \frac{1}{12}\right)$이다.

점 B_2의 x좌표와 점 A_3의 x좌표가 같으므로 점 A_3의 좌표를 $(12, \beta_3)$이라 하자.

점 A_3은 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위에 있으므로 $\beta_3=\frac{1}{2}\times12=6$

따라서 점 A_3의 좌표는 $(12, 6)$이므로

$a_3=12+6=18$

점 A_3의 좌표가 점 A_1의 좌표와 같으므로 이후 계속 반복된다.

즉, $a_n=\begin{cases} 18 \ (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{4} \ (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$

따라서 $a_7+a_8=18+\frac{1}{4}=\frac{73}{4}$

$p=4,\ q=73$이므로

$p+q=77$

답 77

다른 풀이

점 A_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

점 A_n은 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점이므로

$y_n=\frac{x_n}{2}$ …… ㉠

점 B_n의 y좌표가 점 A_n의 y좌표와 같으므로 $\mathrm{B}_n(\alpha, y_n)$이라 하면

점 B_n은 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점이므로 $y_n=\frac{1}{\alpha}$이고 $\alpha=\frac{1}{y_n}$이다.

따라서 $\mathrm{B}_n\left(\frac{1}{y_n}, y_n\right)$

또한 점 A_{n+1}의 x좌표가 점 B_n의 x좌표와 같으므로

$\mathrm{A}_{n+1}\left(\frac{1}{y_n}, \beta\right)$라 하면 점 A_{n+1}은 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점이므로

$\beta=\frac{\frac{1}{y_n}}{2}=\frac{1}{2y_n}$

점 $\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$이므로

$x_{n+1}=\frac{1}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{1}{2y_n}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x_{n+1}=\frac{2}{x_n}$이고 $y_{n+1}=\frac{1}{2y_n}$이다.

$a_1=x_1+y_1=12+6=18$

$a_2=x_2+y_2=\frac{2}{x_1}+\frac{1}{2y_1}=\frac{2}{12}+\frac{1}{2\times6}=\frac{1}{4}$

$a_3=x_3+y_3=\frac{2}{x_2}+\frac{1}{2y_2}=\frac{2}{\frac{1}{6}}+\frac{1}{2\times\frac{1}{12}}=12+6=18$

이므로 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항은 18이고 짝수 번째 항은 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 $a_7+a_8=18+\frac{1}{4}=\frac{73}{4}$

$p=4,\ q=73$이므로 $p+q=77$

34

(i) $n=2$일 때,

$(\text{좌변})=1^2+2^2+1^2=6$

$(\text{우변})=\frac{2\times(2\times2^2+1)}{3}=\frac{18}{3}=6$

이므로 ($*$)이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq2)$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$

$=\frac{m(2m^2+1)}{3}$

이다.

위 등식의 양변에 $\boxed{(m+1)^2+m^2}$을 더하여 정리하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+\boxed{(m+1)^2+m^2}$
$+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$

$=\frac{m(2m^2+1)}{3}+\boxed{(m+1)^2+m^2}$

$=\frac{m(2m^2+1)+3m^2}{3}+(m+1)^2$

$=\frac{m(2m+1)(m+1)}{3}+\boxed{(m+1)^2}$

$=\frac{m(2m+1)(m+1)+3(m+1)^2}{3}$

$=\frac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$

$=\frac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3}$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 ($*$)이 성립한다.

따라서 $f(m)=(m+1)^2+m^2,\ g(m)=(m+1)^2$이므로

$f(3)=4^2+3^2=16+9=25,\ g(4)=5^2=25$

$f(3)+g(4)=25+25=50$

답 50

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 46~57쪽

01 ②	02 ③	03 ③	04 ③	05 ①
06 ①	07 ②	08 40	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 10	14 7	15 ⑤
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 18	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 ④	25 ④
26 ⑤	27 13	28 ①	29 ①	30 ③
31 ③	32 ②	33 ②	34 ④	35 ②
36 16	37 ③	38 ⑤		

01

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$

또한 $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$이고 $f(2)=2$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to2}f(x)+kf(2)$에서

$0+2=1+2k$

이므로 $k=\frac{1}{2}$

답 ②

02

극한값 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$가 존재하므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to1-}\frac{a}{x+7}=\lim\limits_{x\to1+}(x+2)$에서

$\frac{a}{1+7}=3,\ a=24$

한편, $\lim\limits_{x\to b+}f(x)=\infty$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선

$x=-7$이므로

$b=-7$

따라서 $a+b=24+(-7)=17$

답 ③

03

$f(x)=\frac{|x-3||x-2|(x+a)}{(x-3)(x-2)}$에서

$x>3$일 때,

$f(x)=\frac{(x-3)(x-2)(x+a)}{(x-3)(x-2)}=x+a$

$x<1$일 때,

$f(x)=\frac{(x-3)(x-2)(x+a)}{(x-3)(x-2)}=x+a$

이므로

$$\lim_{x\to3+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to3+}(x+a)+\lim_{x\to1-}(x+a)$$
$$=(3+a)+(1+a)$$
$$=2a+4=10$$

따라서 $a=3$

답 ③

04

집합 A에서

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)-1$, 즉

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)-\lim\limits_{x\to a-}f(x)=-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$a=2$일 때, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to2-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)-\lim\limits_{x\to2-}f(x)=-1$

$a=0$일 때, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)-\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$

$a=-1$일 때, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)-\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=-1$

$A=\{-1, 0, 2\}$ …… ㉠

집합 B에서

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)>\lim\limits_{x\to a-}f(x)$, 즉

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)-\lim\limits_{x\to a-}f(x)>0$

$a=1$일 때, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)-\lim\limits_{x\to1-}f(x)>0$

$B=\{1\}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A\cup B=\{-1, 0, 1, 2\}$

집합 C에서

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)<\lim\limits_{x\to a-}\{f(x)\}^2$, 즉

$\lim\limits_{x\to a-}\{f(x)\}^2-\lim\limits_{x\to a+}f(x)>0$

a가 정수일 때,

$a=2, 0, -1, 1$의 좌극한값과 우극한값에서

$\lim\limits_{x\to a-}\{f(x)\}^2-\lim\limits_{x\to a+}f(x)>0$이다.

a가 정수가 아닐 때,

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=p$라 하면

$p^2-p>0,\ p(p-1)>0$에서

$p<0$ 또는 $p>1$

그러므로 $\frac{1}{2}<a<1,\ 1<a<2$

$C=\{-1, 0, 1, 2\}\cup\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\{x|1<x<2\}$

따라서

$C-(A\cup B)=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\{x|1<x<2\}$

답 ③

05

함수 $f(x)=ax\ (a-1\le x<a)$에서 a는 정수이므로

$$f(x)=\begin{cases} \vdots \\ -2x & (-3\le x<-2) \\ -x & (-2\le x<-1) \\ 0 & (-1\le x<0) \\ x & (0\le x<1) \\ 2x & (1\le x<2) \\ 3x & (2\le x<3) \\ \vdots \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to(p+2)-} f(x)=\lim\limits_{x\to(p+2)-}\{(p+2)x\}=(p+2)^2$

$\lim\limits_{x\to p+} f(x)=\lim\limits_{x\to p+}\{(p+1)x\}=p(p+1)$

따라서 $\lim\limits_{x\to(p+2)-} f(x)-\lim\limits_{x\to p+} f(x)=157$에서

$(p+2)^2-p(p+1)=157$

$3p+4=157$

이므로 $p=51$

답 ①

06

$$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-(x+2)g(x)}{f(x)g(x)+2g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\{f(x)\}^2}{x}-(x+2)\frac{g(x)}{x}}{f(x)\times\frac{g(x)}{x}+2\times\frac{g(x)}{x}}$$

$$=\frac{16-3k}{4k+2k}$$

$$=\frac{16-3k}{6k}=\frac{1}{3}$$

에서 $3(16-3k)=6k$

$15k=48$

따라서 $k=\frac{16}{5}$

답 ①

07

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 x축 위의 한 점 $(a,\ 0)$ ($a\ne2$인 상수)에서만 만나고 $\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$이므로

$f(x)=(x-a)(x-2)$, $g(x)=(x-a)(x-b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$가 모두 존재하므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+2g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to1} f(x)+2\lim\limits_{x\to1} g(x)$

$=\lim\limits_{x\to1}(x-a)(x-2)+2\lim\limits_{x\to1}(x-a)(x-b)$

$=a-1+2(1-a)(1-b)=0$ ...... ㉠

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-a)(x-2)}{(x-a)(x-b)}=\frac{1-2}{1-b}=\frac{1}{b-1}=\frac{1}{3}$

에서 $b=4$

㉠에 $b=4$를 대입하면 $a-1-6(1-a)=0$이므로

$7a=7$, $a=1$

그러므로 $f(x)=(x-1)(x-2)$, $g(x)=(x-1)(x-4)$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0}(x-1)^2(x-2)(x-4)=8$

답 ②

08

$g(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하자.

$\lim\limits_{x\to1} f(x+1)g(x)$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(x+1)g(x)=\lim\limits_{x\to1+} f(x+1)g(x)$, 즉

$-1\times g(1)=1\times g(1)$에서

$2g(1)=0$, $g(1)=0$

$1+a+b=0$, $a+b=-1$ ...... ㉠

$\lim\limits_{x\to2} f(x)g(x+1)$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to2-} f(x)g(x+1)=\lim\limits_{x\to2+} f(x)g(x+1)$, 즉

$-1\times g(3)=1\times g(3)$에서

$2g(3)=0$, $g(3)=0$

$27+9a+3b=0$, $3a+b=-9$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-4$, $b=3$

따라서 $g(x)=x^3-4x^2+3x$이므로

$g(5)=5^3-4\times5^2+3\times5=40$

답 40

09

$\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4)+x^4-16}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4)+(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4)\{1+(x+2)\}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)(x^2+4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+3)(x^2+4)$

$=40$

답 ⑤

10

$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^3+x}-\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{x+1-(x^2+1)}{x(x^2+1)(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{x(1-x)}{x(x^2+1)(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{1-x}{(x^2+1)(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$

$=1+2=3$

답 ③

11

함수 $y=f(x)$의 그래프는 점근선이 직선 $x=-a$이고

$\lim_{x \to 2+} \frac{1}{x+a}=\infty$이므로 $a=-2$

$\lim_{x \to 5} f(x)g(x)=\frac{1}{3}$에서

$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+b}-1}{x-2}=\frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{5+b}-1}{3}=\frac{1}{3}$, $\sqrt{5+b}=2$, $5+b=4$

$b=-1$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} f(x)g(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

12

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-x^3-x) \\ &= \lim_{x \to \infty} \{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-(x^3+x)\} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{\{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-(x^3+x)\}\{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+(x^3+x)\}}{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+x^3+x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3-x^2}{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+x^3+x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{1+1}=2\end{aligned}$$

답 ④

13

부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{5}{x^2(x^2+10)} \le f(x) \le \frac{5}{x^2(x^2+1)}$

각 변에 $2x^4+5$를 곱하면

$\frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+10)} \le (2x^4+5)f(x) \le \frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+1)}$

이므로

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+10)} = \lim_{x \to \infty} \frac{10+\frac{25}{x^4}}{1+\frac{10}{x^2}}=10$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{10+\frac{25}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}=10$$

따라서 $\lim_{x \to \infty} (2x^4+5)f(x)=10$

답 10

14

$f(x)=\sum_{k=1}^{200} x^k = x+x^2+x^3+\cdots+x^{200}$이므로

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{3n^2}(x^{4n}+x^{3n})}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{3n^2+4n}+x^{3n^2+3n}}{x+x^2+x^3+\cdots+x^{200}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x \to \infty} (x+x^2+x^3+\cdots+x^{200})=\infty$

$\lim_{x \to \infty} (x^{3n^2+4n}+x^{3n^2+3n})=\infty$이므로 ㉠이 수렴하기 위해서는 분자의 최고차항의 차수가 분모의 최고차항의 차수보다 작거나 같아야 한다.

즉, $3n^2+4n \le 200$, $n(3n+4) \le 200$에서

$n(3n+4)$는 $n=7$일 때 175, $n=8$일 때 224이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 1, 2, 3, …, 7이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 개수는 7이다.

답 7

15

$\lim_{x \to 3} \frac{x^3+ax^2-3x}{(x-3)(x+b)}=12$이고, $x \to 3$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 3} (x^3+ax^2-3x)=18+9a=0$에서 $a=-2$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{x^3-2x^2-3x}{(x-3)(x+b)} &= \lim_{x \to 3} \frac{x(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+b)} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+b)}\end{aligned}$$

$\lim_{x \to 3} \frac{x(x+1)}{x+b}=12$에서 $\frac{12}{3+b}=12$, $b=-2$

따라서 $a+b=-2+(-2)=-4$

답 ⑤

16

$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+2ax+a+b}=-\frac{1}{2}$에서 $x \to 2$일 때 (분자) $\to 0$이고

0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2} (x^2+2ax+a+b)=0$에서

$b=-4-5a \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+2ax+a+b} &= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+2ax-4-4a} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x^2-4)+2a(x-2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2+2a)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2+2a} \\ &= \frac{1}{4+2a}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$4+2a=-2$에서 $a=-3$

㉠에서 $b=11$이므로

$a+b=8$

답 ⑤

17

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+b}-2}=16$에서 $x\to1$일 때, (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+b}-2)=0$에서

$\sqrt{1+b}-2=0$, $\sqrt{1+b}=2$, $1+b=4$, $b=3$

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+3}-2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\{(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)\}$

$=8\sqrt{1+a}=16$

$\sqrt{1+a}=2$, $1+a=4$, $a=3$

따라서 $a+b=3+3=6$

답 ④

18

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)f(x)}{x+2}=0$이고, $x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-2}(x+1)f(x)=-f(-2)=0$에서

$f(-2)=0$

$f(x)=(x+2)(x+a)$ (a는 상수) …… ㉠

이라 하면

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)(x+2)(x+a)}{x+2}=0$에서

$\lim_{x\to-2}(x+1)(x+a)=0$

$-(-2+a)=0$, $a=2$이므로

㉠에서 $f(x)=(x+2)^2$

따라서 $f(3)=5^2=25$

답 ④

19

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$의 값이 존재하여야 하므로

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$에서 $x\to0+$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=0$

그러므로 $b=0$이고 $g(x)=x^2+ax$ …… ㉠

한편, $\lim_{x\to2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하여야 하므로

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$에서 $x\to2+$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to2+}g(x+1)=g(3)=0$

㉠에서 $3^2+3a=0$, $a=-3$

따라서 $g(x)=x^2-3x$이므로

$g(6)=6^2-18=18$

답 18

20

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=0$이므로

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n\le3$이고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 함수 $f(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a는 소수)라 하자.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$이고, $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

그러므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a는 소수)

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+bx^2+cx}{x}$

$=\lim_{x\to0}(ax^2+bx+c)$

$=c=8$

$f(x)=ax^3+bx^2+8x=x(ax^2+bx+8)$

a가 소수이고 방정식 $f(x)=0$의 근이 음이 아닌 서로 다른 세 정수이므로 양의 정수 p, q에 대하여

$f(x)=x(x-p)(ax-q)$ (단, $pq=8$)

a가 소수이고 $\frac{q}{a}$가 음이 아닌 정수이기 위해서는 $q\ne1$이어야 하므로 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) $p=1$, $q=8$일 때

$x(x-1)(ax-8)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{8}{a}$

이므로 $a=2$

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

(ii) $p=2$, $q=4$일 때

$x(x-2)(ax-4)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{4}{a}$

이므로 $a=2$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 방정식 $f(x)=0$의 근은 서로 다른 두 개이므로 적합하지 않다.

(iii) $p=4$, $q=2$일 때

$x(x-4)(ax-2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=\frac{2}{a}$

이므로 $a=2$

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 (i), (ii), (iii)에서

$a=2$, $f(x)=2x(x-1)(x-4)$

이므로

$a+f(5)=2+40=42$

답 ④

21

점 P의 좌표가 $P(t,\ 2t^2+3)$이고

$Q\left(t,\ \frac{1}{3}t^2\right)$, $H(t,\ 0)$이므로

$\overline{PQ}=2t^2+3-\frac{1}{3}t^2=\frac{5}{3}t^2+3$

$\overline{QH}=\frac{1}{3}t^2$

따라서 $A(t)=\left(\frac{5}{3}t^2+3\right)\pi$, $B(t)=\frac{1}{3}t^2\pi$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}t^2+3\right)\pi}{\frac{1}{3}t^2\pi}=\lim_{t\to\infty}\frac{5t^2+9}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\left(5+\frac{9}{t^2}\right)=5$$

답 ④

22

점 P의 좌표는 $P(t,\ 2t+1)$이고

$t>4$에서 $2t+1>9$

$\overline{QH_1}=t-4$이므로 삼각형 PQH_1의 넓이는

$$A(t)=\frac{1}{2}\times(t-4)\times(2t+1)=\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4)$$

$\overline{RH_2}=2t+1-5=2(t-2)$이므로 삼각형 PH_2R의 넓이는

$$B(t)=\frac{1}{2}\times 2(t-2)\times t=t(t-2)$$

$$\lim_{t\to4+}\frac{tA(t)}{(t-4)B(t)}=\lim_{t\to4+}\frac{t\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4)}{(t-4)t(t-2)}=\lim_{t\to4+}\frac{t+\frac{1}{2}}{t-2}=\frac{9}{4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4)}{t(t-2)}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-\frac{7}{2}t-2}{t^2-2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{7}{2t}-\frac{2}{t^2}}{1-\frac{2}{t}}=1$$

따라서 $\lim_{t\to4+}\frac{tA(t)}{(t-4)B(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$

답 ⑤

23

$x=\sqrt{2x}$에서

$x^2=2x$, $x(x-2)=0$이므로 $x=2$

$A(2,\ 2)$, $B(2,\ 0)$이고

$Q(t,\ \sqrt{2t})$, $R(t,\ 0)$이므로

$\overline{PB}=\sqrt{(t-2)^2+t^2}=\sqrt{2t^2-4t+4}$

$\overline{QB}=\sqrt{(t-2)^2+2t}=\sqrt{t^2-2t+4}$

$\overline{BR}=t-2$

$\overline{OR}=t$

따라서

$$\lim_{t\to2+}\frac{\overline{PB}-\overline{QB}}{\overline{BR}\times\overline{OR}}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{\sqrt{2t^2-4t+4}-\sqrt{t^2-2t+4}}{t(t-2)}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{(2t^2-4t+4)-(t^2-2t+4)}{t(t-2)(\sqrt{2t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-2t+4})}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{t(t-2)}{t(t-2)(\sqrt{2t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-2t+4})}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{1}{\sqrt{2t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-2t+4}}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

답 ①

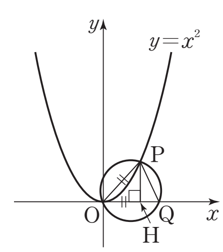
24

점 P의 좌표 $P(t,\ t^2)$ $(t>0)$에 대하여

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2)^2}=t\sqrt{1+t^2}$이므로

$Q(t\sqrt{1+t^2},\ 0)$

$\overline{PQ}^2=(t\sqrt{1+t^2}-t)^2+t^4=2t^4+2t^2-2t^2\sqrt{1+t^2}$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(t,\ 0)$

$\angle POH=\theta$라 하면 직각삼각형 POH에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}=\frac{t^2}{t\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

삼각형 POQ의 외접원에 대하여 사인법칙에서

$A(t)=\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta}$이므로

$$\{A(t)\}^2=\frac{\overline{PQ}^2}{\sin^2\theta}=\frac{2t^4+2t^2-2t^2\sqrt{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}}$$
$$=2(t^2+1)^2-2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)$$
$$=2t^4+4t^2+2-2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\{A(t)\}^2}{t^4}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4+4t^2+2-2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}{t^4}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{2+\frac{4}{t^2}+\frac{2}{t^4}-2\sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\right\}$$
$$=2$$

답 ④

25

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, 즉

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+a}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}=b$$

에서 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}(2x+a)=a=0$

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{6x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $a+b=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

답 ④

26

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=-6$

$x\neq 1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+4x-5+2g(x)}{x-1}$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5+2g(x)}{x-1}=-6$

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 하고,

$2g(1)=0$에서 $g(1)=0$

$g(x)=(x-1)(x+k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5+2(x-1)(x+k)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)+2(x-1)(x+k)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}(3x+5+2k)\\ &=8+2k=-6\end{aligned}$$

에서 $k=-7$

그러므로 $x\neq 1$일 때,

$f(x)=\frac{3(x-1)(x-3)}{x-1}=3(x-3)$

따라서 $f(10)=21$

답 ⑤

27

(ⅰ) $x=0$일 때, $f(0)=0$

(ⅱ) $x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{x^{n+15}(1+x^{2n+1})}{x^{2n+1}}$

그러므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$이다.

(ⅰ) $n+15>2n+1$에서 $n<14$

$1\le n\le 13$일 때,

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^{14-n}(1+x^{2n+1})=0$

(ⅱ) $n+15=2n+1$에서 $n=14$

$n=14$일 때,

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x^{29})=1$

(ⅲ) $n+15<2n+1$에서 $n>14$

$n\ge 15$일 때,

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^{2n+1}}{x^{n-14}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{n-14}}+x^{n+15}\right)$의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위한 n의 값의 범위는 $1\le n\le 13$이므로 자연수 n의 최댓값은 13이다.

답 13

28

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}\left|-\frac{2}{x}-2\right|=0$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(-x^2+k_1)=-1+k_1$

$f(-1)=-(-1)^2+k_1=-1+k_1$

이므로 $-1+k_1=0$에서 $k_1=1$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+1)=0$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\left|\frac{2}{x}+k_2\right|=|2+k_2|$

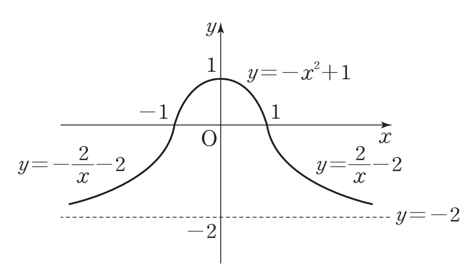
$f(1)=\left|\frac{2}{1}+k_2\right|=|2+k_2|$

이므로 $|2+k_2|=0$에서 $k_2=-2$

한편, $-1\le x<1$일 때, $y=-x^2+1$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

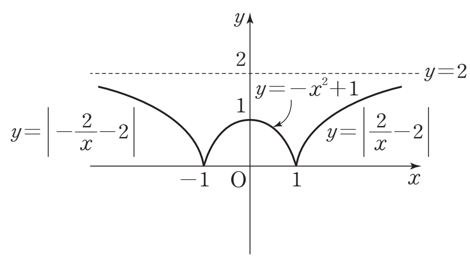
$x\ge 1$일 때, $y=\frac{2}{x}-2$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선이 직선 $y=-2$이고

$x<-1$일 때, $y=-\frac{2}{x}-2$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}-2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그러므로 함수 $y=f(x)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\left|-\frac{2}{x}-2\right| & (x<-1)\\ -x^2+1 & (-1\le x<1)\\ \left|\frac{2}{x}-2\right| & (x\ge 1)\end{cases}$$



그러므로 직선 $y=a$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수인 함수 $g(a)$는 다음과 같다.

$$g(a)=\begin{cases} 0 & (a\ge 2) \\ 2 & (1<a<2) \\ 3 & (a=1) \\ 4 & (0<a<1) \\ 2 & (a=0) \\ 0 & (a<0) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(a)$는 $a=0,\ 1,\ 2$에서 불연속이므로 구하는 모든 실수 t의 값의 합은

$0+1+2=3$

답 ①

29

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=\frac{8}{3}$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(2x+a)=a$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{3}{8}\left(b-\frac{3}{4}n\right)x=0$

$f(0)=\frac{3}{8}\left(b-\frac{3}{4}n\right)\times 0=0$

에서 $a=0$

또한 $\lim\limits_{x\to \frac{8}{3}-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{8}{3}-}\frac{3}{8}\left(b-\frac{3}{4}n\right)x=b-\frac{3}{4}n$

$\lim\limits_{x\to \frac{8}{3}+} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{8}{3}+}(3x-8)=0$

$f\left(\frac{8}{3}\right)=0$에서 $b-\frac{3}{4}n=0$, 즉

$b=\frac{3}{4}n$ (n은 자연수)

그러므로 $a+b=\frac{3}{4}n$ (n은 자연수)이고

$0<\frac{3}{4}n<10$에서 $0<n<\frac{40}{3}<14$이므로

$a+b=b=\frac{3}{4},\ \frac{6}{4},\ \frac{9}{4},\ \cdots,\ \frac{39}{4}$

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수 $p=13$이고 모든 실수 b의 값의 합은 첫째항이 $\frac{3}{4}$이고 공차가 $\frac{3}{4}$인 등차수열의 제1항부터 제13항까지의 합이므로

$$q=\frac{13\left(\frac{3}{4}+\frac{39}{4}\right)}{2}=\frac{273}{4}$$

따라서 $q-p=\frac{273}{4}-13=\frac{221}{4}$

답 ①

30

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)$

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=1$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)>0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\{f(x)\}^2&=\lim_{x\to 2}\{f(x)\times f(x)\}\\&=\lim_{x\to 2}f(x)\times\lim_{x\to 2}f(x)\\&=\{f(2)\}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-g(x)}{x^2+2f(x)+g(x)}&=\frac{\lim\limits_{x\to 2}[\{f(x)\}^2-g(x)]}{\lim\limits_{x\to 2}\{x^2+2f(x)+g(x)\}}\\&=\frac{\{f(2)\}^2-1}{2^2+2f(2)+1}=3\end{aligned}$$

에서 $\{f(2)\}^2-6f(2)-16=0$

$\{f(2)+2\}\{f(2)-8\}=0$

$f(2)>0$이므로 $f(2)=8$

따라서 $f(2)+\lim\limits_{x\to 2}g(x)=8+1=9$

답 ③

31

함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to -1-}\{(x^2+ax-1)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to -1-}\{x^2+(a+2)x\}\\&=-a-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1+}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to -1+}\{(x+b)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to -1+}(3x+b+1)\\&=b-2\end{aligned}$$

$f(-1)+g(-1)=-a-1$

이므로 $-a-1=b-2$

$a+b=1$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to 1-}\{(x+b)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to 1-}(3x+b+1)\\&=b+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to 1+}\{(x^2+ax-1)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to 1+}\{x^2+(a+2)x\}\\&=a+3\end{aligned}$$

$f(1)+g(1)=a+3$

이므로 $a+3=b+4$

$a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=0$

따라서 $3a+2b=3+0=3$

답 ③

32

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1+} g(x)=g(1)$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-} g(x)&=\lim_{x\to1-} (x^2+a)f(x)\\&=\lim_{x\to1-} (x^2+a)\times\lim_{x\to1-} f(x)\\&=(1+a)\times0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+} g(x)&=\lim_{x\to1+} (x^2+a)f(x)\\&=\lim_{x\to1+} (x^2+a)\times\lim_{x\to1+} f(x)\\&=(1+a)\times2=2a+2\end{aligned}$$

$g(1)=(1+a)f(1)=(1+a)\times0=0$

따라서 $2a+2=0$에서 $a=-1$

답 ②

33

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이고 함수 $g_1(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g_1(x)$가 $x=-1$에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

$\lim_{x\to-1-} f(x)g_1(x)=(-1)\times1=-1$

$\lim_{x\to-1+} f(x)g_1(x)=1\times(-1)=-1$

$f(-1)g_1(-1)=0\times0=0$

이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)g_1(x)\neq f(-1)g_1(-1)$

따라서 함수 $f(x)g_1(x)$는 구간 $(-2, 2)$에서 연속이 아니다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이고 함수 $g_2(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 함수 $f(x)g_2(x)$가 $x=-1$에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

$\lim_{x\to-1-} f(x)g_2(x)=(-1)\times0=0$

$\lim_{x\to-1+} f(x)g_2(x)=1\times0=0$

$f(-1)g_2(-1)=0\times0=0$

이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)g_2(x)=f(-1)g_2(-1)$이 되어

함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g_2(x)$는 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이고 함수 $g_3(x)$가 $x=-1$, 1에서 불연속이므로 함수 $f(x)g_3(x)$가 $x=-1$, 1에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

$\lim_{x\to-1-} f(x)g_3(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)g_3(x)=0$

$f(-1)g_3(-1)=0\times1=0$

이므로 함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-} f(x)g_3(x)=\lim_{x\to1+} f(x)g_3(x)=0$

$f(1)g_3(1)=1\times1=1$

이므로 $\lim_{x\to1} f(x)g_3(x)\neq f(1)g_3(1)$

따라서 함수 $f(x)g_3(x)$는 구간 $(-2, 2)$에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $f(x)g_k(x)$가 구간 $(-2, 2)$에서 연속인 것은 ㄴ이다.

답 ②

34

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이고 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(1)}{f(1)}$이어야 한다.

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{x+2a}{-x+3}=\frac{2a+1}{2}$

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{-x-1}{x^2+ax+4}=\frac{-2}{a+5}$

$\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{-2}{a+5}$

즉, $\frac{2a+1}{2}=\frac{-2}{a+5}$

$(2a+1)(a+5)=-4$

$2a^2+11a+9=0$, $(a+1)(2a+9)=0$

이므로

$a=-1$ 또는 $a=-\frac{9}{2}$

(i) $a=-1$일 때

$f(x)>0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ii) $a=-\frac{9}{2}$일 때

$x\geq1$에서 $f(x)=x^2-\frac{9}{2}x+4=0$인 실수 x가 존재하므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 연속이 아니다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

답 ④

35

조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1+} g(x)=g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-} f(x)=4$

$x\to1-$일 때, $x+1\to2-$이고 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x+1)=\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=k$에서

$\lim_{x\to1-}\{(k+1)f(x+1)\}=k(k+1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-} g(x)&=\lim_{x\to1-}\{f(x)+(k+1)f(x+1)\}\\&=\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to1-}\{(k+1)f(x+1)\}\\&=4+k(k+1)=k^2+k+4 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$x\to1+$일 때, $f(x)=f(x+2)$이므로 $x\to-1+$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)=-1+k$

$x\to1+$일 때, $x+1\to2+$이고 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x+1)=\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=3$

$\lim_{x\to1+}\{(k+1)f(x+1)\}=3(k+1)$이므로

$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}\{f(x)+(k+1)f(x+1)\}$

$=\lim_{x\to 1+} f(x)+\lim_{x\to 1+}\{(k+1)f(x+1)\}$

$=-1+k+3(k+1)=4k+2$ …… ㉡

$g(1)=f(1)+(k+1)f(2)$

$=f(-1)+(k+1)f(0)=4k+2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k^2+k+4=4k+2$이어야 하므로

$k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$

$k=1$ 또는 $k=2$

조건 (가)에서 $f(-1)=-1+k>0$이므로 $k=2$

따라서 $-1\le x<0$일 때, $f(x)=x+2$이므로

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}+2=\frac{5}{3}$

답 ②

36

이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)$이므로

$a(a-3)<0$, 즉 $0<a<3$일 때

$f(a)=0$

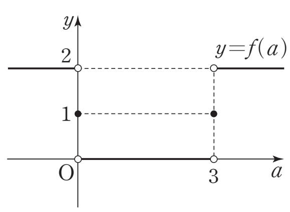
$a(a-3)=0$, 즉 $a=0$ 또는 $a=3$일 때

$f(a)=1$

$a(a-3)>0$, 즉 $a<0$ 또는 $a>3$일 때

$f(a)=2$

따라서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $\frac{1}{2}g(a)-8$이 $a=3$에서 연속이므로

$\lim_{a\to 3}\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}=\frac{1}{2}g(3)-8$이다.

함수 $f(a)\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}$이 $a=3$에서 연속이므로

$\lim_{a\to 3-} f(a)\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}=0\times\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=0$

$\lim_{a\to 3+} f(a)\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}=2\times\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=g(3)-16$

$f(3)\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=1\times\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=\frac{1}{2}g(3)-8$

에서 $g(3)-16=0=\frac{1}{2}g(3)-8$

따라서 $g(3)=16$

답 16

37

$f(x)=x^3+ax+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 삼차방정식 $f(x)=0$은 세 열린구간 $(-2,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 하나씩 실근을 가져야 한다.

$f(-1)f(-2)=-a(-2a-7)<0$, $a(2a+7)<0$에서

$-\frac{7}{2}<a<0$ …… ㉠

이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ -1)$에서 실근을 갖는다.

마찬가지로 $f(0)f(1)=a+2<0$에서

$a<-2$ …… ㉡

마찬가지로 $f(1)f(2)=(a+2)(2a+9)<0$에서

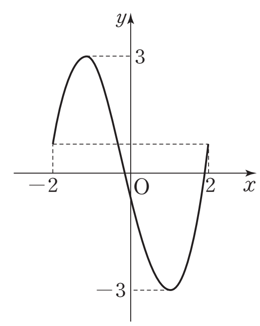
$-\frac{9}{2}<a<-2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{7}{2}<a<-2$이므로 구하는 정수 a는 -3이다.

답 ③

38

조건 (가)에 의하여 $-2\le x\le 2$에서 $f(x)=3$과 $f(x)=-3$을 만족시키는 x가 각각 오직 한 개씩 있고 조건 (나)에 의하여 $f(x)=f(x+4)$이므로 3과 -3은 이 구간에서 각각 최댓값과 최솟값이고 이 구간에서 그래프의 개형의 예를 들면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$이므로 $f(-2)=f(2)$이다. (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$이고 $-12\le x\le 12$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 3, -3이므로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다. (참)

ㄷ. $-2\le x\le 2$일 때, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 2개 존재한다. $f(x)=f(x+4)$이므로 $-12\le x\le 12$에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 12개 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 다항함수의 미분법

정답 본문 61~73쪽

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ③	07 ③	08 11	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ③	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ③	20 ④
21 ②	22 ④	23 ③	24 ④	25 ⑤
26 ⑤	27 689	28 121	29 ③	30 ①
31 ②	32 2	33 ④	34 ③	35 ⑤
36 ②	37 ⑤	38 ③	39 ①	40 ⑤
41 6				

01

$f'(1)=3$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$$
$$=2f'(1)+f'(1)$$
$$=3f'(1)$$
$$=3\times3=9$$

답 ⑤

02

$\lim_{h\to0}\frac{f(4+3h)-5}{h}=2$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
또한 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $x=4$에서 연속이다. 그러므로
$\lim_{h\to0}\{f(4+3h)-5\}=0$에서 $f(4)=5$
따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+3h)-5}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(4+3h)-f(4)}{3h}\times3\right\}$$
$$=3f'(4)=2$$

에서 $f'(4)=\frac{2}{3}$이므로

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-5}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x^2-16}$$
$$=\lim_{x\to4}\left\{\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\times\frac{1}{x+4}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}f'(4)=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

답 ①

03

함수 $f(x)$가 다항함수이므로 $x=2$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $f(2)=4$

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}=6$에서 $h\to0$일 때
(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
또한 함수 $g(x)$가 다항함수이므로 $x=2$에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{h\to0}\{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)\}$$
$$=\lim_{h\to0}[f(2+h)\{g(2+3h)-g'(2)\}]$$
$$=4\lim_{h\to0}\{g(2+3h)-g'(2)\}$$
$$=4\{\lim_{h\to0}g(2+3h)-\lim_{h\to0}g'(2)\}$$
$$=4\{g(2)-g'(2)\}$$
$$=0$$

에서 $g(2)=g'(2)$
따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)\{g(2+3h)-g(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}f(2+h)\times\lim_{h\to0}\left\{\frac{g(2+3h)-g(2)}{3h}\times3\right\}$$
$$=f(2)\times g'(2)\times3$$
$$=12g'(2)=6$$

이므로 $g'(2)=\frac{1}{2}$

답 ⑤

04

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2(x-2) & (x<2)\\ x^2+ax+b & (x\ge2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$$
$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x+2)^2(x-2)=0$$
$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+ax+b)=4+2a+b$$
$$f(2)=4+2a+b$$

에서 $4+2a+b=0$
즉, $b=-2(a+2)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x+2)^2(x-2)-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}(x+2)^2=16$$
$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax+b-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}(x+a+2)=a+4$$

이므로

$a+4=16$

$a=12$

㉠에서 $b=-28$이므로

$a+b=12+(-28)=-16$

답 ③

05

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x)+b & (x<2) \\ x^3+ax & (x\ge 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} \{a(1-x)+b\}=-a+b$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (x^3+ax)=8+2a$

$f(2)=8+2a$에서

$-a+b=8+2a$

$b=3a+8$ ...... ㉠

또한 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-} \frac{\{a(1-x)+b\}-(8+2a)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-} \frac{\{a(1-x)+3a+8\}-(8+2a)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-} \frac{a(2-x)}{x-2}$

$=-a$

$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+} \frac{(x^3+ax)-(8+2a)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+} \frac{(x^3-8)+a(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)+a(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+} (x^2+2x+4+a)=12+a$

에서 $-a=12+a$

$a=-6$

㉠에서 $b=-10$이므로

$a-b=-6-(-10)=4$

답 ④

06

$$g(x)=\begin{cases} 4 & (x\le 1) \\ f(x) & (1<x\le k) \\ c & (x>k) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, $x=1$, $x=k$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)$, $\lim_{x\to k} g(x)=g(k)$

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(1)=4$, $f(k)=c$

즉, $1+a+b=4$, $k^3+ak^2+bk=c$ ...... ㉠

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$, $x=k$에서도 미분가능하다.

$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{4-4}{x-1}=0$

$\lim_{x\to 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-4}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+} \frac{(x^3+ax^2+bx)-(1+a+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+} \{x^2+(a+1)x+a+b+1\}$

$=\lim_{x\to 1+} \{x^2+(a+1)x+4\}$

$=a+6$

$a+6=0$에서

$a=-6$

㉠에서 $b=9$

즉, $f(x)=x^3-6x^2+9x$이고

$\lim_{x\to k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-} \frac{f(x)-f(k)}{x-k}$

$=\lim_{x\to k-} \frac{(x^3-6x^2+9x)-(k^3-6k^2+9k)}{x-k}$

$=\lim_{x\to k-} \frac{(x-k)\{x^2+(k-6)x+k^2-6k+9\}}{x-k}$

$=\lim_{x\to k-} \{x^2+(k-6)x+k^2-6k+9\}$

$=3k^2-12k+9$

$\lim_{x\to k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+} \frac{c-f(k)}{x-k}$

$=\lim_{x\to k+} \frac{0}{x-k}$

$=0$

이므로

$3k^2-12k+9=0$에서

$3(k-1)(k-3)=0$

$k>1$이므로 $k=3$

$f(3)=3^3-6\times 3^2+9\times 3=0$

그러므로 $c=0$

따라서 $a-b+c-k=-6-9+0-3=-18$

답 ③

07

$f(x)=(x^3+2x)(x^2-x+1)$에서

$f'(x)=(3x^2+2)(x^2-x+1)+(x^3+2x)(2x-1)$이므로

$f'(1)=5\times 1+3\times 1=8$

답 ③

08

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+3=0$에서 $f(0)=-3$

즉, $b=-3$

$f(x)=x^3+ax^2+a^2x-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+ax^2+a^2x}{x(3x^2+2ax+a^2)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+a^2}{(3x^2+2ax+a^2)^2}$$

이때 $a=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2}$$

에서 $a^2=2$

따라서 $a^2+b^2=2+(-3)^2=2+9=11$

답 11

다른 풀이

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+3=0$에서 $f(0)=-3$

즉, $b=-3$

$f(x)=x^3+ax^2+a^2x-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{1}{(3x^2+2ax+a^2)^2}\right\}$$

이때 $a=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{(3x^2+2ax+a^2)^2}$$
$$=\frac{f'(0)}{a^4}=\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2}$$

에서 $a^2=2$

따라서 $a^2+b^2=2+(-3)^2=2+9=11$

09

조건 (가)에서 $f(1)-g(1)=0$, $f'(1)-g'(1)=0$이므로

삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 $x=1$을 중근으로 갖는다.

다른 한 근을 k라 하면

$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-k)$ …… ㉠

조건 (나)에서 $g'(1)=-g'(3)$이므로 이차함수 $g(x)$의 그래프에서 축의 방정식은

$x=\frac{1+3}{2}=2$

그러므로 상수 a, b에 대하여

$g(x)=a(x-2)^2+b=a(x^2-4x+4)+b$

로 놓을 수 있다.

$g'(x)=a(2x-4)$

$g'(1)=-2a=4$

이므로

$a=-2$

$g(x)=-2(x-2)^2+b$

㉠에서

$f(x)=(x-1)^2(x-k)+g(x)$

이므로

$$f(x)=(x-1)^2(x-k)-2(x-2)^2+b$$
$$=(x^2-2x+1)(x-k)-2(x^2-4x+4)+b$$

$f'(x)=(2x-2)(x-k)+(x^2-2x+1)-2(2x-4)$

$f'(-1)=4k+20=8$

$k=-3$

$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+3)$

따라서 $f(2)-g(2)=5$

답 ③

참고

① '다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이면 $f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$로 나타낼 수 있다.'

다항식 $f(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b$이고

$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$

$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$에서

$a\alpha+b=0$, $a=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=0$이므로

$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$

로 나타낼 수 있다.

② '이차함수 $g(x)$에 대하여 $g'(\alpha)=-g'(\beta)$이면 이차함수 $g(x)$의 그래프에서 축의 방정식은 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.'

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$g'(x)=2ax+b$

$g'(\alpha)=-g'(\beta)$에서

$g'(\alpha)+g'(\beta)=0$

$2a(\alpha+\beta)+2b=0$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

한편, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프에서 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$로

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{\alpha+\beta}{2}$

가 성립한다.

10

$f(x)=x^3+3x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+3$

이때 $f'(1)=6$이므로 점 $(1, 3)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{6}(x-1)$

이 직선이 점 $(a,\ 1)$을 지나므로

$1-3=-\frac{1}{6}(a-1)$

$a-1=12$

따라서 $a=13$

답 ③

11

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)=(x^2-1)(x-a)$에서

$f'(x)=2x(x-a)+x^2-1$

$f'(1)=2(1-a)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2(1-a)(x-1)$

이 직선이 점 $(3,\ f(3))$을 지나므로

$f(3)=2(1-a)\times(3-1)=4(1-a)$

한편, $f(3)=4\times2\times(3-a)=24-8a$이므로

$4(1-a)=24-8a$

$1-a=6-2a$

따라서 $a=5$

답 ⑤

12

$f(x)=x^3+3x-2$에서 $f'(x)=3x^2+3$

$g(x)=x^2+ax+b$에서 $g'(x)=2x+a$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$에서 만나므로 $g(1)=f(1)$에서

$1+a+b=2$

$a+b=1$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$에서의 접선이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 일치하므로

$g'(1)=f'(1)$에서

$2+a=6$

$a=4$

㉠에서 $b=-3$

따라서 $g(x)=x^2+4x-3$이므로

$g(-1)=1-4-3=-6$

답 ②

13

$f(x)=x^2+2x+2$라 하면 $f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2+2\alpha+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=2\alpha+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=(2\alpha+2)(x-\alpha)$

$y=2(\alpha+1)x-\alpha^2+2$ …… ㉠

같은 방법으로 점 $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2+2\beta+2)$에서의 접선의 방정식은

$y=2(\beta+1)x-\beta^2+2$ …… ㉡

두 접선은 모두 점 $\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$를 지나므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{1}{2}a=2(\alpha+1)a-\alpha^2+2$, $\frac{1}{2}a=2(\beta+1)a-\beta^2+2$

즉, α, β는 t에 대한 이차방정식 $\frac{1}{2}a=2(t+1)a-t^2+2$의 근이다.

$t^2-2at-\frac{3}{2}a-2=0$

에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-\frac{3}{2}a-2$ …… ㉢

이때 직선 AB의 방정식은

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=\frac{(\beta^2+2\beta+2)-(\alpha^2+2\alpha+2)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=\frac{(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=(\beta+\alpha+2)(x-\alpha)$

$y=(\alpha+\beta+2)x-\alpha\beta+2$

㉢에서 $y=(2a+2)x+\frac{3}{2}a+4=a\left(2x+\frac{3}{2}\right)+2x+4$

이므로 직선 AB는 a의 값에 관계없이 항상 점 $\left(-\frac{3}{4},\ \frac{5}{2}\right)$를 지난다.

따라서 $p=-\frac{3}{4}$, $q=\frac{5}{2}$이므로 $p+q=-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{7}{4}$

답 ③

14

$f(x)=x^3+3x$에서 $f(0)=0$, $f(3)=36$이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{36-0}{3-0}=12$

$f'(x)=3x^2+3$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}(c,\ f(c))$ $(0<c<3)$에서의 접선의 기울기가 12이므로

$f'(c)=3c^2+3=12$에서 $c=\sqrt{3}$이고

$f(\sqrt{3})=6\sqrt{3}$

그러므로 접선 l의 방정식은

$y-6\sqrt{3}=12(x-\sqrt{3})$

$y=12x-6\sqrt{3}$

직선 l이 곡선 $y=-x^2+6x+k$와 서로 다른 두 점 D, E에서 만나므로

$-x^2+6x+k=12x-6\sqrt{3}$

$x^2+6x-6\sqrt{3}-k=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=3^2-(-6\sqrt{3}-k)>0$

$k>-9-6\sqrt{3}$ …… ㉡

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-6\sqrt{3}-k$

직선 AB와 직선 DE가 서로 평행하고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}$이므로

$|\beta-\alpha|=|3-0|=3$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-6)^2-4\times(-6\sqrt{3}-k)=9$

$4k=-27-24\sqrt{3}$

$k=-\frac{27}{4}-6\sqrt{3}$

으로 ㉡의 조건을 만족시킨다.

따라서 $p=-\frac{27}{4}$, $q=-6$이므로

$p-q=-\frac{27}{4}-(-6)=-\frac{3}{4}$

답 ③

15

함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.
삼차함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 한다.
즉, '모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$' 또는 '모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$'이어야 한다.
$f(x)=x^3-12x^2+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2-24x+a$로 함수 $f'(x)$의 이차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$인 경우는 존재하지 않는다.
그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2-24x+a\ge 0$이 성립하려면 이차방정식 $3x^2-24x+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=12^2-3a\le 0$

$a\ge 48$

따라서 실수 a의 최솟값은 48이다.

답 ④

16

$f(x)=x^3+kx^2+3$에서

$f'(x)=3x^2+2kx=x(3x+2k)$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(1, 4)$에서 감소하려면 $1<x<4$일 때 $f'(x)\le 0$이 성립해야 한다.
즉, $f'(1)\le 0$, $f'(4)\le 0$

$f'(1)=3+2k\le 0$에서 $k\le -\frac{3}{2}$

$f'(4)=48+8k\le 0$에서 $k\le -6$

두 부등식을 동시에 만족시켜야 하므로

$k\le -6$

따라서 실수 k의 최댓값은 -6이다.

답 ①

17

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $f(0)=f'(1)$이므로

$c=3+2a+b$ …… ㉠

조건 (나)에서 $f'(x)$는 $x=1$일 때 최솟값을 가지므로 함수 $y=3x^2+2ax+b$의 그래프의 축이 직선 $x=1$이다. 즉,

$-\frac{a}{3}=1$에서 $a=-3$ …… ㉡

조건 (다)에서 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}\le 0$이므로
$x_1>x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이고 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\ge f(x_2)$이다.
즉, 열린구간 $(-1, 2)$에서 함수 $f(x)$는 감소해야 한다.
그러므로 열린구간 $(-1, 2)$에서 $f'(x)\le 0$이 성립해야 한다.
함수 $f'(x)=3x^2+2ax+b$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고, 이차항의 계수가 양수이므로, 열린구간 $(-1, 2)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<f'(-1)$이다. $f'(-1)\le 0$이면 열린구간 $(-1, 2)$에서 항상 $f'(x)\le 0$이 성립한다.

$f'(-1)=3-2a+b\le 0$

$b\le 2a-3$

㉡을 대입하면

$b\le -9$ …… ㉢

㉠, ㉡에서

$f(x)=x^3-3x^2+bx+b-3$

그러므로

$f(3)=27-27+3b+b-3=4b-3$

이때 ㉢에서 $b\le -9$이므로

$f(3)\le -36-3=-39$

따라서 $f(3)$의 최댓값은 -39이다.

답 ⑤

18

$f(x)=x^3+3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=1+3-9+a=-2$에서

$a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+3$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값 $f(-3)$은

$f(-3)=-27+27+27+3=30$

답 ⑤

19

$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x^2+x-2)$
$\qquad=4x(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=-2$와 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(-2)=a-\frac{32}{3}$, $f(0)=a$, $f(1)=a-\frac{5}{3}$

이고 모든 극값의 합이 $\frac{2}{3}$이므로

$3a-\frac{37}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 $a=\frac{13}{3}$

답 ③

20

$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-3a)x+1$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a^2-3a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2-2ax+a^2-3a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-3a)>0$

$-2a^2+9a>0$

$2a\left(a-\frac{9}{2}\right)<0$

$0<a<\frac{9}{2}$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4로 개수는 4이다.

답 ④

21

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-f'(-x)$이므로

$4x^3+3ax^2+2bx+c=-4(-x)^3-3a(-x)^2-2b(-x)-c$

$6ax^2+2c=0$에서 $a=0$, $c=0$이므로

$f(x)=x^4+bx^2+d$

$f'(x)=4x^3+2bx$

조건 (나)에서 $x=2$일 때 극솟값을 가지므로

$f'(2)=0$

$32+4b=0$에서 $b=-8$

$f(x)=x^4-8x^2+d$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)$

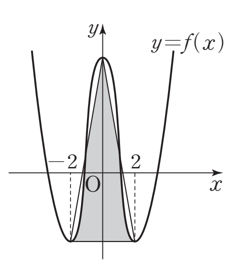
$\quad=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=-2$와 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.



[$d>0$, $f(2)<0$인 경우]

이때 $f(0)-f(2)=d-(16-32+d)=16$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{2-(-2)\}\times 16=32$

답 ②

22

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x>0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 연속함수이다.

조건 (가)에서 $f(1)=f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-2x+1)(x^2+ax+b)$

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x-1)^2(2x+a)$

$\quad=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x+2b-a\}$

조건 (나)에서 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않으며 $k\neq 0$이므로 함수 $|g(x)-3|$은 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $|g(x)-3|$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이므로 $x=0$에서 미분가능하려면 $f'(0)=0$이어야 한다.

$f'(0)=-2b+a=0$에서

$a=2b$

그러므로

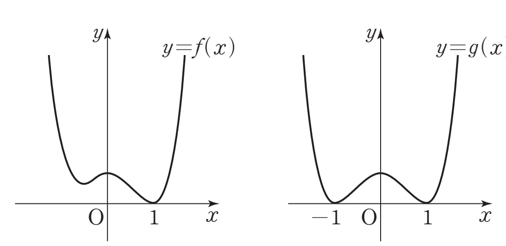
$f'(x)=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x\}$

$\quad=4x(x-1)\left(x-\frac{2-3a}{4}\right)$

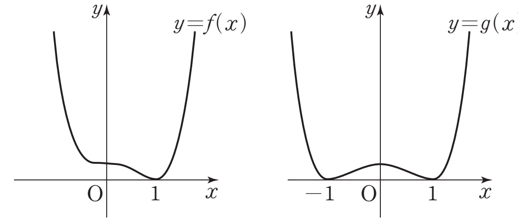
조건 (다)에서 열린구간 $(0, 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이므로 함수 $y=f(x)$는 열린구간 $(0, 1)$에서 항상 증가하거나 항상 감소한다. 즉, 극값을 갖지 않는다.

따라서 $\frac{2-3a}{4}\leq 0$ 또는 $\frac{2-3a}{4}\geq 1$

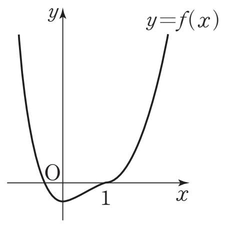
(i) $a>\frac{2}{3}$일 때

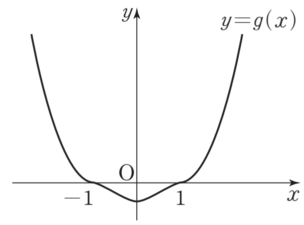


(ii) $a=\frac{2}{3}$일 때

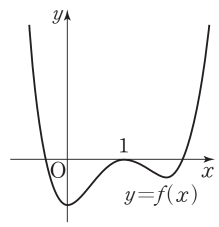


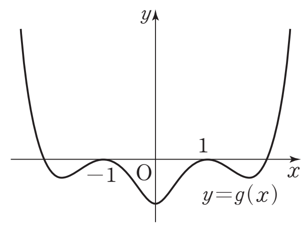
(iii) $a=-\frac{2}{3}$일 때





(iv) $a<-\frac{2}{3}$일 때





ㄱ. $f(0)>0$이면 (i), (ii)의 경우로 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. (iii)의 경우 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii), (iii), (iv)에서 조건 (나)를 항상 만족시키려면

$f(0)=b\leq 3$

따라서 $f(2)=4+2a+b=4+4b+b=5b+4\leq 19$로 $f(2)$의 최댓값은 19이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

23

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-20$	↗	a	↘	$a-4$	↗	a

$f(-2)=-8-12+a=a-20$

$f(0)=a$

$f(2)=8-12+a=a-4$

$f(3)=27-27+a=a$

이고 $a-4>a-20$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 $a-20$을 갖고, $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최댓값 a를 갖는다.

따라서 $m=a-20$, $M=a$이므로

$M+m=12$에서

$a+(a-20)=12$

$a=16$

답 ③

24

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=0$에서 x축에 접하고, $x=3$에서 x축과 만나므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-4, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-4, 4]$에서 $x=3$일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다.

답 ④

25

$f(x)=ax^3-3ax^2-1$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

a가 양수이므로 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이다.

$f(2)=8a-12a-1=-4a-1=-5$이므로

$4a=4$, $a=1$

$f(x)=x^3-3x^2-1$

이때 $f(1)=1-3-1=-3$, $f(4)=64-48-1=15$이므로

함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 15를 갖는다.

따라서 $M=15$

답 ⑤

26

$y=8^x-3\times 2^x+5=2^{3x}-3\times 2^x+5$

$2^x=t$로 치환하면 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $\frac{1}{4}\leq t\leq 4$

$f(t)=t^3-3t+5$로 놓으면 구하는 값은 닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값과 최솟값의 합이다.

$f'(t)=3t^2-3=3(t^2-1)=3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	극소	↗	

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}-\frac{3}{4}+5=\frac{273}{64}$

$f(1)=1-3+5=3$

$f(4)=64-12+5=57$

이므로 함수 $f(t)$는 $t=4$일 때 최댓값 57, $t=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$57+3=60$

답 ⑤

27

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-2$에서 x축에 접하고, 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 6)$을 지나므로

$f(x)=a(x+2)^2(x-3)$ (a는 상수)

$f(0)=6$이므로 $a\times4\times(-3)=6$

에서 $a=-\frac{1}{2}$

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2(x-3)$

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\times(3-t)\times\left\{-\frac{1}{2}(t+2)^2(t-3)\right\}\\&=\frac{1}{4}(t-3)^2(t+2)^2\\&=\frac{1}{4}(t^2-6t+9)(t^2+4t+4)\ (-2<t<3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S'(t)&=\frac{1}{4}(2t-6)(t+2)^2+\frac{1}{4}(t-3)^2(2t+4)\\&=\frac{1}{4}(t-3)(t+2)\{2(t+2)+2(t-3)\}\\&=\frac{1}{2}(t-3)(t+2)(2t-1)\ (-2<t<3)\end{aligned}$$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$

$-2<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(-2)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

함수 $S(t)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$\begin{aligned}S\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}-3\right)^2\times\left(\frac{1}{2}+2\right)^2\\&=\frac{1}{4}\times\frac{25}{4}\times\frac{25}{4}=\frac{625}{64}\end{aligned}$$

따라서 $p=64$, $q=625$이므로

$p+q=64+625=689$

답 689

28

$f(x)=2x^3-ax$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고

$f'(x)=6x^2-a$

(ⅰ) $a\le0$이면 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 최솟값은 $f(-1)$이다.

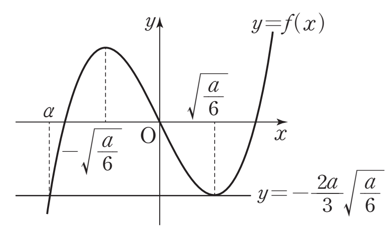
$f(-1)=-2+a=-\frac{32}{27}$

에서 $a=\frac{22}{27}$이므로 $a\le0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a>0$이면 $f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{\frac{a}{6}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$이고 극솟값 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$를 갖는다.

$$\begin{aligned}f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)&=2\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^3-a\times\sqrt{\frac{a}{6}}\\&=\sqrt{\frac{a}{6}}\times\left(\frac{a}{3}-a\right)=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}\end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$는 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$에서 접하므로 $f(x)-f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=2\left(x-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2(x-\alpha)$ (α는 상수)



$2x^3-ax+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}=2\left(x-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2(x-\alpha)$

에서 양변을 전개하여 이차항의 계수를 비교하면

$\alpha+2\sqrt{\frac{a}{6}}=0$

$\alpha=-2\sqrt{\frac{a}{6}}$

$2x^3-ax+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}=2\left(x-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2\left(x+2\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$

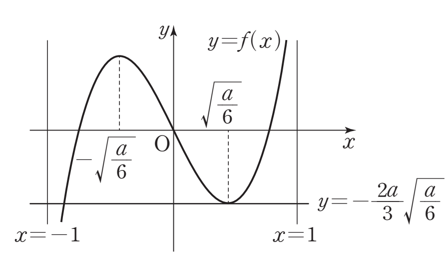
이때 $-2\sqrt{\frac{a}{6}}=-1$인 경우 $a=\frac{3}{2}$

$\sqrt{\frac{a}{6}}=1$인 경우 $a=6$이다.

(가) $\sqrt{\frac{a}{6}}<1$, 즉 $0<a<6$인 경우

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 최솟값은 $f(-1)$ 또는 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$이다.

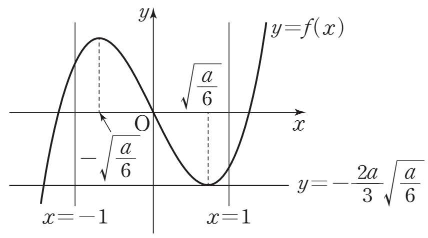
① $0<a\le\frac{3}{2}$인 경우



닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 최솟값은 $f(-1)$이다.

$f(-1)=-2+a=-\frac{32}{27}$에서 $a=\frac{22}{27}$이므로 $0<a\le\frac{3}{2}$을 만족시킨다.

② $\frac{3}{2}<a<6$인 경우



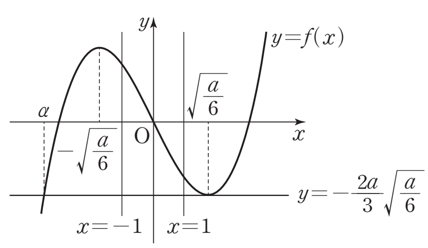
닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값은 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$이다.

$-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}=-\frac{32}{27}$에서

$a^3=\left(\frac{8}{3}\right)^3$

$a=\frac{8}{3}$이고 $\frac{3}{2}<a<6$을 만족시킨다.

(나) $\sqrt{\frac{a}{6}}\ge 1$, 즉 $a\ge 6$인 경우



닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값은 $f(1)$이다.

$f(1)=2-a=-\frac{32}{27}$

$a=\frac{86}{27}$으로 $a\ge 6$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{22}{27}$ 또는 $a=\frac{8}{3}$

그러므로 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{22}{27}+\frac{8}{3}=\frac{22+72}{27}=\frac{94}{27}$

따라서 $p=27$, $q=94$이므로

$p+q=27+94=121$

답 121

29

$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+16a^2$에서

$f'(x)=6x^2+6(a-2)x-12a=6\{x^2+(a-2)x-2a\}$

$=6(x-2)(x+a)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-a$

ㄱ. $a=1$일 때, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이면서 최대이다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+16$에서 최댓값은

$f(-1)=-2-3+12+16=23$이다.

따라서 $g(1)=23$이다. (참)

ㄴ. (i) $a\le -2$일 때

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(2)=16+12(a-2)-24a+16a^2$

$=16a^2-12a-8$

이므로

$g(a)=16a^2-12a-8$

(ii) $a>-2$일 때

① $-2<a\le 2$이면 함수 $f(x)$는 $x=-a$일 때 극대이면서 최대이다.

$f(-a)=-2a^3+3(a-2)a^2+12a^2+16a^2$

$=a^3+22a^2$

이므로

$g(a)=a^3+22a^2$

② $a>2$이면 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(-2)=-16+12(a-2)+24a+16a^2$

$=16a^2+36a-40$

이므로

$g(a)=16a^2+36a-40$

(i), (ii)에서

$$g(a)=\begin{cases} 16a^2-12a-8 & (a\le -2) \\ a^3+22a^2 & (-2<a\le 2) \\ 16a^2+36a-40 & (a>2) \end{cases}$$

함수 $g(a)$는 $a=-2$와 $a=2$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\lim_{a\to -2-} g(a)=16\times(-2)^2-12\times(-2)-8=80$

$\lim_{a\to -2+} g(a)=(-2)^3+22\times(-2)^2=80$

$g(-2)=16\times(-2)^2-12\times(-2)-8=80$

으로 $\lim_{a\to -2} g(a)=g(-2)$를 만족시키므로 함수 $g(a)$는 $a=-2$에서 연속이다.

$$\lim_{a\to -2-}\frac{g(a)-g(-2)}{a-(-2)}=\lim_{a\to -2-}\frac{(16a^2-12a-8)-80}{a+2}$$

$$=\lim_{a\to -2-}\frac{4(a+2)(4a-11)}{a+2}$$

$$=\lim_{a\to -2-}4(4a-11)$$

$$=-76$$

$$\lim_{a\to -2+}\frac{g(a)-g(-2)}{a-(-2)}=\lim_{a\to -2+}\frac{(a^3+22a^2)-80}{a+2}$$

$$=\lim_{a\to -2+}\frac{(a+2)(a^2+20a-40)}{a+2}$$

$$=\lim_{a\to -2+}(a^2+20a-40)$$

$$=-76$$

에서 $g'(-2)=-76$으로 함수 $g(a)$는 $a=-2$에서 미분가능하다.

$\lim_{a\to 2-} g(a)=2^3+22\times 2^2=96$

$\lim_{a\to 2+} g(a)=16\times 2^2+36\times 2-40=96$

$g(2)=2^3+22\times 2^2=96$

으로 $\lim_{a\to 2} g(a)=g(2)$를 만족시키므로 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 연속이다.

$$\lim_{a\to 2-}\frac{g(a)-g(2)}{a-2}=\lim_{a\to 2-}\frac{(a^3+22a^2)-96}{a-2}$$
$$=\lim_{a\to 2-}\frac{(a-2)(a^2+24a+48)}{a-2}$$
$$=\lim_{a\to 2-}(a^2+24a+48)$$
$$=100$$
$$\lim_{a\to 2+}\frac{g(a)-g(2)}{a-2}=\lim_{a\to 2+}\frac{(16a^2+36a-40)-96}{a-2}$$
$$=\lim_{a\to 2+}\frac{4(a-2)(4a+17)}{a-2}$$
$$=\lim_{a\to 2+}4(4a+17)$$
$$=100$$

에서 $g'(2)=100$으로 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(a)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $g'(a)=\begin{cases}32a-12 & (a\le -2)\\ 3a^2+44a & (-2<a\le 2)\\ 32a+36 & (a>2)\end{cases}$

$g'(a)=0$에서 $a=0$

함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$	$-$	-76	$-$	0	$+$	100	$+$
$g(a)$	↘		↘	극소	↗		↗

그러므로 함수 $g(a)$는 $a=0$에서 극솟값을 갖고, 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+a$라 하면

$f'(x)=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-3)=-9+9+9+a=a+9$

$f(1)=\frac{1}{3}+1-3+a=a-\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)>0$, $f(1)<0$

즉, $a+9>0$이고 $a-\frac{5}{3}<0$에서 $-9<a<\frac{5}{3}$

따라서 정수 a의 개수는

$1-(-9)=10$

답 ①

31

삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x-k=0$의 서로 다른 실근은 함수 $y=2x^3-3x^2-12x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x-2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

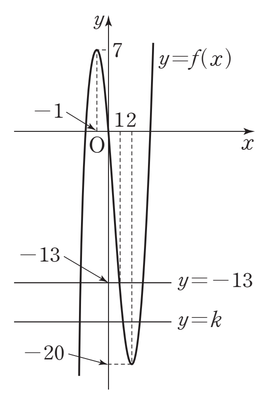
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=-2-3+12=7$

$f(2)=16-12-24=-20$

$f(1)=2-3-12=-13$

방정식 $f(x)=k$가 $\alpha<1<\beta<\gamma$인 세 실근 α, β, γ를 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 그림과 같아야 한다.



따라서 $-20<k<-13$이어야 하므로 정수 k의 개수는

$-13-(-20)-1=6$

답 ②

32

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-6a^2+9a-3)$이라 하면

$y'=3x^2-12x+9$에서

접선의 방정식은

$y=(3a^2-12a+9)(x-a)+a^3-6a^2+9a-3$

이 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k=(3a^2-12a+9)\times(-a)+a^3-6a^2+9a-3$

$=-2a^3+6a^2-3$

이때 함수 $f(k)$는 a에 대한 방정식 $-2a^3+6a^2-3=k$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$h(a)=-2a^3+6a^2-3$이라 하면

$h'(a)=-6a^2+12a=-6a(a-2)$

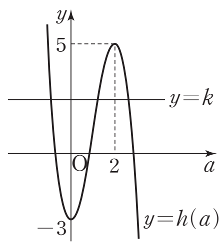
$h'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=2$

함수 $h(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	↘	-3	↗	5	↘

$h(0)=-3$, $h(2)=-16+24-3=5$

함수 $h(a)=-2a^3+6a^2-3$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 $f(k)$이다.



$$f(k)=\begin{cases} 1\ (k<-3 \text{ 또는 } k>5) \\ 2\ (k=-3 \text{ 또는 } k=5) \\ 3\ (-3<k<5) \end{cases}$$

그러므로 함수 $f(k)$는 $k=-3$과 $k=5$일 때 불연속이다.

따라서 $p+q=-3+5=2$

답 2

33

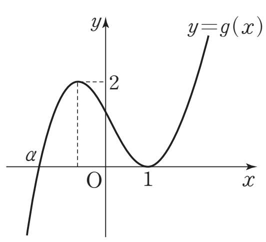
조건 (가)에서

$f(x)-(2x+1)=(x-1)^2(x-\alpha)$ (α는 상수) …… ㉠

조건 (나)에서 방정식 $f(x)-2x=3$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(x)-(2x+1)=2$에서 삼차함수 $y=f(x)-(2x+1)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g(x)=f(x)-(2x+1)$이라 하면 함수 $y=g(x)$는 2를 극값으로 갖는다.

㉠에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축에 접하므로 극솟값은 $x=1$일 때 0이고, 극댓값이 2, $\alpha<1$이다.



$g(x)=(x-1)^2(x-\alpha)=(x^2-2x+1)(x-\alpha)$

$g'(x)=(2x-2)(x-\alpha)+(x-1)^2=(x-1)(2x-2\alpha+x-1)$

$\quad=(x-1)(3x-2\alpha-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{2\alpha+1}{3}$

이때 $\dfrac{2\alpha+1}{3}<1$이고, $g\left(\dfrac{2\alpha+1}{3}\right)=2$이다.

$$g\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right)=\left(\frac{2\alpha+1}{3}-1\right)^2\left(\frac{2\alpha+1}{3}-\alpha\right)$$
$$=\left(\frac{2\alpha-2}{3}\right)^2\left(\frac{-\alpha+1}{3}\right)=2$$

$-\dfrac{4}{27}(\alpha-1)^3=2$에서 $(\alpha-1)^3=-\dfrac{27}{2}$

$g(x)=f(x)-(2x+1)$에서

$f(0)=g(0)+1=-\alpha+1$

따라서 $\{f(0)\}^3=(-\alpha+1)^3=-(\alpha-1)^3=\dfrac{27}{2}$

답 ④

34

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근 α, β, γ ($\alpha<\beta<\gamma$)를 갖는다.

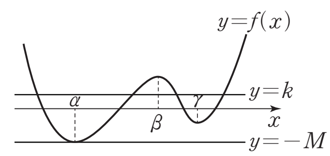
이때 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대, $x=\gamma$에서 극소이다.

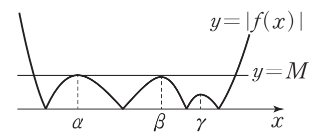
조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 $-k$는 함수 $f(x)$의 극값이다.

조건 (나)에서 $k>0$이므로 $-k<0$이고, 조건 (다)에서 $M\geq0$이므로 $-k\neq M$이다. 그러므로 $-k$는 함수 $f(x)$의 두 극솟값 중 큰 값과 같다. 이때 조건 (나)를 만족시키려면 $M>k$이어야 한다.

또한 조건 (다)를 만족시키려면 두 극솟값 중 작은 값은 $-M$이어야 한다.

$f(\alpha)=-M$, $f(\beta)=M$, $f(\gamma)=-k$인 경우 그래프는 그림과 같다.





ㄱ. $M>k>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 4개의 점에서 만난다. 그러므로 방정식 $f(x)-k=0$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $-M$은 함수 $f(x)$의 두 극솟값 중 작은 값이므로 방정식 $f(x)=-M$, 즉 $f(x)+M=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. $2M>M>0$이므로 방정식 $|f(x)|=2M$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

35

ㄱ. $f(x)=x^3-3x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 경우 함수 $f(x)$는 증가하는 함수로 방정식 $|f(x)-f(1)|=f(7)-f(1)$의 서로 다른 실근의 개수는 2로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha<\beta$)를 가지며 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $x=\alpha$에서 극댓값 $f(\alpha)$, $x=\beta$에서 극솟값 $f(\beta)$를 갖는다. 한편 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)$와 마찬가지로 $x=\alpha$에서 극댓값 $g(\alpha)$, $x=\beta$에서 극솟값 $g(\beta)$를 갖는다.

또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$이므로 $1-\alpha=\beta-1$이다.

$M=g(\alpha)=f(\alpha)-f(1)$

$\quad=(\alpha^3-3\alpha^2+a\alpha)-(1-3+a)$

$\quad=(\alpha^3-1)-3(\alpha^2-1)+a(\alpha-1)$

$\quad=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1-3\alpha-3+a)$

$\quad=(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-2+a)$

$m=g(\beta)=f(\beta)-f(1)$

$=(\beta-1)(\beta^2-2\beta-2+a)$

$=(\beta-1)\{(\beta-1)^2+a-3\}$

$=(1-\alpha)\{(1-\alpha)^2+a-3\}$

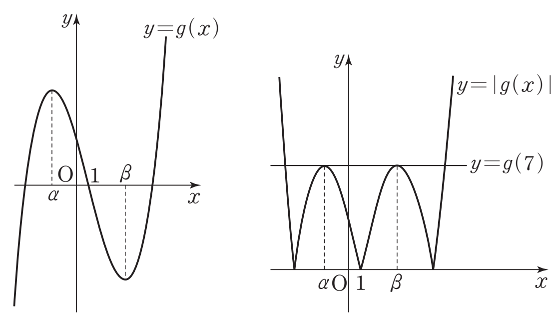
$=-(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-2+a)$

$m=-M$이므로

$M+m=0$ (참)

ㄴ. $g(1)=0$이고,

ㄱ에서 $|g(\alpha)|=|g(\beta)|$, $1-\alpha=\beta-1$이다.



방정식 $|g(x)|=g(7)$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

두 함수 $y=|g(x)|$, $y=g(7)$의 그래프는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 접한다.

함수 $g(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이고

$g(k)<0$일 때 $h(k)=0$

$g(k)=0$일 때 $h(k)=3$

$0<g(k)<g(7)$일 때 $h(k)=6$

$g(k)=g(7)$일 때 $h(k)=4$

$g(k)>g(7)$일 때 $h(k)=2$

그러므로 $\{h(k)|k$는 실수$\}=\{0, 2, 3, 4, 6\}$으로 원소의 개수는 5이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(7)$은 $x=\alpha$에서 접하고, $x=7$에서 만나므로

$g(x)-g(7)=(x-\alpha)^2(x-7)$

$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x-7)$

$g'(x)=2(x-\alpha)(x-7)+(x-\alpha)^2$ …… ㉠

$g'(\beta)=2(\beta-\alpha)(\beta-7)+(\beta-\alpha)^2=0$

$(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-14)=0$

$\alpha\neq\beta$이고, $\alpha+\beta=2$이므로

$\alpha-3\beta=-14$

$\alpha-3(2-\alpha)=-14$

$4\alpha=-8$

$\alpha=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$g'(x)=2(x+2)(x-7)+(x+2)^2$

$=3x^2-6x-24$

이므로

$g'(0)=-24$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$f(1)=2+3-12+a=a-7$

$x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 $f(1)>0$이면 조건을 만족시킨다.

즉, $a-7>0$에서 $a>7$

따라서 정수 a의 최솟값은 8이다.

답 ②

37

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$를 만족시키므로

$f(x)-g(x)\geq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x^4-3x^3+a)-(x^3-8x^2+16x+b)$

$=x^4-4x^3+8x^2-16x+a-b$

$h'(x)=4x^3-12x^2+16x-16$

$=4(x-2)(x^2-x+2)$

$h'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗

$h(2)=16-32+32-32+a-b$

$=a-b-16$

함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 $h(2)\geq 0$이면 조건을 만족시킨다.

즉, $a-b-16\geq 0$

$a-b\geq 16$

따라서 $a-b$의 최솟값은 16이다.

답 ⑤

38

$f(x)=(x-1)^3(x-3)=(x^3-3x^2+3x-1)(x-3)$에서

$f'(x)=(3x^2-6x+3)(x-3)+(x-1)^3$

$=3(x-1)^2(x-3)+(x-1)^3$

$=(x-1)^2(3x-9+x-1)$

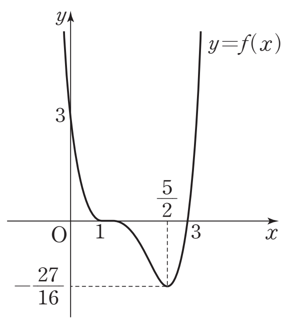
$=(x-1)^2(4x-10)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	극소	↗



방정식 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=0$의 서로 다른 실근은 방정식 $g(x)=1$ 또는 $g(x)=3$의 서로 다른 실근이다.

방정식 $(f\circ g)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(m)$이라 하면

$m<1$일 때 $h(m)=4$

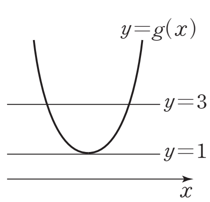
$m=1$일 때 $h(m)=3$

$1<m<3$일 때 $h(m)=2$

$m=3$일 때 $h(m)=1$

$m>3$일 때 $h(m)=0$

이므로 조건 (가)에서 $m=1$



[$m=1$인 경우]

조건 (나)에서 $(f\circ g)(x)\geq(f\circ g)(2)$이고 $g(x)\geq 1$

이므로 함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$는 $x=2$일 때 최솟값을 갖고,

함수 $y=f(x)$는 $x=\frac{5}{2}$일 때 최솟값을 가지므로

$g(2)=\frac{5}{2}$

$g(2)=(2-k)^2+1=\frac{5}{2}$

$(2-k)^2=\frac{3}{2}$

$2-k=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 또는 $2-k=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$k=2-\sqrt{\frac{3}{2}}$ 또는 $k=2+\sqrt{\frac{3}{2}}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

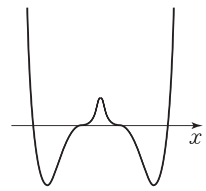
$\left(2-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(2+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

답 ③

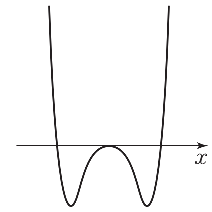
참고

함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

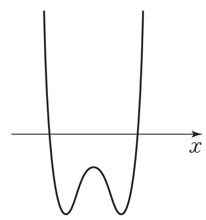
$m<1$일 때



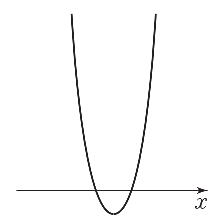
$m=1$일 때



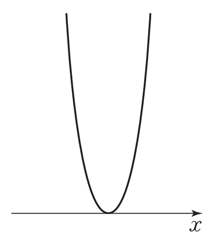
$1<m<\frac{5}{2}$일 때



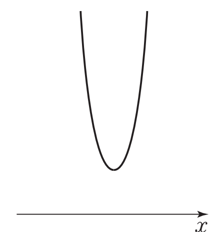
$\frac{5}{2}\leq m<3$일 때



$m=3$일 때



$m>3$일 때



39

$x=t^3-at^2+3$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-2at$

시각 $t=1$일 때 점 P의 속도가 2이므로

$3-2a=2$에서 $a=\frac{1}{2}$

$v=3t^2-t$

그러므로 시각 $t=2$에서의 속도는

$12-2=10$

답 ①

40

$x=t^3-4t^2-3t+1$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-8t-3$

$3t^2-8t-3=0$에서 $(3t+1)(t-3)=0$

$t\geq 0$이므로 $t=3$

$0<t<3$일 때 $v<0$이고, $t>3$일 때 $v>0$이므로

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=3$일 때이다.

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=6t-8$

따라서 구하는 가속도는

$18-8=10$

답 ⑤

41

두 점 P, Q가 만나는 시각은 $x_1=x_2$에서

$3t^3-3t^2+7t=2t^3+4t^2-3t$

$t^3-7t^2+10t=0$

$t(t-2)(t-5)=0$

$t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=5$

따라서 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 처음으로 만나는 순간은 $t=2$일 때이다.

$x_1=3t^3-3t^2+7t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v_1이라 하면

$v_1=9t^2-6t+7$

$x_2=2t^3+4t^2-3t$이므로 시각 t에서의 점 Q의 속도를 v_2라 하면

$v_2=6t^2+8t-3$

$t=2$일 때의 점 P의 속도는

$36-12+7=31$

$t=2$일 때의 점 Q의 속도는

$24+16-3=37$

따라서 두 점 P, Q의 속도의 차는

$37-31=6$

답 6

06 다항함수의 적분법

정답 본문 76~85쪽

01 ②	02 ③	03 ②	04 ④	05 95
06 32	07 108	08 ③	09 ③	10 ①
11 ①	12 ④	13 ③	14 ②	15 ①
16 ④	17 ④	18 ④	19 ④	20 ②
21 ⑤	22 ③	23 ④	24 6	25 37
26 5	27 ②	28 426	29 ②	30 ③
31 127				

01

$$f(x)=\int(x^3+2x^2+1)dx-\int(x^3-x^2)dx$$
$$=\int\{(x^3+2x^2+1)-(x^3-x^2)\}\,dx$$
$$=\int(3x^2+1)dx$$
$$=x^3+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3+x+1$이므로

$f(1)=1+1+1=3$

답 ②

02

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6+2=8$이므로 접선의 방정식은

$y=8(x-1)+f(1)$

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=8\times(-1)+f(1)$

$f(1)=6$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(6x^2+2x)dx$$
$$=2x^3+x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=6$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+3$이므로

$f(2)=16+4+3=23$

답 ③

03

$g(x)=(x^2-4)f(x)$라 하면 곱의 미분법에 의하여

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-4)f'(x)$

$$\int\{2xf(x)+(x^2-4)f'(x)\}dx$$
$$=\int g'(x)dx$$
$=g(x)+C$

$=(x^2-4)f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$(x^2-4)f(x)+C=x^4-2x^3+8x-10$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$C=6$

$(x^2-4)f(x)=x^4-2x^3+8x-16$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-3f(1)=1-2+8-16$

따라서 $f(1)=3$

답 ②

04

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^2 (3x^2+12x-4)\,dx$$
$$=\Big[x^3+6x^2-4x\Big]_0^2$$
$$=8+24-8$$
$$=24$$

답 ④

05

$-1\le x<0$일 때

$f(x)=(x+1)-2x=-x+1$

$x\ge 0$일 때

$f(x)=(x+1)+2x=3x+1$

이므로

$$\int_{-1}^3 xf(x)\,dx=\int_{-1}^0 xf(x)\,dx+\int_0^3 xf(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 x(-x+1)\,dx+\int_0^3 x(3x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (-x^2+x)\,dx+\int_0^3 (3x^2+x)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^3$$
$$=-\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\Big)+\Big(27+\frac{9}{2}\Big)$$
$$=\frac{92}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=92$이므로

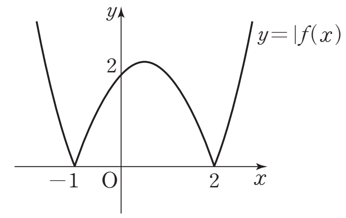
$p+q=3+92=95$

답 95

06

$f(x)=(x+1)(x-2)$에서

$$|f(x)|=\begin{cases} x^2-x-2 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+x+2 & (-1<x<2) \end{cases}$$



$-1\le a\le 0$이므로 $2\le a+3\le 3$

따라서

$$g(a)=\int_a^{a+3} |f(x)|\,dx$$
$$=\int_a^2 (-x^2+x+2)\,dx+\int_2^{a+3} (x^2-x-2)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_a^2+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_2^{a+3}$$
$$=\frac{10}{3}+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+\frac{1}{3}(a+3)^3$$
$$-\frac{1}{2}(a+3)^2-2(a+3)+\frac{10}{3}$$
$$=\frac{2}{3}a^3+2a^2+2a+\frac{31}{6}$$

$g'(a)=2a^2+4a+2=2(a+1)^2\ge 0$

함수 $g(a)$는 증가하는 함수이므로 $-1\le a\le 0$에서 함수 $g(a)$는 최솟값 $g(-1)$, 최댓값 $g(0)$을 갖는다.

$g(-1)=\frac{9}{2}$, $g(0)=\frac{31}{6}$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{31}{6}+\frac{9}{2}=\frac{31+27}{6}=\frac{29}{3}$

따라서 $p=3$, $q=29$이므로

$p+q=3+29=32$

답 32

07

$$\int_{-3}^3 (4x^3+6x^2+7x)\,dx=2\int_0^3 6x^2\,dx$$
$$=2\Big[2x^3\Big]_0^3$$
$$=2(54-0)$$
$$=108$$

답 108

08

조건 (가)에서 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)

조건 (나)에서 $f(1)=6$이므로

$a+b=6$ …… ㉠

조건 (가), (다)에서

$$\int_{-2}^2 f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_{-2}^2$$
$$=f(2)-f(-2)$$
$$=2f(2)=12$$

$f(2)=6$이므로

$8a+2b=6$

$4a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=7$

따라서 $f(x)=-x^3+7x$이므로

$f(3)=-27+21=-6$

답 ③

09

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

조건 (가)에서

$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2(3x^2+2ax+b)\,dx&=\int_{-1}^{1}(3x^4+2ax^3+bx^2)\,dx\\&=2\int_{0}^{1}(3x^4+bx^2)\,dx\\&=2\left[\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1\\&=2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}b\right)=0\end{aligned}$$

에서 $b=-\frac{9}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=-\frac{3}{5}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-\frac{6}{5}x-\frac{9}{5}\\&=\frac{3}{5}(5x^2-2x-3)\\&=\frac{3}{5}(x-1)(5x+3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-\frac{3}{5}$

따라서 $x=-\frac{3}{5}$일 때 극댓값을 갖는다.

즉, $\alpha=-\frac{3}{5}$이다.

답 ③

다른 풀이

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$일 때 극대이고 $x=1$일 때 극소이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-\alpha)$ $(\alpha<1)$로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2f'(x)dx&=3\int_{-1}^{1} x^2(x-1)(x-\alpha)dx\\&=3\int_{-1}^{1}\{x^4-(\alpha+1)x^3+\alpha x^2\}dx\\&=6\int_{0}^{1}(x^4+\alpha x^2)dx\\&=6\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{\alpha}{3}x^3\right]_0^1\\&=6\left(\frac{1}{5}+\frac{\alpha}{3}\right)=0\end{aligned}$$

따라서 $\alpha=-\frac{3}{5}$이다.

10

$f(x)=\int_0^x(3t^2+5t-2)\,dt$

$f'(x)=3x^2+5x-2=(3x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)$를 갖는다.

$$\begin{aligned}f(-2)&=\int_0^{-2}(3t^2+5t-2)\,dt\\&=\left[t^3+\frac{5}{2}t^2-2t\right]_0^{-2}\\&=-8+10+4\\&=6\end{aligned}$$

답 ①

11

$\int_1^x(t^3-2t)\,dt=2x^3+x-f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1(t^3-2t)\,dt=2+1-f(1)$

$0=2+1-f(1)$

이므로 $f(1)=3$

$\int_1^x(t^3-2t)\,dt=2x^3+x-f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^3-2x=6x^2+1-f'(x)$

$f'(x)=-x^3+6x^2+2x+1$

에서 $f'(1)=-1+6+2+1=8$

따라서 $f(1)+f'(1)=3+8=11$

답 ①

12

조건 (가)의

$\int_0^x f(t)\,dt=g(x)(x-1)+a(x^2-1)+b$ …… ㉠

에서 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-g(0)-a+b$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)\,dt=b$ …… ㉢

조건 (나)에 ㉢을 대입하면 $g(x)=x^2-bx$

$g(0)=0$이므로 ㉡에서

$a=b$ …… ㉣

㉠에 ㉣을 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt&=g(x)(x-1)+a(x^2-1)+a\\&=g(x)(x-1)+ax^2\\&=(x^2-ax)(x-1)+ax^2\\&=x^3-x^2+ax\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-2x+a$$
$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a-\frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$$a-\frac{1}{3}=1$$
$$a=\frac{4}{3}$$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+\frac{4}{3}$, $g(x)=x^2-\frac{4}{3}x$이므로

$$f(1)+g(-1)=\left(3-2+\frac{4}{3}\right)+\left(1+\frac{4}{3}\right)$$
$$=\frac{14}{3}$$

답 ④

13

$f(t)=3t^2+at-4a$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (3t^2+at-4a)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=-4a=12$$

에서 $a=-3$

답 ③

14

$\int_{-1}^{2} f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$$f(x)=4x^3+2x+k$$
$$\int_{-1}^{2} f(t)dt=\int_{-1}^{2} (4t^3+2t+k)\,dt$$
$$=\Big[t^4+t^2+kt\Big]_{-1}^{2}$$
$$=(16+4+2k)-(1+1-k)$$
$$=18+3k=k$$

에서 $k=-9$

$$f(x)=4x^3+2x-9$$

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$
$$=F'(a)=f(a)$$

$f(a)=4a^3+2a-9=-15$에서

$$4a^3+2a+6=0$$
$$2a^3+a+3=0$$
$$(a+1)(2a^2-2a+3)=0$$

이때 $2a^2-2a+3=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

따라서 $a=-1$

답 ②

15

$$xf(x)=2x^3-3x^2\int_0^1 f'(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=6x^2-6x\int_0^1 f'(t)\,dt+f(x)$$
$$f'(x)=6x-6\int_0^1 f'(t)\,dt$$

이때 $\int_0^1 f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면

$$f'(x)=6x-6k$$
$$\int_0^1 f'(t)\,dt=\int_0^1 (6t-6k)\,dt$$
$$=\Big[3t^2-6kt\Big]_0^1$$
$$=3-6k$$

$3-6k=k$에서 $k=\frac{3}{7}$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=2-3\int_0^1 f'(t)\,dt+\int_1^1 f(t)\,dt$$
$$=2-3\times\frac{3}{7}+0$$
$$=2-\frac{9}{7}=\frac{5}{7}$$

$f'(x)=6x-\frac{18}{7}$에서

$f(x)=\int\left(6x-\frac{18}{7}\right)dx=3x^2-\frac{18}{7}x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=\frac{5}{7}$에서

$$f(1)=3-\frac{18}{7}+C=\frac{5}{7}$$
$$C=\frac{2}{7}$$

이므로 $f(x)=3x^2-\frac{18}{7}x+\frac{2}{7}$이다.

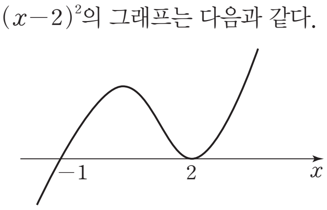
$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-1}^{-1+7h} f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(-1+7h)-F(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(-1+7h)-F(-1)}{7h}\times 7\right\}$$
$$=7F'(-1)$$
$$=7f(-1)$$
$$=7\left(3+\frac{18}{7}+\frac{2}{7}\right)$$
$$=41$$

답 ①

16

함수 $y=(x+1)(x-2)^2$의 그래프는 다음과 같다.



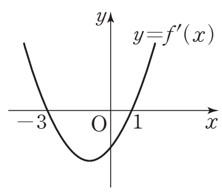
그러므로 곡선 $y=(x+1)(x-2)^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2dx=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=(4-8+8)-\left(\frac{1}{4}+1-4\right)$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 ④

17

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(-3)=0$, $f'(1)=0$이다.



$f'(x)=a(x+3)(x-1)$ $(a>0)$이라 하자.
곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$-\int_{-3}^{1}a(x+3)(x-1)\,dx=-a\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)\,dx$$
$$=-a\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)\,dx$$
$$=-a\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-3}^{1}$$
$$=\frac{32}{3}a=24$$

에서 $a=\frac{9}{4}$

$$f'(x)=\frac{9}{4}(x+3)(x-1)$$
$$=\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{27}{4}$$

이므로

$f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{27}{4}x+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 x의 계수는 $-\frac{27}{4}$이다.

답 ④

18

$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$라 하면

$f'(x)=x^3-x=x(x+1)(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

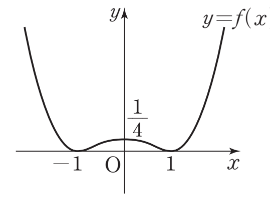
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{4}+k$	↗	k	↘	$-\frac{1}{4}+k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=-1$과 $x=1$에서 극소이므로 곡선 $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$가 x축과 서로 다른 두 점에서 접하려면

$-\frac{1}{4}+k=0$, 즉 $k=\frac{1}{4}$이어야 한다.

그러므로 $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}$이고 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{0}^{1}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)dx=2\left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{4}\right]_{0}^{1}$$
$$=2\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{4}{15}$$

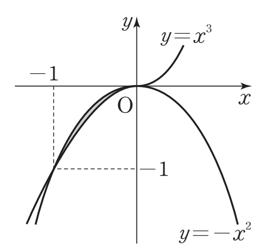
답 ④

19

$x^3=-x^2$에서

$x^3+x^2=0$, $x^2(x+1)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$



$-1\le x\le 0$에서 $x^3\ge -x^2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{x^3-(-x^2)\}\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}$$
$$=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{12}$$

답 ④

20

이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$f(x)-3=3(x-1)(x-3)$

따라서 구하는 넓이는

$-\int_1^3 \{f(x)-3\}\,dx=-\int_1^3 3(x-1)(x-3)\,dx$

$=-3\int_1^3 (x^2-4x+3)\,dx$

$=-3\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3$

$=-3\left\{(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right\}$

$=4$

답 ②

21

$x(x+1)(x-3)=-x(x-3)$에서

$x(x+1)(x-3)+x(x-3)=0$

$x(x-3)(x+2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^0 x(x-3)(x+2)\,dx+\int_0^3 \{-x(x-3)(x+2)\}\,dx$

$=\int_{-2}^0 (x^3-x^2-6x)\,dx+\int_0^3 (-x^3+x^2+6x)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^3$

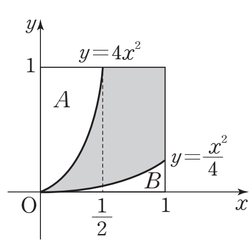
$=-\left(4+\frac{8}{3}-12\right)+\left(-\frac{81}{4}+9+27\right)$

$=\frac{253}{12}$

답 ⑤

22

그림과 같이 색칠한 부분을 제외한 부분의 넓이를 각각 A, B라 하면



곡선 $y=4x^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$4x^2=1$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로

$A=\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)\,dx$

$=\left[x-\frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$B=\int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx=\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^1=\frac{1}{12}$

$A+B=\frac{5}{12}$이므로 구하는 넓이는

$1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

답 ③

다른 풀이

$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(4x^2-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{5}{4}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{\frac{1}{2}}^1$

$=\frac{5}{32}+\left(1-\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{96}\right)$

$=\frac{7}{12}$

23

$f(x)=x^3-4x^2+5x$

$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=\frac{5}{3}$에서 극소이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-4x^2+5x=x$에서

$x^3-4x^2+4x=0$, $x(x-2)^2=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $f(0)=0$, $f(2)=2$이고 $x=2$에서 중근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 $x=2$에서 접한다. …… ㉠

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+9$가 만나는 점을 P라 하면 점 P의 x좌표는

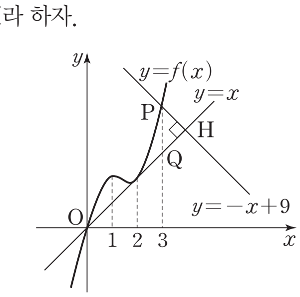
$x^3-4x^2+5x=-x+9$에서

$x^3-4x^2+6x-9=0$

$(x-3)(x^2-x+3)=0$

$x=3$이므로 $\mathrm{P}(3,\ 6)$ …… ㉡

두 직선 $x=3$과 $y=x$가 만나는 점을 Q, 두 직선 $y=x$와 $y=-x+9$가 만나는 점을 H라 하자.



직각삼각형 PQH에서

점 $\mathrm{Q}(3,\ 3)$과 직선 $y=-x+9$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{QH}}=\frac{|3+3-9|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

이고 $\overline{PQ}=6-3=3$이므로

$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QH}^2}$$
$$=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

직각삼각형 PQH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{4} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A 및 직선 $y=-x+9$로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$, 직선 $y=-x+9$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$S_1=2\int_0^2 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx$이고

$S_2=2\int_2^3 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\times\frac{9}{4}$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$S_1+S_2$$
$$=2\int_0^2 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\int_2^3 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\times\frac{9}{4}$$
$$=2\int_0^3 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\times\frac{9}{4}$$
$$=2\int_0^3 (x^3-4x^2+4x)\,dx+\frac{9}{2}$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^3+\frac{9}{2}$$
$$=2\times\left(\frac{81}{4}-36+18\right)+\frac{9}{2}$$
$$=9$$

답 ④

참고

직각삼각형 PQH에서

$\overline{PQ}=3$, $\angle PQH=\angle HPQ=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\overline{QH}=\overline{PH}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

따라서 직각삼각형 PQH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{4}$$

24

조건 (가)에서 A, B, C의 공차를 d라 하면 $A=B-d$, $C=B+d$로 놓을 수 있다.

$$\int_a^c |f(x)|\,dx=A+B+C$$
$$=(B-d)+B+(B+d)$$
$$=3B$$

$$\int_a^c f(x)\,dx=A-B+C$$
$$=(B-d)-B+(B+d)$$
$$=B$$

조건 (나)에서

$$3\int_a^c |f(x)|\,dx-4\int_a^c f(x)\,dx=3\times3B-4\times B$$
$$=5B=10$$

에서 $B=2$

$$\int_a^c |f(x)|\,dx=3B=3\times2=6$$

답 6

25

조건 (나)에서

$$\int_{-1}^a f(x)\,dx=\int_{-1}^a (x+1)(x-1)(x-a)\,dx$$
$$=\int_{-1}^a (x^3-ax^2-x+a)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+ax\right]_{-1}^a$$
$$=\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{3}-\frac{a^2}{2}+a^2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{3}-\frac{1}{2}-a\right)$$
$$=-\frac{a^4}{12}+\frac{a^2}{2}+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

이므로 $a^4-6a^2-8a+24=0$, 즉

$(a-2)^2(a^2+4a+6)=0$, $a=2$

그러므로 $-1\le x\le2$에서

함수 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^1 (x^3-2x^2-x+2)\,dx-\int_1^2 (x^3-2x^2-x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2\right)$$
$$-\left\{\left(4-\frac{16}{3}-2+4\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right\}$$
$$=\frac{37}{12}$$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$이므로

$-1\le x\le5$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=2\times\frac{37}{12}=\frac{37}{6}$$

따라서 $6S=6\times\frac{37}{6}=37$

답 37

26

조건 (가)에서 $f'(x)=3x^2+2(1-a)x-a=0$의 서로 다른 두 근의 부호가 다르므로 이차방정식 $3x^2+2(1-a)x-a=0$의 두 근의 곱이 음수이다. 즉,

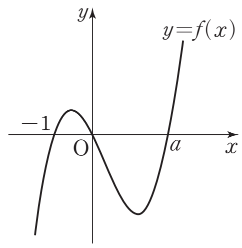
$-a<0$, $a>0$

곡선 $y=x^3+(1-a)x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3+(1-a)x^2-ax=0$에서

$x(x+1)(x-a)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$



조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분 중에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 넓이가 $\frac{11}{12}$이므로

$$\int_{-1}^{0}\{x^3+(1-a)x^2-ax\}\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1-a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1-a}{3}+\frac{a}{2}$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{a}{6}=\frac{11}{12}$$

따라서 $a=5$

답 5

27

$f(x)=x^3-6x^2+32$에서

$f'(x)=3x^2-12x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 27)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-12=-9$

이므로 접선의 방정식은 $y-27=-9(x-1)$

$y=-9x+36$

한편, 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+32$의 그래프와 접선이 만나는 점의 x좌표는

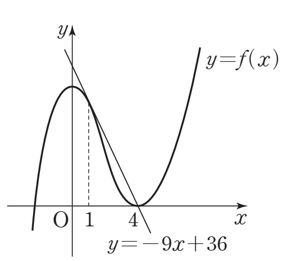
$x^3-6x^2+32=-9x+36$에서

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)^2(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$

그러므로 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+32$의 그래프와 접선은 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$와 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{1}^{4}\{-9x+36-(x^3-6x^2+32)\}\,dx$$
$$=\int_{1}^{4}(-x^3+6x^2-9x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{9}{2}x^2+4x\right]_{1}^{4}$$
$$=\left(-64+128-72+16\right)-\left(-\frac{1}{4}+2-\frac{9}{2}+4\right)$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 ②

28

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=2x^2-8x+3$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 $x^2-2x=2x^2-8x+3$에서

$x^2-6x+3=0$의 두 근이다. 두 근이 α, β $(\alpha<\beta)$이므로

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=3$

$0<\alpha<\beta$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=6^2-2\times3=30$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=6^2-4\times3=24$에서

$\alpha<\beta$이므로 $\beta-\alpha=2\sqrt{6}$

$f(x)=4x^3+3x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^2+6x$

$x>0$일 때 $f'(x)>0$이고 $f(0)=0$이므로

$f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서 곡선 $y=4x^3+3x^2$과 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{\alpha}^{\beta}(4x^3+3x^2)\,dx$$
$$=\left[x^4+x^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=(\beta^4+\beta^3)-(\alpha^4+\alpha^3)$$
$$=(\beta^4-\alpha^4)+(\beta^3-\alpha^3)$$
$$=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)(\beta^2+\alpha^2)+(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$$
$$=(\beta-\alpha)\{(\beta+\alpha)(\beta^2+\alpha^2)+(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)\}$$
$$=2\sqrt{6}(6\times30+30+3)$$
$$=426\sqrt{6}$$

따라서 $m=426$

답 426

29

$t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는 $t=1$에서 $t=5$까지 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=1$, $t=5$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$1\times3+\frac{1}{2}\times2\times3+\frac{1}{2}\times1\times2=7$$

답 ②

30

원점을 동시에 출발한 두 점 P, Q가 $t=a$ $(a>0)$일 때 만난다고 하면

$\int_{0}^{a}v_1(t)\,dt=\int_{0}^{a}v_2(t)\,dt$에서

$$\int_{0}^{a}(t^2-2t+9)\,dt=\int_{0}^{a}\left(2t+\frac{19}{3}\right)dt$$

$\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+9t\right]_0^a=\left[t^2+\frac{19}{3}t\right]_0^a$

$\frac{1}{3}a^3-a^2+9a=a^2+\frac{19}{3}a$

$\frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}a=0$

$\frac{1}{3}a(a^2-6a+8)=0$

$\frac{1}{3}a(a-2)(a-4)=0$

$a>0$이므로 $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_2^4\left|2t+\frac{19}{3}\right|dt&=\int_2^4\left(2t+\frac{19}{3}\right)dt\\&=\left[t^2+\frac{19}{3}t\right]_2^4\\&=\left(16+\frac{76}{3}\right)-\left(4+\frac{38}{3}\right)\\&=\frac{74}{3}\end{aligned}$$

답 ③

31

시각 t $(t\geq0)$에서의 두 점 A, B의 위치를 각각 $s_1(t)$, $s_2(t)$라 하면

$$\begin{aligned}s_1(t)&=\int_0^t t(2-t)(4-t)\,dt\\&=\int_0^t(t^3-6t^2+8t)\,dt\\&=\frac{t^4}{4}-2t^3+4t^2\end{aligned}$$

$s_2(t)=\int_0^t(a-2t)\,dt=-t^2+at$

$s_1(t)=s_2(t)$에서

$\frac{t^4}{4}-2t^3+4t^2=-t^2+at$

$\frac{t^4}{4}-2t^3+5t^2=at$

출발 후 두 점 A, B가 만나는 횟수는 $t>0$일 때,

방정식 $\frac{t^3}{4}-2t^2+5t=a$의 실근의 개수와 같으며 이는

함수 $f(t)=\frac{t^3}{4}-2t^2+5t$ $(t\geq0)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

$f(t)=\frac{t^3}{4}-2t^2+5t$에서

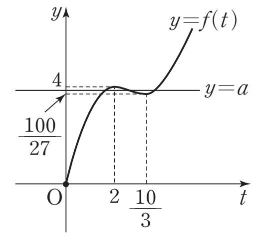
$f'(t)=\frac{3}{4}t^2-4t+5$

$f'(t)=0$에서

$\frac{3}{4}t^2-4t+5=0$, $\frac{1}{4}(t-2)(3t-10)=0$

$t=2$ 또는 $t=\frac{10}{3}$

$f(2)=4$, $f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{100}{27}$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 모든 a의 값의 범위는

$\frac{100}{27}<a<4$

따라서 $p=27$, $q=100$이므로

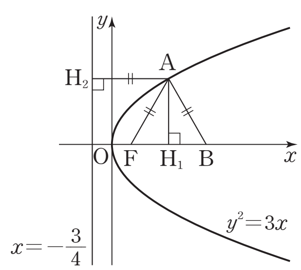
$p+q=127$

답 127

07 이차곡선

정답				본문 89~98쪽
01 ③	02 ②	03 ④	04 ①	05 ⑤
06 ③	07 ①	08 76	09 ①	10 38
11 ④	12 ③	13 ④	14 ③	15 18
16 ④	17 ②	18 ②	19 ③	20 64
21 ②	22 ⑤	23 ②	24 ⑤	25 ②
26 ②	27 ⑤	28 ②	29 ④	30 ①

01



포물선 $y^2=3x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$이고, 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{4}$이다.

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면 점 $\mathrm{H_1}$은 선분 FB의 중점이고 $\overline{\mathrm{BF}}=3$이므로

$a=\overline{\mathrm{OH_1}}=\overline{\mathrm{OF}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BF}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times 3=\frac{9}{4}$

점 A의 x좌표는 $\frac{9}{4}$이므로 점 A에서 포물선의 준선 $x=-\frac{3}{4}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하면

$\overline{\mathrm{AH_2}}=\frac{9}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=3$

이고, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH_2}}$이므로

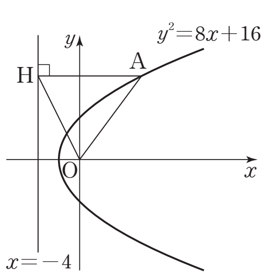
$\overline{\mathrm{AF}}=3$

조건에서 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼각형 AFB는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이고 그 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AB}}=3\times 3=9$

답 ③

02



포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

포물선 $y^2=8x+16=8(x+2)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=8x+16$의 초점은 원점 O이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 A에서 준선 $x=-4$에 내린 수선의 발이 H이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=a-(-4)=a+4$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AH}}=10$

이므로

$a+4=10,\ a=6$

$b^2=8a+16=8\times 6+16=64$

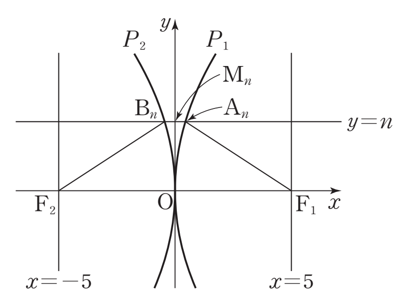
$b=-8$ 또는 $b=8$

즉, 점 A의 좌표는 $(6,\ -8)$ 또는 $(6,\ 8)$이므로 삼각형 OAH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times|b|=\frac{1}{2}\times 10\times 8=40$

답 ②

03



두 포물선 P_1: $y^2=20x$, P_2: $y^2=-20x$의 두 초점 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$의 좌표는 각각 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이고, 두 포물선 P_1, P_2가 직선 $y=n$과 만나는 두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각 $\left(\frac{n^2}{20},\ n\right)$, $\left(-\frac{n^2}{20},\ n\right)$이다.

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점을 M_n이라 하면

$$\begin{aligned}S(n)&=\overline{\mathrm{F_1A}_n}+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F_2}}+\overline{\mathrm{F_2F_1}}\\&=\overline{\mathrm{F_1A}_n}+(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n}+\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{B}_n})+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F_2}}+(\overline{\mathrm{F_2O}}+\overline{\mathrm{OF_1}})\\&=\overline{\mathrm{F_1A}_n}+(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n}+\overline{\mathrm{F_2O}})+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F_2}}+(\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{OF_1}})\end{aligned}$$

이때 두 포물선은 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{F_1A}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F_2}}$이고, 두 포물선 P_1, P_2의 준선의 방정식은 각각 $x=-5$, $x=5$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F_1A}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n}+\overline{\mathrm{F_2O}},\ \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F_2}}=\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{OF_1}}$

따라서

$$\begin{aligned}S(n)&=\overline{\mathrm{F_1A}_n}+(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n}+\overline{\mathrm{F_2O}})+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F_2}}+(\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{OF_1}})\\&=4(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n}+\overline{\mathrm{F_2O}})=4\left(\frac{n^2}{20}+5\right)=\frac{n^2}{5}+20\end{aligned}$$

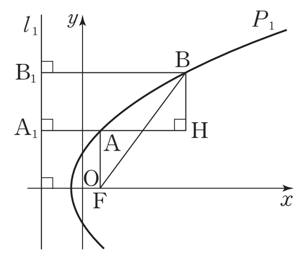
이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}S(n)&=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{n^2}{5}+20\right)\\&=\frac{1}{5}\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+20\times 10=277\end{aligned}$$

답 ④

04

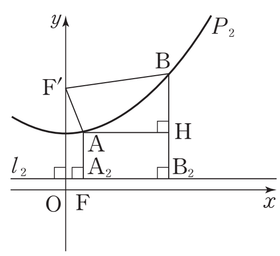
두 점 F, F′을 초점으로 갖는 포물선을 각각 P_1, P_2라 하고, 점 A를 지나고 y축에 수직인 직선과 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 만나는 점을 H라 하자.



포물선 P_1의 준선을 l_1이라 하고 두 점 A, B에서 준선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AA_1}}$, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BB_1}}$이므로

$\overline{\mathrm{BF}}-\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{BB_1}}-\overline{\mathrm{AA_1}}=\overline{\mathrm{AH}}=12$ …… ㉠



포물선 P_2의 준선을 l_2라 하고 두 점 A, B에서 준선 l_2에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AA_2}}$, $\overline{\mathrm{BF'}}=\overline{\mathrm{BB_2}}$

이므로

$\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BB_2}}-\overline{\mathrm{AA_2}}=\overline{\mathrm{BH}}$ …… ㉡

이때 $\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$는 직선 l의 기울기이므로 ㉠, ㉡과 주어진 조건에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{12}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{\mathrm{BH}}=12\times\dfrac{2}{3}=8$

따라서 $\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BH}}=8$

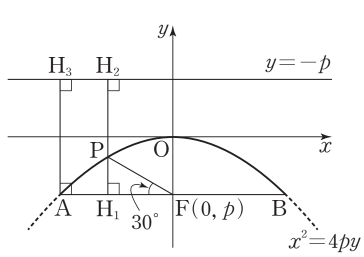
답 ①

참고

두 포물선 P_1, P_2의 축은 각각 두 직선 OF, OF′이다. 따라서 두 준선 l_1, l_2는 각각 x축, y축에 수직이다.

05

포물선의 꼭짓점이 원점 O에 위치하고 초점 F가 y축 위의 점이 되도록 좌표축을 정하면 아래 그림과 같다. 점 F의 좌표를 $(0, p)$ $(p<0)$이라 하면 준선의 방정식은 $y=-p$이고 포물선의 방정식은 $x^2=4py$이다.



점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PF}}\times\sin 30°=40\times\dfrac{1}{2}=20$

점 P에서 준선 $y=-p$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH_2}}=\overline{\mathrm{PF}}=40$

$\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{PH_1}}+\overline{\mathrm{PH_2}}$

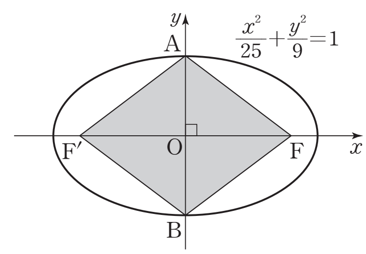
$=20+40=60$

한편, 점 A에서 준선 $y=-p$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH_3}}$이고 $\overline{\mathrm{AH_3}}=\overline{\mathrm{H_1H_2}}=60$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=60$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\times\overline{\mathrm{AF}}=2\times60=120$

답 ⑤

06



타원의 꼭짓점 A의 좌표를 $(0, a)$ $(a>0)$이라 하면

$\dfrac{a^2}{9}=1$, $a=3$ $(a>0)$, 즉 $\overline{\mathrm{OA}}=3$

타원의 초점 F의 좌표를 $(c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=25-9=16$, $c=4$ $(c>0)$, 즉 $\overline{\mathrm{OF}}=4$

사각형 AF′BF의 넓이는 직각삼각형 AOF의 넓이의 4배이므로 구하는 넓이는

$4\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{OA}}\right)=4\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times3\right)=24$

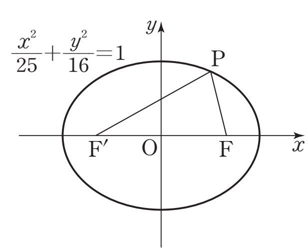
답 ③

07

두 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 타원의 성질에 의하여

$c^2=25-16=9$, $c=3$

$\overline{\mathrm{F'F}}=2c=2\times3=6$



$\overline{\mathrm{PF'}}=p$, $\overline{\mathrm{PF}}=q$라 하면

타원의 정의에 의하여

$p+q=2\times5=10$ …… ㉠

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{PF'F}) = \frac{\overline{\mathrm{PF'}}^2 + \overline{\mathrm{F'F}}^2 - \overline{\mathrm{PF}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{F'F}}} = \frac{p^2+6^2-q^2}{2\times p\times 6} = \frac{7}{9}$$

$3(p^2+36-q^2)=28p$

$3(p+q)(p-q)+108=28p$

$3\times10\times(p-q)+108=28p$

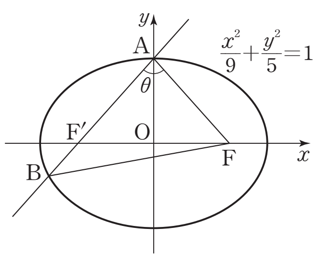
$p-15q=-54$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=6$, $q=4$

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=p-q=6-4=2$

답 ①

08



타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

타원의 성질에 의하여

$c^2=9-5=4$, $c=2$

$\overline{\mathrm{FF'}}=2c=2\times2=4$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2\times3=6$ …… ㉠

점 A가 타원의 꼭짓점이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}=3$

$\angle \mathrm{FAF'}=\theta$라 하면 삼각형 AF′F에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{AF}}^2+\overline{\mathrm{AF'}}^2-\overline{\mathrm{FF'}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AF'}}} = \frac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\frac{1}{9}$$

$\overline{\mathrm{BF}}=a$라 하면 ㉠에 의하여 $\overline{\mathrm{BF'}}=6-a$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{BF'}}=3+(6-a)=9-a$

삼각형 ABF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AF}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\cos\theta$

$a^2=(9-a)^2+3^2-2\times(9-a)\times3\times\frac{1}{9}$

$a^2=(81-18a+a^2)+9-\frac{2}{3}(9-a)$

$13a=63$, $a=\frac{63}{13}$

즉, 선분 BF의 길이는 $\frac{63}{13}$이다.

따라서 $p=13$, $q=63$이므로

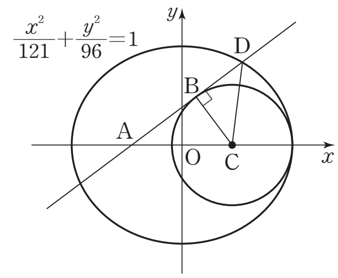
$p+q=13+63=76$

답 76

다른 풀이

타원과 직선 AF′의 교점 B의 좌표를 직접 구한 후 선분 BF의 길이를 구할 수도 있다.

09



타원 $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{96}=1$의 초점의 x좌표를 c라 하면

$c^2=121-96=25$, $c=\pm5$

즉, 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$, $\mathrm{C}(5,\ 0)$은 타원의 초점이다.

점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$에서 원 $(x-5)^2+y^2=36$에 그은 접선의 접점이 B이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{\mathrm{AC}}=10$이므로 직각삼각형 ACB에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=10^2-6^2=64$, $\overline{\mathrm{AB}}=8$

$\overline{\mathrm{CD}}=p$, $\overline{\mathrm{BD}}=q$라 하면

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{CD}}=2\times11=22$

$(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BD}})+\overline{\mathrm{CD}}=22$

$(8+q)+p=22$, $q=14-p$

직각삼각형 DBC에서

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2$

$q^2=p^2-6^2$, $(14-p)^2=p^2-36$

$p^2-28p+196=p^2-36$, $p=\frac{58}{7}$

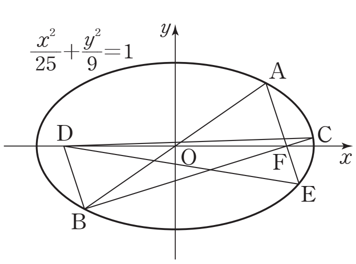
$q=14-p=14-\frac{58}{7}=\frac{40}{7}$

따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\frac{q}{p}=\frac{\frac{40}{7}}{\frac{58}{7}}=\frac{20}{29}$$

답 ①

10



$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}}$, $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{AF}}$

이고 두 삼각형 AOF, BOD는 서로 합동이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{BD}}$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EA}}$

$=\overline{\mathrm{AB}}+(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}})+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{ED}}+(\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{AF}})$

$=\overline{AB}+(\overline{BF}+\overline{CF})+\overline{CD}+\overline{ED}+(\overline{EF}+\overline{BD})$

$=\overline{AB}+(\overline{BD}+\overline{BF})+(\overline{CD}+\overline{CF})+(\overline{ED}+\overline{EF})$

타원의 정의에 의하여

$\overline{BD}+\overline{BF}=\overline{CD}+\overline{CF}=\overline{ED}+\overline{EF}=2\times5=10$

이고

$\overline{AB}=2\times\overline{OA}=2\times4=8$

따라서

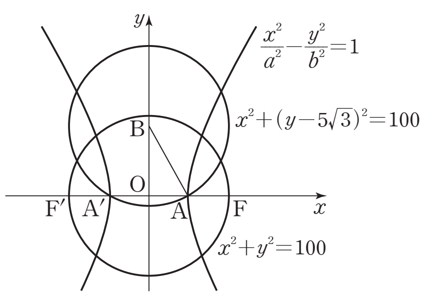
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}$

$=\overline{AB}+(\overline{BD}+\overline{BF})+(\overline{CD}+\overline{CF})+(\overline{ED}+\overline{EF})$

$=8+10+10+10=38$

답 38

11



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 원 $x^2+y^2=100$이 쌍곡선의 두 초점 F, F′을 지나므로 $c=10$이다.

원 $x^2+(y-5\sqrt{3})^2=100$의 중심을 B라 하면 점 B의 좌표는 $(0,\ 5\sqrt{3})$이므로

$\overline{OB}=5\sqrt{3}$, $\overline{AB}=10$

직각삼각형 BOA에서

$\overline{OA}^2=\overline{AB}^2-\overline{OB}^2$

$a^2=10^2-(5\sqrt{3})^2=25$

쌍곡선의 성질에 의하여

$b^2=c^2-a^2=10^2-25=75$

따라서

$\frac{b^2}{a^2}=\frac{75}{25}=3$

답 ④

참고

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 꼭짓점 $A(a,\ 0)$, $A'(-a,\ 0)$ $(a>0)$이 원 $x^2+(y-5\sqrt{3})^2=100$ 위의 점이므로

$a^2+(0-5\sqrt{3})^2=100$

$a^2+75=100$

$a=5$ $(a>0)$

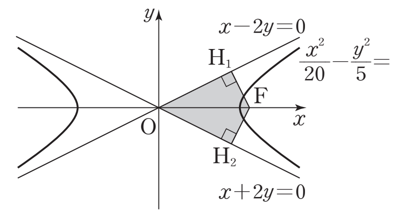
12

쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$의 초점 F의 좌표를 $(c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=20+5=25$, $c=5$ $(c>0)$, 즉 $\overline{OF}=5$

쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 점근선의 방정식은

$x-2y=0$, $x+2y=0$



초점 F(5, 0)에서 두 점근선 $x-2y=0$, $x+2y=0$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$\overline{FH_1}=\frac{|5-2\times0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 FH_1O에서

$\overline{OH_1}=\sqrt{\overline{OF}^2-\overline{FH_1}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

이때 사각형 FH_1OH_2의 넓이는 두 삼각형 FH_1O, FH_2O의 넓이의 합이고, 두 삼각형 FH_1O, FH_2O는 서로 합동이므로 사각형 FH_1OH_2의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OH_1}\times\overline{FH_1}\right)=\overline{OH_1}\times\overline{FH_1}=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=10$

답 ③

13

두 초점 $(0,\ -5)$, $(0,\ 5)$에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$

이라 하면 $2b=8$에서 $b=4$

$a^2=5^2-4^2=9$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ …… ㉠

두 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ 10)$에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선은 쌍곡선 ㉠을 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{16}=-1$

$16x^2-9y^2+90y-81=0$

따라서 $p=90$, $q=-81$이므로

$p-q=90-(-81)=171$

답 ④

다른 풀이

두 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ 10)$에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선의 두 꼭짓점은 $(0,\ 1)$, $(0,\ 9)$이고, 쌍곡선 $16x^2-9y^2+py+q=0$이 이 두 꼭짓점을 지나므로

$p+q=9$ …… ㉠

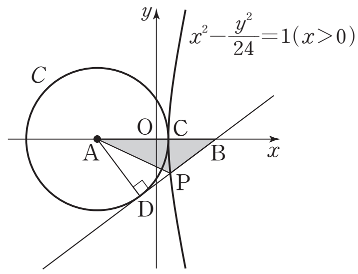
$9p+q=729$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=90$, $q=-81$

따라서 $p-q=90-(-81)=171$

14



곡선 $x^2-\frac{y^2}{24}=1\ (x>0)$은 x축 위의 점 C$(1,\ 0)$을 지나고, 원 C는 곡선과 한 점 C에서 만나므로 원 C의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}=1-(-5)=6$

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$의 두 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=1+24=25$, $c=5$

즉, 두 점 A$(-5,\ 0)$, B$(5,\ 0)$은 쌍곡선의 초점이다.

제3사분면에서 직선 BP와 원 C의 접점을 D라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=6$, $\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=10$이므로 직각삼각형 ADB에서

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2=10^2-6^2=64$, $\overline{\mathrm{BD}}=8$

$\overline{\mathrm{BP}}=p$, $\overline{\mathrm{AP}}=q\ (p<q)$라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=2\times1=2$

$q-p=2$, $q=p+2$

직각삼각형 ADP에서

$\overline{\mathrm{DP}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2$, $(\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{BP}})^2=\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2$

$(8-p)^2=q^2-6^2$, $(8-p)^2=(p+2)^2-36$, $p=\frac{24}{5}$

즉, $\overline{\mathrm{BP}}=\frac{24}{5}$

따라서 삼각형 APB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}\times6=\frac{72}{5}$

답 ③

15

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F$(6,\ 0)$, F$'(-6,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=36$ …… ㉠

$(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}})-\overline{\mathrm{PF}}=(11\sqrt{2}+4\sqrt{5})-(4\sqrt{5}-\sqrt{2})=12\sqrt{2}$

한편,

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}})-\overline{\mathrm{PF}}&=(\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}})+\overline{\mathrm{QF}}\\&=\{(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}})-\overline{\mathrm{PF}}\}+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}})\\&=(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}})\\&=2a+2a=4a\end{aligned}$$

이므로

$4a=12\sqrt{2}$, $a=3\sqrt{2}$ …… ㉡

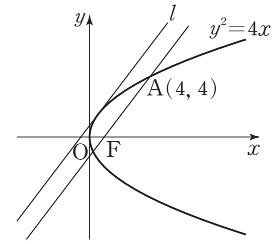
㉡을 ㉠에 대입하면

$b^2=36-a^2=36-(3\sqrt{2})^2=18$, $b=3\sqrt{2}\ (b>0)$

따라서 $ab=3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=18$

답 18

16



포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 직선 AF의 기울기는

$\frac{4-0}{4-1}=\frac{4}{3}$

따라서 직선 AF와 평행하고 포물선에 접하는 직선 l의 방정식은

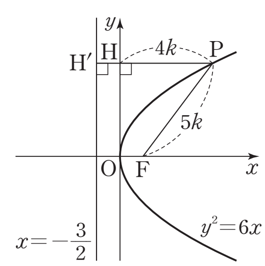
$y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}x+\frac{3}{4}$, $16x-12y+9=0$

따라서 점 F$(1,\ 0)$과 직선 $16x-12y+9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|16\times1-12\times0+9|}{\sqrt{16^2+(-12)^2}}=\frac{5}{4}$

답 ④

17



포물선 $y^2=6x$ 위의 점 P에서 이 포물선의 준선 $x=-\frac{3}{2}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하자.

$\overline{\mathrm{PF}}=5k$, $\overline{\mathrm{PH}}=4k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PH}}=5k-4k=k$ …… ㉠

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH'}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PH'}}-\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{HH'}}=\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=\frac{3}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=4\times\frac{3}{2}=6$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$이라 하면

$a=\overline{\mathrm{PH}}=6$

$b^2=6a=6\times6=36$, $b=6\ (b>0)$

이므로 포물선 $y^2=6x$ 위의 점 P$(6,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=3(x+6)$, $y=\frac{1}{2}x+3$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

답 ②

18

포물선 $y^2=8x$의 준선 l_1의 방정식은 $x=-2$이고, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 직선 l_2의 방정식은 $y=b$이다.

$\overline{\mathrm{PH}}=a-(-2)=a+2$

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}<\overline{\mathrm{QH}}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PQ}}$에서

$a+2=x-a$, 즉 $a=\frac{1}{2}(x-2)$ …… ㉠

$y=b$, 즉 $b=y$ …… ㉡

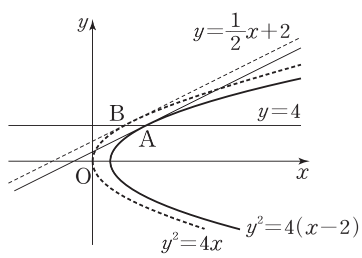
한편, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$b^2=8a$ …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$y^2=8\times\frac{1}{2}(x-2)$, $y^2=4(x-2)$

따라서 점 Q가 나타내는 도형 K는 포물선 $y^2=4(x-2)$이다.



이때 점 $(6,\ 4)$를 점 A라 하면 점 A는 포물선 $y^2=4(x-2)$ 위의 점이고, 포물선 $y^2=4(x-2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(6,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 포물선 $y^2=4(x-2)$를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{B}(4,\ 4)$에서의 접선의 기울기와 같다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{B}(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2(x+4)$, $y=\frac{1}{2}x+2$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

답 ②

19

점 A의 좌표를 $\left(\frac{\alpha^2}{8}+4,\ \alpha\right)$라 하자. 포물선 $y^2=8(x-4)$ 위의 점 A에서의 접선을 l, 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\left(\frac{\alpha^2}{8},\ \alpha\right)$에서의 접선을 l'이라 하면 접선 l의 기울기와 접선 l'의 기울기는 서로 같다.

이때 접선 l'의 방정식은

$\alpha y=4\left(x+\frac{\alpha^2}{8}\right)$, $y=\frac{4}{\alpha}\left(x+\frac{\alpha^2}{8}\right)$

따라서 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\alpha^2}{8}+4,\ \alpha\right)$를 지나고 기울기가 $\frac{4}{\alpha}$인 접선 l의 방정식은

$y-\alpha=\frac{4}{\alpha}\left(x-\frac{\alpha^2}{8}-4\right)$ …… ㉠

이때 접선 l이 원점을 지나므로

$0-\alpha=\frac{4}{\alpha}\left(0-\frac{\alpha^2}{8}-4\right)$, $\frac{\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{8}+4$, $\alpha^2=32$

점 A의 좌표는 $(8,\ \alpha)$ $(\alpha^2=32)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{8^2+\alpha^2}=\sqrt{64+32}=4\sqrt{6}$

포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이므로 포물선 $y^2=8(x-4)$의 초점 F의 좌표는 $(6,\ 0)$이다.

즉, $\overline{\mathrm{OF}}=6$

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(6-8)^2+(0-\alpha)^2}=\sqrt{4+32}=6$

따라서 삼각형 AOF에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{OFA})=\frac{\overline{\mathrm{OF}}^2+\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{2\times\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{AF}}}$$
$$=\frac{6^2+6^2-(4\sqrt{6})^2}{2\times6\times6}=-\frac{1}{3}$$

답 ③

다른 풀이

점 A가 제1사분면에 있는 점이라 하고, 원점 O에서 포물선

$y^2=8(x-4)$ …… ㉠

에 그은 접선의 방정식을

$y=mx$ $(m>0)$ …… ㉡

이라 하면 ㉠과 ㉡에서 y를 소거하여 얻은 x에 대한 방정식은

$m^2x^2=8(x-4)$

$m^2x^2-8x+32=0$ …… ㉢

㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-m^2\times32=0$, $2m^2=1$

$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(m>0)$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 정리하면

$x^2-16x+64=0$

$(x-8)^2=0$, $x=8$ …… ㉤

㉣, ㉤을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times8=4\sqrt{2}$

즉, 포물선 $y^2=8(x-4)$와 접선이 만나는 점 A의 좌표는 $(8,\ 4\sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$

포물선 $y^2=8(x-4)$의 초점 F의 좌표는 $(6,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OF}}=6$

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(6-8)^2+(0-4\sqrt{2})^2}=6$

따라서 삼각형 AOF에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{OFA})=\frac{\overline{\mathrm{OF}}^2+\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{2\times\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{AF}}}$$
$$=\frac{6^2+6^2-(4\sqrt{6})^2}{2\times6\times6}=-\frac{1}{3}$$

20

포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$의 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이다. 포물선 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$b^2=4pa$ …… ㉠

원의 중심 C의 좌표를 $(c,\ 0)$ $(c>p)$라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{FC}}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{FC}}^2$

$(c-a)^2+b^2=(c-p)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

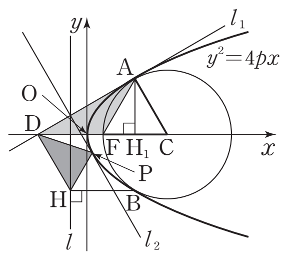
$(c-a)^2+4pa=(c-p)^2$

$a^2-2(c-2p)a+2cp-p^2=0$ …… ㉢

이때 원과 포물선이 x축에 대칭인 두 점 A, B에서 만나므로 a에 대한 이차방정식 ㉢은 중근을 갖는다.
따라서 ㉢의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(c-2p)\}^2-(2cp-p^2)$$
$$=c^2-6pc+5p^2$$
$$=(c-p)(c-5p)=0$$

$c=5p$ $(c>p)$
$c=5p$를 ㉢에 대입하여 정리하면
$a^2-6pa+9p^2=0$, $(a-3p)^2=0$, $a=3p$
즉, 두 점 A, B의 x좌표가 $3p$이므로
$y^2=4p\times 3p=12p^2$, $y=\pm 2\sqrt{3}p$
따라서 $\mathrm{A}(3p,\ 2\sqrt{3}p)$, $\mathrm{B}(3p,\ -2\sqrt{3}p)$이다.



포물선 위의 점 A에서의 접선을 l_1이라 하면 직선 l_1의 방정식은

$$l_1 : 2\sqrt{3}p\times y=2p(x+3p),\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3p)$$

에서 직선 l_1과 x축의 교점은 $\mathrm{D}(-3p,\ 0)$이고 $\mathrm{H}(-p,\ -2\sqrt{3}p)$이다.
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면 삼각형 ADF의 넓이가 $32\sqrt{3}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DF}}\times\overline{\mathrm{AH_1}}=\frac{1}{2}\times\{p-(-3p)\}\times 2\sqrt{3}p$$
$$=4\sqrt{3}p^2=32\sqrt{3}$$

$p=2\sqrt{2}$ $(p>0)$
포물선 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 PDH의 넓이가 최소인 경우는 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 DH의 기울기와 같은 경우이다.
두 점 $\mathrm{D}(-6\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{H}(-2\sqrt{2},\ -4\sqrt{6})$에서 직선 DH의 기울기는

$$\frac{-4\sqrt{6}}{-2\sqrt{2}-(-6\sqrt{2})}=-\sqrt{3}$$

포물선에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$인 접선을 l_2라 하면 직선 l_2의 방정식은

$$l_2 : y=-\sqrt{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{-\sqrt{3}},\ 3x+\sqrt{3}y+2\sqrt{2}=0$$

삼각형 PDH의 밑변을 $\overline{\mathrm{DH}}$라 하면 높이는 점 D와 직선 l_2 사이의 거리이고 이 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|3\times(-6\sqrt{2})+0+2\sqrt{2}|}{\sqrt{9+3}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$
$$\overline{\mathrm{DH}}=\sqrt{\{-2\sqrt{2}-(-6\sqrt{2})\}^2+(-4\sqrt{6})^2}=8\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 PDH의 넓이를 S라 하면

$$S\geq\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DH}}\times d=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times\frac{8\sqrt{6}}{3}=\frac{64\sqrt{3}}{3}$$

즉, $k=\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\sqrt{3}k=\sqrt{3}\times\frac{64\sqrt{3}}{3}=64$$

답 64

참고
포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$의 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이다. 포물선 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면
$b^2=4pa$ …… ㉠
이고, 점 A에서의 접선을 l_1이라 하면
$l_1 : by=2p(x+a)$, $y=\dfrac{2p}{b}(x+a)$ …… ㉡
포물선과 두 점에서 만나는 원을 C라 하자. 제1사분면에서 원 C 위의 한 점 $\mathrm{Q}(s,\ t_2)$를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l_1과 만나는 점을 $\mathrm{R}(s,\ t_1)$이라 하면
$t_2\leq t_1$ (등호는 점 Q가 점 A와 일치할 때 성립)
이므로 직선 l_1은 원 C와 한 점 A에서 만난다. 즉, 직선 l_1은 원 C 위의 점 A에서의 접선이다.
원 C의 중심 C의 좌표를 $(c,\ 0)$ $(c>p)$라 하면 직선 l_1과 직선 AC는 서로 수직이므로
$\dfrac{2p}{b}\times\dfrac{0-b}{c-a}=-1$, $c=a+2p$ …… ㉢
한편, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{FC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{FC}}^2$이므로
$(c-a)^2+b^2=(c-p)^2$ …… ㉣
㉠, ㉢을 ㉣에 대입하면
$(2p)^2+4pa=(a+p)^2$, $a^2-2ap-3p^2=0$
$(a+p)(a-3p)=0$
$a>0$, $p>0$에서
$a+p>0$이므로 $a=3p$ …… ㉤
㉤을 ㉠, ㉢에 대입하면
$b=2\sqrt{3}p$ $(b>0)$, $c=5p$
즉, $\mathrm{A}(3p,\ 2\sqrt{3}p)$, $\mathrm{B}(3p,\ -2\sqrt{3}p)$, $\mathrm{C}(5p,\ 0)$
㉡, ㉤에서 $\mathrm{D}(-3p,\ 0)$이고, $\mathrm{B}(3p,\ -2\sqrt{3}p)$에서 $\mathrm{H}(-p,\ -2\sqrt{3}p)$이다.

21

기울기가 m이고 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$에 접하는 직선의 방정식은
$y=mx\pm\sqrt{25m^2+9}$ …… ㉠
기울기가 m이고 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$에 접하는 직선의 방정식은
$y=mx\pm\sqrt{16m^2+25}$ …… ㉡
㉠, ㉡이 같은 직선이므로
$\sqrt{25m^2+9}=\sqrt{16m^2+25}$
양변을 제곱하면
$25m^2+9=16m^2+25$
따라서 $m^2=\dfrac{16}{9}$

답 ②

22

타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$$1\times\frac{x}{4}+\frac{3}{2}\times\frac{y}{3}=1$$

$y=-\frac{1}{2}x+2$ ⋯⋯ ㉠

이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각

$(4,\ 0)$, $(0,\ 2)$

한편, 타원의 초점을 $\mathrm{F}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=4-3=1$, $c=1$

이므로 초점 F의 좌표는 $(-1,\ 0)$이고, 직선 CF의 기울기는

$\frac{0-2}{-1-0}=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 직선 l과 직선 CF는 서로 수직이다.

$\overline{\mathrm{BF}}=4-(-1)=5$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(0-4)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 DFB의 넓이는

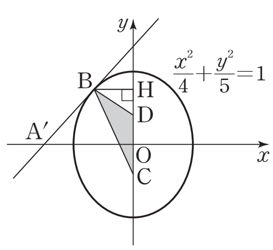
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DF}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times5\times2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

답 ⑤

23

점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 각각 점 $\mathrm{A}'(-3,\ 0)$, 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$로 옮겨진다.

이때 점 $\mathrm{A}'(-3,\ 0)$에서 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 그은 접선의 접점을 B라 하고, 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 C, D라 하면 삼각형 PF′F의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이와 같다.



점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 B에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{4}+\frac{by}{5}=1$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 점 $\mathrm{A}'(-3,\ 0)$을 지나므로

$\frac{a\times(-3)}{4}+\frac{b\times0}{5}=1$, $a=-\frac{4}{3}$

따라서 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BH}}=|a|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$ ⋯⋯ ㉡

한편, 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$의 초점을 $\mathrm{C}(0,\ -c)$, $\mathrm{D}(0,\ c)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=5-4=1$, $c=1$

$\mathrm{C}(0,\ -1)$, $\mathrm{D}(0,\ 1)$에서 $\overline{\mathrm{CD}}=2$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

이므로 삼각형 PF′F의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.

답 ②

24

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=2\times6=12$

두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=36-20=16$, $c=4$

$\overline{\mathrm{FF}'}=2c=2\times4=8$

$\overline{\mathrm{PF}'}=p$ $(0<p<6)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=12-p$

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{FPF}')=\frac{p^2+(12-p)^2-8^2}{2\times p\times(12-p)}=\frac{1}{7}$

$7(2p^2-24p+80)=24p-2p^2$

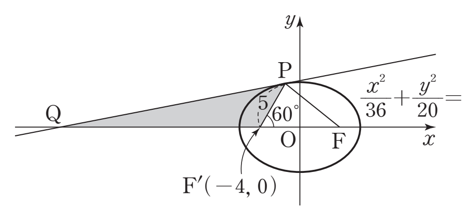
$(p-5)(p-7)=0$, $p=5$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}'}=5$, $\overline{\mathrm{PF}}=12-p=7$

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{PF'F})=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$

즉, $\angle\mathrm{PF'F}=60°$



따라서 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a=-4+5\times\cos60°=-4+5\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

$b=5\times\sin60°=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

즉, $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{1}{36}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times x+\frac{1}{20}\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times y=1$

$x-3\sqrt{3}y+24=0$

점 Q의 좌표는 $(-24,\ 0)$, 점 F′의 좌표는 $(-4,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{QF}'}=-4-(-24)=20$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 PQF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QF}'}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times20\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$

답 ⑤

25

기울기가 m이고 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은

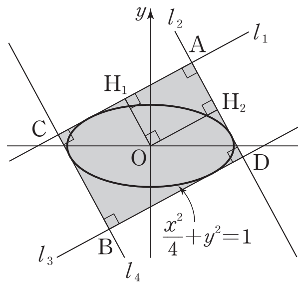
$y=mx\pm\sqrt{4m^2+1}$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지나는 경우

$2=m\times1\pm\sqrt{4m^2+1}$, $2-m=\pm\sqrt{4m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+4m-3=0$ ⋯⋯ ㉡



그림과 같이 점 A를 지나면서 기울기가 양수인 접선을 l_1이라 하고 점 A를 지나면서 기울기가 음수인 접선을 l_2라 하자.
두 접선 l_1, l_2의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하면 방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근이 m_1, m_2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-\frac{4}{3}$, $m_1m_2=-1$

$$\begin{aligned} m_1^2+m_2^2&=(m_1+m_2)^2-2m_1m_2 \\ &=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\times(-1)=\frac{34}{9} \end{aligned}$$

이때 $m_1m_2=-1$이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다.
한편, 점 B를 지나면서 기울기가 양수인 접선을 l_3이라 하고 점 B를 지나면서 기울기가 음수인 접선을 l_4라 하면 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$은 원점에 대하여 대칭이고, 두 점 A(1, 2), B(−1, −2)도 원점에 대하여 대칭이므로 두 직선 l_1, l_3은 서로 평행하고, 두 직선 l_2, l_4는 서로 평행하다.
따라서 사각형 ACBD는 직사각형이다. 원점 O에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 선분 OH_1, OH_2의 길이는 각각 원점 O와 직선 l_1, l_2 사이의 거리이다.

$l_1 : m_1x-y+\sqrt{4m_1^2+1}=0$
$l_2 : m_2x-y+\sqrt{4m_2^2+1}=0$
에서

$$\overline{OH_1}=\frac{\sqrt{4m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1}},\ \overline{OH_2}=\frac{\sqrt{4m_2^2+1}}{\sqrt{m_2^2+1}}$$

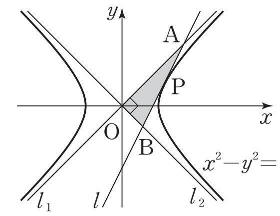
이때 직선 OH_1은 선분 AC의 수직이등분선이고 직선 OH_2는 선분 AD의 수직이등분선이므로 $\overline{AC}=2\overline{OH_2}$, $\overline{AD}=2\overline{OH_1}$이다.
따라서 구하는 사각형의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S&=\overline{AC}\times\overline{AD}=4\times(\overline{OH_1}\times\overline{OH_2}) \\ &=4\times\left(\frac{\sqrt{4m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1}}\times\frac{\sqrt{4m_2^2+1}}{\sqrt{m_2^2+1}}\right) \\ &=4\times\sqrt{\frac{16(m_1m_2)^2+4(m_1^2+m_2^2)+1}{(m_1m_2)^2+m_1^2+m_2^2+1}} \\ &=4\times\sqrt{\frac{16\times(-1)^2+4\times\frac{34}{9}+1}{(-1)^2+\frac{34}{9}+1}} \\ &=4\times\frac{17}{2\sqrt{13}}=\frac{34\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

답 ②

26

쌍곡선 $x^2-y^2=3$ 위의 점 P(2, 1)에서의 접선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은
$2\times x-1\times y=3$, 즉 $y=2x-3$
쌍곡선 $x^2-y^2=3$의 두 점근선의 방정식은
$y=x$, $y=-x$
두 점근선 $y=x$, $y=-x$를 각각 l_1, l_2라 하고 직선 l이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.



두 직선의 방정식 $y=2x-3$, $y=x$를 연립하여 풀면 $x=3$, $y=3$이므로 접선 l과 점근선 l_1의 교점 A의 좌표는 (3, 3)이고, 두 직선의 방정식 $y=2x-3$, $y=-x$를 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$이므로 접선 l과 점근선 l_2의 교점 B의 좌표는 (1, −1)이다.
두 점근선 l_1, l_2는 서로 수직이므로 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3^2+3^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}=3$$

답 ②

27

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$과 직선 l이 제1사분면에서 접하므로 직선 l의 기울기를 m $(m>0)$이라 하면 직선 l의 방정식은
$y=mx-\sqrt{9m^2-7}$, $mx-y-\sqrt{9m^2-7}=0$
원점과 직선 l 사이의 거리가 $\frac{9}{5}$이므로

$$\frac{|m\times0-0-\sqrt{9m^2-7}|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{9}{5}$$

$25(9m^2-7)=81(m^2+1)$, $m^2=\frac{16}{9}$
따라서 $m=\frac{4}{3}$ $(m>0)$

답 ⑤

다른 풀이

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$과 직선 l이 제1사분면에서 접하는 점을 P(a, b) $(a>0, b>0)$이라 하면 점 P(a, b)는 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{7}=1$

$7a^2-9b^2=63$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선 l의 방정식은

$\frac{ax}{9}-\frac{by}{7}=1$ …… ㉡

$7ax-9by-63=0$
원점과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|7a\times0-9b\times0-63|}{\sqrt{(7a)^2+(-9b)^2}}=\frac{9}{5}$$

$49a^2+81b^2=1225$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $a=4$, $b=\frac{7}{3}$
따라서 직선 l의 기울기는 ㉡에서

$$\frac{7a}{9b}=\frac{7\times4}{9\times\frac{7}{3}}=\frac{4}{3}$$

28

삼각형 PAB에서 n의 값이 커질수록 $\angle$APB의 크기는 감소한다.

점 P$(0,\ n)$에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{45}-\dfrac{y^2}{20}=1$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{45m^2-20}$

이 접선이 점 $(0,\ n)$을 지나므로

$n=m\times0\pm\sqrt{45m^2-20}$, $45m^2-n^2-20=0$ ······ ㉠

점 P에서 쌍곡선에 그은 두 접선을 l_1, l_2라 하고 두 접선 l_1, l_2의 기울기를 각각 m_1, m_2 $(m_2<m_1)$이라 하면 m_1, m_2는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=-\dfrac{n^2+20}{45}$

이때 두 접선 l_1, l_2가 서로 수직이면

$m_1m_2=-1$에서 $-\dfrac{n^2+20}{45}=-1$, $n=5$ (n은 자연수)

$\sqrt{45m^2-20}=5$

에서 $m=\pm1$이므로 두 접선의 방정식은

$y=-x+5$, $y=x+5$

즉, 점 $(0,\ 5)$에서 쌍곡선에 그은 두 접선 $y=-x+5$, $y=x+5$는 서로 수직이다. 점 P에서 쌍곡선에 그은 두 접선 l_1, l_2의 접점을 각각 A, B라 하면 n이 자연수이므로 다음이 성립한다.

(i) $1\le n\le4$이면 $\angle\mathrm{APB}>90^\circ$

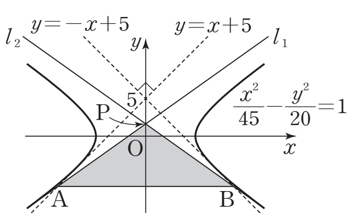
(ii) $n=5$이면 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

(iii) $n\ge6$이면 $0^\circ<\angle\mathrm{APB}<90^\circ$

이때 삼각형 PAB는 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PBA}<90^\circ$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때 삼각형 PAB는 둔각삼각형이 된다.



따라서 구하는 자연수 n의 개수는 4이다.

답 ②

참고

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{45}-\dfrac{y^2}{20}=1$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 y축 위의 점 P$(0,\ n)$에서 그은 두 접선이 수직이면 두 접선의 기울기는 -1, 1이다.

쌍곡선에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{45m^2-20}$이므로 두 접선 l_1, l_2는

$m=1$일 때 l_1: $y=x+5$

$m=-1$일 때 l_2: $y=-x+5$

즉, 점 P$(0,\ 5)$에서 쌍곡선에 그은 두 접선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

29

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{b^2}{20}=1$ ······ ㉠

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$ 위의 점 P$(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{ax}{16}-\dfrac{by}{20}=1$ ······ ㉡

이고, 직선 ㉡이 점 A$\left(0,\ -\dfrac{4}{3}\right)$를 지나므로

$\dfrac{a}{16}\times0-\dfrac{b}{20}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=1$, $b=15$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a>0$이므로

$\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{15^2}{20}=1$, $a=14$

즉, 점 P의 좌표는 $(14,\ 15)$

한편, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=16+20=36$, $c=6$

즉, F$(6,\ 0)$, F′$(-6,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(-6-14)^2+(0-15)^2}=25$

$\overline{\mathrm{F'F}}=6-(-6)=12$

$\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{(14-6)^2+(15-0)^2}=17$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{FP}}=25+12+17=54$

답 ④

참고

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(-6-14)^2+(0-15)^2}=25$에서

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\times4=8$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}-8=25-8=17$

30

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$에서의 접선의 기울기를 m $(m>1)$이라 하면 접선 l의 방정식은

$y-2\sqrt{2}=m(x-2\sqrt{2})$

$mx-y+2\sqrt{2}(1-m)=0$ ······ ㉠

원점 O와 직선 l 사이의 거리가 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$이므로

$\dfrac{|2\sqrt{2}(1-m)|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

$\sqrt{5}|1-m|=\sqrt{m^2+1}$ ······ ㉡

㉡의 양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2-5m+2=0$, $(2m-1)(m-2)=0$

$m>1$이므로 $m=2$ ······ ㉢

㉠, ㉢에서 접선 l의 방정식은

$2x-y-2\sqrt{2}=0$ ······ ㉣

한편, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$에서의 접선 l의 방정식은

$\dfrac{2\sqrt{2}x}{a^2}-\dfrac{2\sqrt{2}y}{b^2}=1$, $\dfrac{8x}{a^2}-\dfrac{8y}{b^2}=2\sqrt{2}$ ······ ㉤

㉣, ㉤의 두 접선은 서로 같으므로

$a^2=4$, $b^2=8$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=4+8=12$, $c=2\sqrt{3}$

두 점 $\mathrm{F}(2\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2\sqrt{3},\ 0)$과 직선 $2x-y-2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리가 각각 $\overline{\mathrm{H_1F}}$, $\overline{\mathrm{H_2F'}}$이므로

$$\overline{\mathrm{H_1F}}=\frac{|2\times2\sqrt{3}-0-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{\mathrm{H_2F'}}=\frac{|2\times(-2\sqrt{3})-0-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{H_1F}}+\overline{\mathrm{H_2F'}}=\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{15}}{5}$$

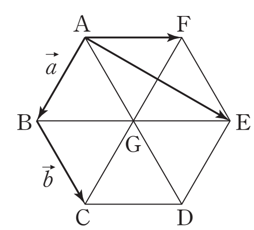
답 ①

08 평면벡터

정답 본문 102~111쪽

01 ④	02 ④	03 12	04 ⑤	05 ⑤
06 ②	07 ②	08 ④	09 ①	10 ②
11 ②	12 ④	13 ①	14 ②	15 48
16 ④	17 ②	18 ③	19 ③	20 ②
21 ⑤	22 ⑤	23 12	24 ②	25 ⑤
26 45	27 ④			

01



정육각형 ABCDEF에서 세 선분 AD, BE, CF의 교점을 G라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\vec{a}+2(\vec{b}-\vec{a})=2\vec{b}-\vec{a}$

따라서

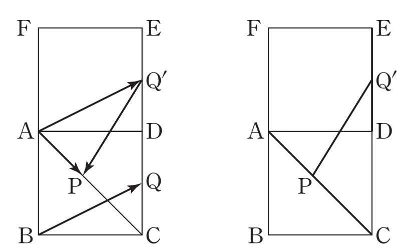
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(2\vec{b}-\vec{a})+(\vec{b}-\vec{a})=-2\vec{a}+3\vec{b}$

에서 $k=-2$, $l=3$이므로

$k+l=-2+3=1$

답 ④

02



그림과 같이 정사각형 ADEF가 정사각형 ABCD와 변 AD가 일치하도록 하고 선분 DE 위에 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}$이 되도록 점 Q′을 정하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{Q'P}}|$

이다. 즉, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 값은 선분 AC 위의 점 P, 선분 DE 위의 점 Q′이 정해질 때 선분 PQ′의 길이이다.

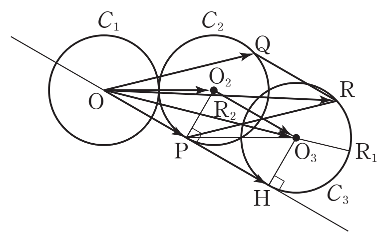
이때 선분 PQ′의 길이는 두 점 P, Q′이 각각 두 점 C, E와 일치할 때 최댓값 2를 갖고, 두 점 P, Q′이 각각 선분 AC의 중점, 점 D와 일치할 때 최솟값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 갖는다.

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}\le|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\le2$에서 $M=2$, $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $M\times m=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

답 ④

03



원 C_2의 중심을 O_2라 하고

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OO_2}=\overrightarrow{OO_3}$

을 만족시키는 점을 O_3이라 하자.

점 O_3을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C_3이라 하면

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$

를 만족시키는 점 R는 원 C_3 위의 점이다.

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 $|\overrightarrow{OR}|$의 값과 같으므로 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값, 최솟값은 선분 OR의 길이의 최댓값, 최솟값과 같다. 직선 OO_3이 원 C_3과 만나는 두 점을 R_1, R_2 ($\overline{OR_2}<\overline{OR_1}$)이라 하면 점 R가 점 R_1과 일치할 때 선분 OR의 길이는 최대이고, 점 R가 점 R_2와 일치할 때 선분 OR의 길이는 최소이다.

직각삼각형 OPO_2에서 $\overline{OO_2}=2$, $\overline{O_2P}=1$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OO_2}^2-\overline{O_2P}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

점 O_3에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{O_2O_3}=\overrightarrow{OP}$이므로

$\overline{PH}=\overline{OP}=\sqrt{3}$

직각삼각형 O_3OH에서

$\overline{OH}=\overline{OP}+\overline{PH}=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{OO_3}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{O_3H}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}$

따라서

$M=\overline{OR_1}=\overline{OO_3}+\overline{O_3R_1}=\sqrt{13}+1$,

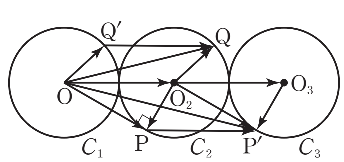
$m=\overline{OR_2}=\overline{OO_3}-\overline{O_3R_2}=\sqrt{13}-1$

이므로

$M\times m=(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1)=13-1=12$

답 12

다른 풀이



원 C_2의 중심을 O_2라 할 때, $\overrightarrow{OO_2}=\overrightarrow{O_2O_3}$을 만족시키는 점 O_3을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C_3이라 하자.

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2P})+(\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2Q})$

$=2\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2P}+\overrightarrow{O_2Q}$

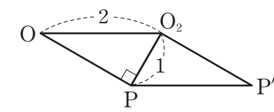
$=\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{O_2P}+\overrightarrow{O_2Q}$

이때 $\overrightarrow{O_2P}=\overrightarrow{O_3P'}$, $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{OQ'}$을 만족시키도록 두 점 P′, Q′을 정하면

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{O_3P'}+\overrightarrow{OQ'}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}$ …… ㉠

한편, 삼각형 OPO_2에서 $\angle OPO_2=90°$, $\overline{OO_2}=2$, $\overline{O_2P}=1$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{3}$, $\angle PO_2O=60°$



평행사변형 $OPP'O_2$에서

$\overline{O_2P'}=\overline{OP}=\sqrt{3}$, $\angle P'O_2P=\angle OPO_2=90°$ (엇각)이므로

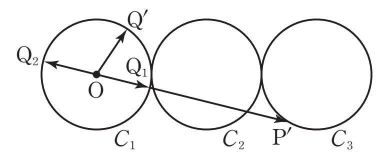
$\angle P'O_2O=\angle P'O_2P+\angle PO_2O=90°+60°=150°$

삼각형 $OP'O_2$에서 $|\overrightarrow{OP'}|=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$x^2=2^2+(\sqrt{3})^2-2\times2\times\sqrt{3}\times\cos 150°$

$=4+3-4\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4+3+6=13$

$x=\sqrt{13}$, 즉 $|\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{13}$



직선 OP′이 원 C_1과 만나는 두 점을 Q_1, Q_2 ($\overline{P'Q_1}<\overline{P'Q_2}$)라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OQ'}$ ($|\overrightarrow{OQ'}|=1$)의 크기는 항상 일정하고, ㉠에서

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}|$이므로

$|\overrightarrow{OP'}|-|\overrightarrow{OQ_2}|\le|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|\le|\overrightarrow{OP'}|+|\overrightarrow{OQ_1}|$

즉, $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 점 Q′이 점 Q_1과 일치할 때 최대이고 점 Q_2와 일치할 때 최소이다.

따라서

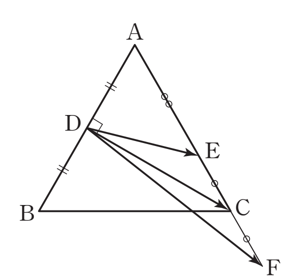
$M=|\overrightarrow{OP'}|+|\overrightarrow{OQ_1}|=\sqrt{13}+1$,

$m=|\overrightarrow{OP'}|-|\overrightarrow{OQ_2}|=\sqrt{13}-1$

이므로

$M\times m=(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1)=13-1=12$

04



변 AC를 2 : 1로 내분하는 점과 4 : 1로 외분하는 점이 각각 E, F이므로 점 C는 선분 EF의 중점이다.

$|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}|=2\left|\frac{\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}}{2}\right|=2|\overrightarrow{DC}|=2\overline{CD}$

이때 삼각형 ABC는 정삼각형이고 점 D는 변 AB의 중점이므로

$\overline{CD}=\overline{AC}\times\sin 60°=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 $|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}|=2\overline{CD}=2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

답 ⑤

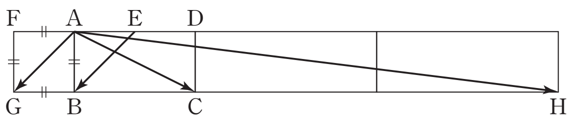
참고

$\overrightarrow{DE}=\frac{2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}}{2+1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$,

$\overrightarrow{DF}=\frac{4\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}}{4-1}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$이므로

$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\right)+\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\right)=2\overrightarrow{DC}$

05



평면에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 AFGB가 직사각형 ABCD와 변 AB가 일치하도록 하고 선분 GC를 3 : 2로 외분하는 점을 H라 하면

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{EB}$

이므로

$3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AG}=\frac{3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AG}}{3-2}=\overrightarrow{AH}$

이때 $\overline{AB}=1$이고

$\overline{BH}=\overline{GH}-\overline{GB}=3\times\overline{GC}-\overline{GB}=3\times3-1=8$이므로

$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BH}^2}=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$

따라서

$|3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{EB}|=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{65}$

답 ⑤

06

$3\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AF}$에서

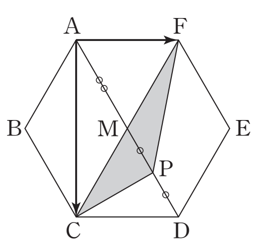
$3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\times\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}}{2}$

선분 CF의 중점을 M이라 하면 $\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}}{2}=\overrightarrow{AM}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$

즉, 점 P는 선분 AM을 3 : 1로 외분하는 점이다.



이때 삼각형 PFM의 넓이는 삼각형 PMC의 넓이와 같고 삼각형 PMC의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정삼각형 MCD의 넓이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$의 $\frac{1}{2}$이므로 삼각형 PFC의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ②

07

좌표평면의 원점을 O라 하면

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,\ 4)-(1,\ 0)=(1,\ 4)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(4,\ 2)-(2,\ 4)=(2,\ -2)$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(1,\ 4)-(2,\ -2)=(-1,\ 6)$

따라서 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{37}$

답 ②

08

좌표평면의 원점을 O라 하고, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,\ 0)-(0,\ -1)=(1,\ 1)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(0,\ 1)-(0,\ -1)=(0,\ 2)$,

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=(a,\ b)-(0,\ 1)=(a,\ b-1)$

이므로

$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$(a,\ b-1)=2(1,\ 1)+(0,\ 2)=(2,\ 4)$

$a=2$, $b=5$에서 $\overrightarrow{OP}=(2,\ 5)$이므로

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(2,\ 5)-(1,\ 0)=(1,\ 5)$

따라서 $|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

답 ④

09

직선 $2x-y+4=0$ 위의 점 P의 좌표를 $(s,\ 2s+4)$ (s는 실수)라 하고, 곡선 $y=-x^2+2$ 위의 점 Q의 좌표를 $(t,\ -t^2+2)$ (t는 실수)라 하면

$2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=2(s,\ 2s+4)-(t,\ -t^2+2)$

$=(2s,\ 4s+8)-(t,\ -t^2+2)$

$=(2s-t,\ 4s+t^2+6)$ …… ㉠

한편,

$2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2(1,\ 1)-(2,\ 1)$

$=(2,\ 2)-(2,\ 1)=(0,\ 1)$ …… ㉡

$2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=k(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$이므로 ㉠, ㉡에서

$(2s-t,\ 4s+t^2+6)=k(0,\ 1)=(0,\ k)$

$2s-t=0$, $4s+t^2+6=k$

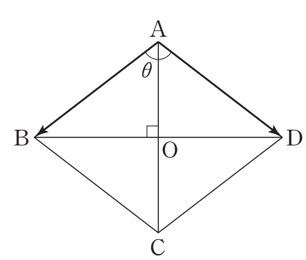
$2s=t$에서

$k=4s+t^2+6=2t+t^2+6=(t+1)^2+5\geq5$

따라서 k의 최솟값은 5이다.

답 ①

10



마름모 ABCD에서 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로 마름모 ABCD의 두 대각선의

교점을 O라 하면 직각삼각형 ABO에서

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times 8=4$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=5$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BD}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{5^2+5^2-8^2}{2\times5\times5}=-\frac{7}{25}$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cos\theta=5\times5\times\left(-\frac{7}{25}\right)=-7$

답 ②

11

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}})+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}$

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|=k$라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\times\overline{\mathrm{MB}}=2\times|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|=2k$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2=(2k)^2=4k^2$

이고 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-\overrightarrow{\mathrm{MB}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{MB}})=-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2=-k^2$

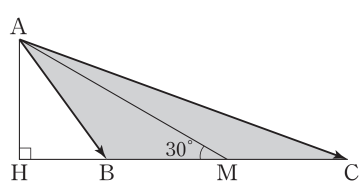
이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}})+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$

$=4k^2-k^2=3k^2=48$

$k^2=16$



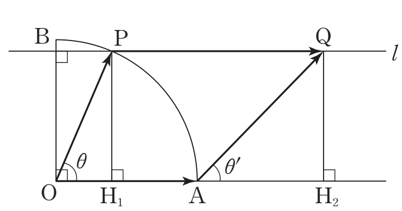
점 A에서 선분 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\times(|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\times\sin 30^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times2k\times\left(2k\times\frac{1}{2}\right)=k^2=16$

답 ②

12



두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 서로 평행하므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기도 θ이다.

즉, $\angle\mathrm{POA}=\theta$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2$, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=3$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta=2\times3\times\cos\theta=2$

$\cos\theta=\frac{1}{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하고 두 점 P, Q에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cos\theta'=2\times|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cos\theta'=2\times\overline{\mathrm{AH_2}}$

한편,

$\overline{\mathrm{H_1A}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH_1}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OP}}\times\cos\theta=2-2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$\overline{\mathrm{AH_2}}=\overline{\mathrm{H_1H_2}}-\overline{\mathrm{H_1A}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{H_1A}}=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\times\overline{\mathrm{AH_2}}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$

답 ④

다른 풀이

위의 그림을 이용하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OH_1}}\times\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{OH_1}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OH_1}}\times3=2$에서

$\overline{\mathrm{OH_1}}=\frac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{AH_2}}=\overline{\mathrm{OH_2}}-\overline{\mathrm{OA}}=(\overline{\mathrm{OH_1}}+\overline{\mathrm{H_1H_2}})-\overline{\mathrm{OA}}=(\overline{\mathrm{OH_1}}+\overline{\mathrm{PQ}})-\overline{\mathrm{OA}}$

$=\left(\frac{2}{3}+3\right)-2=\frac{5}{3}$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AH_2}}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$

13

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3, 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1, 3)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(a-2, b+1)$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$에서

$3+1=a-2$, $2+3=b+1$

즉, $a=6$, $b=4$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(6, 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2, 1)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(6, 4)\cdot(-2, 1)=-12+4=-8$

답 ①

14

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 t에 대하여

$\vec{b}=t\vec{a}$

$(k, k+2)=(t, tk)$에서 $k=t$, $k+2=tk$

$k+2=k^2$이므로 $(k-2)(k+1)=0$

$k=2$ 또는 $k=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$(1, k)\cdot(k^2, 1)=0$에서 $k^2+k=k(k+1)=0$

$k=0$ 또는 $k=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 k의 값은 -1이다.

답 ②

15

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$에서 $\cos\theta=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{4}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3k+3k}{\sqrt{1+k^2}\times 3\sqrt{k^2+1}}=\frac{2k}{k^2+1}$

$k^2+1=8k$ ······ ㉠

$k\neq 0$이므로 ㉠의 양변을 k로 나누면

$k+\frac{1}{k}=8$

따라서

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\vec{c}&=(3k,\ 3)\cdot\left(2,\ \frac{2}{k}\right)\\&=6k+\frac{6}{k}=6\left(k+\frac{1}{k}\right)\\&=6\times 8=48\end{aligned}$$

답 48

16

$\overrightarrow{AB}=(3,\ -5)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ a)$에서

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-4,\ a+5)$

(i) $\angle A=90^\circ$인 경우

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$이므로

$(3,\ -5)\cdot(-1,\ a)=-3-5a=0$, $a=-\frac{3}{5}$

(ii) $\angle B=90^\circ$인 경우

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로

$(3,\ -5)\cdot(-4,\ a+5)=-5a-37=0$, $a=-\frac{37}{5}$

(iii) $\angle C=90^\circ$인 경우

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로

$(-1,\ a)\cdot(-4,\ a+5)=4+a^2+5a=0$

$(a+1)(a+4)=0$

$a=-1$ 또는 $a=-4$

(i), (ii), (iii)에서 모든 a의 값의 합은

$\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{37}{5}\right)+(-1)+(-4)=-13$

답 ④

17

조건 (가)에서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기는 180°이다.

즉, 음의 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{OB}=t\overrightarrow{OA}$이고 $\overrightarrow{OA}=(2,\ 1)$, $\overrightarrow{OB}=(a,\ b)$이므로 $a=2t$, $b=t$

또한 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-10$이므로

$(2,\ 1)\cdot(2t,\ t)=-10$

$5t=-10$, $t=-2$

즉, $\overrightarrow{OB}=(-4,\ -2)$

한편, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(0,\ c)-(-4,\ -2)=(4,\ c+2)$

이고 조건 (나)에서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로

$(2,\ 1)\cdot(4,\ c+2)=0$, $8+c+2=0$, $c=-10$

즉, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(2,\ 1)-(0,\ -10)=(2,\ 11)$

따라서 $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{2^2+11^2}=5\sqrt{5}$

답 ②

18

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$에서

$(4,\ 3)\cdot(a-3,\ b+1)=4$, $4(a-3)+3(b+1)=4$

$4a+3b=13$ ······ ㉠

즉, 점 C는 직선 $4x+3y=13$ 위의 점이다.

점 C의 개수가 1이므로 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $4x+3y=13$은 점 C에서 접해야 한다.

즉, 원의 반지름의 길이는 원의 중심인 $O(0,\ 0)$과 직선 $4x+3y=13$ 사이의 거리와 같다.

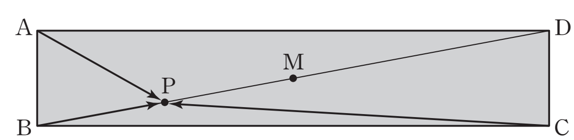
따라서 $r=\frac{|-13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{13}{5}$

답 ③

19

$\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$라 하면 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 14이므로

$a+b=7$ ······ ㉠



$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}$이고 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP})\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP})\\&=0+\overrightarrow{BP}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BP})\\&=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}\\&=-|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{DP}|\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{BD}|=k$, $|\overrightarrow{BP}|=x$라 하면 $|\overrightarrow{DP}|=k-x$이므로

$$\begin{aligned}-|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{DP}|&=-x(k-x)\\&=x^2-kx\\&=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}$는 $x=\frac{k}{2}$, 즉 점 P가 선분 BD의 중점 M과 일치할 때 최솟값 $-\frac{k^2}{4}$을 갖는다.

$-\frac{k^2}{4}=-9$에서 $k>0$이므로 $k=6$

$a^2+b^2=6^2=36$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{7^2-36}{2}=\frac{13}{2}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{13}{2}$이다.

답 ③

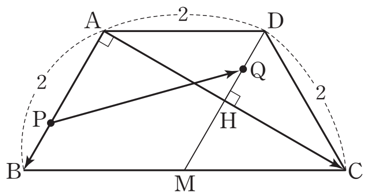
20

$\angle BAD = \angle CDA = 120°$이고 $\overline{AD} = \overline{CD}$에서

$\angle DAC = \angle DCA = 30°$이므로 $\angle BAC = 90°$

즉, $\overline{AC} = \overline{AB} \times \tan(\angle ABC) = 2\tan 60° = 2\sqrt{3}$

$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, $\overline{BD} = \overline{AC}$이므로 $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$



이때 $\angle BAC = 90°$이므로 변 AB 위의 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발은 항상 A이다. 점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HQ}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$$
$$= |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{3}|\overrightarrow{AH}| = 6$$

에서 $|\overrightarrow{AH}| = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$이므로 점 H는 선분 AC의 중점이고, 삼각형 DAC가 $\overline{AD} = \overline{CD}$인 이등변삼각형이므로 선분 DH와 선분 AC는 서로 수직이다.

즉, 그림과 같이 직선 DH와 선분 BC가 만나는 점을 M이라 할 때, 점 Q는 직선 DH 위에 있고 동시에 사각형 ABCD의 둘레 또는 내부에 있으므로 선분 DM 위에 있다. 이때 $\angle CDM = \angle MCD = 60°$이므로 삼각형 DMC는 정삼각형이다. $\overline{MC} = 2$이므로 $\overline{BM} = 4 - 2 = 2$이고 $\angle ABM = 60°$이므로 삼각형 ABM도 정삼각형이다.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ}$는 두 점 P, Q가 각각 A, M에 있을 때 최댓값

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|\cos(\angle BAM) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

를 갖고, 두 점 P, Q가 각각 B, D에 있을 때 최솟값

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|\cos(180° - \angle ABD)$$
$$= 2 \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6$$

을 갖는다. 따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$2 \times (-6) = -12$

답 ②

21

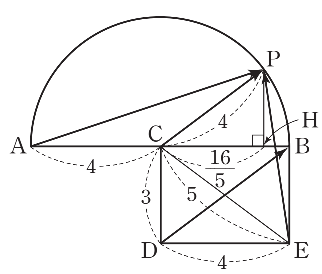
직사각형 CDEB에서 $\overline{CB} = 4$, $\overline{CD} = 3$이므로

$\overline{DB} = \overline{CE} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CP}$이므로

$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CP}$

이때 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC}$는 고정된 값이므로 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CP}$의 값이 최대일 때 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EP}$의 값도 최대이다.



점 P의 위치에 관계없이 항상 $|\overrightarrow{CP}| = 4$이므로 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CP}$의 값이 최대일 때는 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CP}$가 같은 방향일 때이다.

이때 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PCH와 삼각형 BDE는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{PC} : \overline{CH} = \overline{BD} : \overline{DE}$

$\overline{CH} = \frac{1}{5} \times 4 \times 4 = \frac{16}{5}$

따라서

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) \cdot \overrightarrow{CP}$$
$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CP} + |\overrightarrow{CP}|^2$$
$$= |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CH}| + |\overrightarrow{CP}|^2$$
$$= 4 \times \frac{16}{5} + 4^2$$
$$= \frac{144}{5}$$

답 ⑤

22

두 직선 $\frac{x-3}{2} = y+1$, $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1} = (2, 1)$, $\vec{u_2} = (3, 4)$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$$
$$= \frac{|2 \times 3 + 1 \times 4|}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$= \frac{10}{5\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

따라서 $\cos^2\theta = \frac{4}{5}$

답 ⑤

23

점 H의 좌표를 (a, b)라 하면 점 H는 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3}$ 위의 점이므로

$\frac{a+1}{2} = \frac{b-2}{3}$, $3a - 2b + 7 = 0$ …… ㉠

또 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u} = (2, 3)$이고 $\vec{u} \perp \overrightarrow{AH}$이므로

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = (2, 3) \cdot (a-7, b-1)$$
$$= 2(a-7) + 3(b-1)$$
$$= 2a + 3b - 17 = 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a = 1$, $b = 5$

따라서 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = (7, 1) \cdot (1, 5) = 7 + 5 = 12$

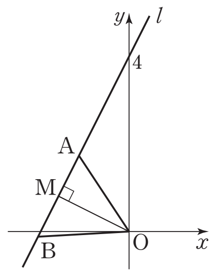
답 12

24

직선 l의 방정식은

$\frac{x-0}{1} = \frac{y-4}{2}$, $2x - y + 4 = 0$

이다.



변 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 OAB는 정삼각형이므로

$\overline{\text{OM}} \perp l$이다.

즉, 선분 OM의 길이는 원점과 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\text{OM}} = \dfrac{|4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

정삼각형 OAB의 한 변의 길이를 a라 하면 이 정삼각형의 높이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

따라서 $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{4\sqrt{5}}{5} = \dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

답 ②

25

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{\text{AP}} = (x-1, y+2)$, $\overrightarrow{\text{BP}} = (x-3, y-4)$이므로

$\overrightarrow{\text{AP}} \cdot \overrightarrow{\text{BP}} = |\overrightarrow{\text{AB}}|^2$에서

$(x-1, y+2) \cdot (x-3, y-4) = (3-1)^2 + (4+2)^2$

$x^2 - 4x + 3 + y^2 - 2y - 8 = 40$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 50$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, 1)$이고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원이므로 넓이는

$\pi \times (5\sqrt{2})^2 = 50\pi$

답 ⑤

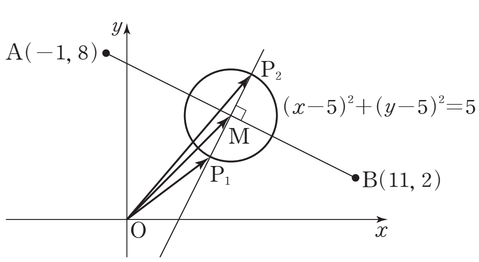
26

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{\text{PA}} + \overrightarrow{\text{PB}} = 2\overrightarrow{\text{PM}}$이므로

$|\overrightarrow{\text{PA}} + \overrightarrow{\text{PB}}| = 2\sqrt{5}$에서 $|\overrightarrow{\text{PM}}| = \sqrt{5}$

즉, 점 P는 점 M(5, 5)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위의 점이므로 원 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5$ 위의 점이다.

또한 $|\overrightarrow{\text{PA}}| = |\overrightarrow{\text{PB}}|$에서 점 P는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이다.



즉, 두 점 P_1, P_2는 원의 지름의 양 끝 점이므로

$\overrightarrow{\text{MP}_2} = -\overrightarrow{\text{MP}_1}$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OP}_1} \cdot \overrightarrow{\text{OP}_2} &= (\overrightarrow{\text{OM}} + \overrightarrow{\text{MP}_1}) \cdot (\overrightarrow{\text{OM}} + \overrightarrow{\text{MP}_2}) \\ &= (\overrightarrow{\text{OM}} + \overrightarrow{\text{MP}_1}) \cdot (\overrightarrow{\text{OM}} - \overrightarrow{\text{MP}_1}) \\ &= |\overrightarrow{\text{OM}}|^2 - |\overrightarrow{\text{MP}_1}|^2 \\ &= (5^2+5^2) - (\sqrt{5})^2 = 45\end{aligned}$$

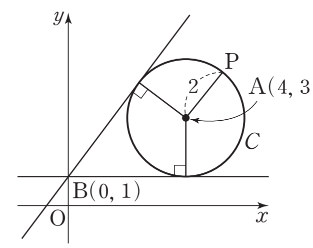
답 45

27

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$|\vec{p} - \vec{a}| = 2$에서 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 4$

즉, $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$이므로 C는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.



그림과 같이 점 B(0, 1)을 지나고 원 C에 접하는 직선의 기울기를 m이라 하면 점 A와 직선 $y = mx + 1$ 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$\dfrac{|4m - 3 + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$

$|4m - 2| = 2\sqrt{m^2 + 1}$

$4m^2 - 4m + 1 = m^2 + 1$

$3m^2 - 4m = 0$

$m(3m - 4) = 0$

$m = 0$ 또는 $m = \dfrac{4}{3}$

따라서 점 B(0, 1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (s, t)$인 직선이 원 C와 만나도록 하는 두 양수 s, t에 대하여 $0 < \dfrac{t}{s} \le \dfrac{4}{3}$이므로 $\dfrac{t}{s}$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

답 ④

09 공간도형과 공간좌표

정답 본문 116~128쪽

01 ④	02 10	03 ④	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 63	08 ②	09 ②	10 ④
11 ④	12 ⑤	13 25	14 135	15 ⑤
16 ⑤	17 ②	18 ①	19 7	20 12
21 18	22 ①	23 ②	24 ④	25 ①
26 ③	27 ⑤	28 6	29 41	30 ②
31 ②	32 ③	33 ②	34 28	

01

6개의 꼭짓점 중 세 개 이상의 점으로 결정할 수 있는 서로 다른 평면의 개수는 꼭짓점 6개 중 3개를 선택하는 경우에서 정오각형 BCDEF의 5개의 꼭짓점 중 3개를 선택하는 경우를 제외하고 정오각형 BCDEF로 결정되는 평면의 개수 1을 더한 것과 같으므로

$a={}_6C_3-{}_5C_3+1=20-10+1=11$

또 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 BC와 한 점에서 만나는 직선은 직선 AB, AC, CD, DE, EF, FB로 그 개수는 6이다.

즉, $b=6$

따라서 $a+b=11+6=17$

답 ④

02

모서리를 포함하는 직선 중 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 BH, CI, EK, FL, GH, IJ, JK, LG

로 그 개수가 8이므로 $a=8$

직선 AJ와 평행한 평면은

평면 BHIC, 평면 FLKE

로 그 개수가 2이므로 $b=2$

따라서 $a+b=8+2=10$

답 10

03

선분 AB의 길이를 a라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{2}a$

삼각형 ADC에서 $\overline{DC}=\sqrt{a^2+2a^2}=\sqrt{3}a$

정사각형 BEFC에서 $\overline{CE}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

직선 AB와 직선 DE는 평행하므로 직선 AB와 직선 CD가 이루는 예각의 크기는 직선 DE와 직선 CD가 이루는 예각의 크기와 같고, 직선 AB와 직선 CE가 이루는 예각의 크기는 직선 DE와 직선 CE가 이루는 예각의 크기와 같다.

이때 $\overline{DC}^2=3a^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2$에서 삼각형 CDE는 $\angle DEC=90°$인 직각삼각형이므로

$\sin\alpha=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{DC}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\beta=\sin 90°=1$

따라서 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$

답 ④

04

ㄱ. 두 점 M, N은 각각 두 선분 AB, BC의 중점이므로 직선 MN과 직선 AC는 평행하다. 이때 직선 AC와 직선 EF가 평행하므로 직선 MN과 직선 EF도 평행하다. 직선 MN은 직선 EF가 포함된 평면 DEF와 만나지 않으므로 직선 MN은 평면 DEF와 평행하다. (참)

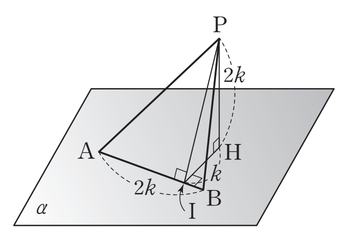
ㄴ. 직선 MN이 직선 AC와 평행하고 직선 AC와 직선 AD가 이루는 예각의 크기는 60°이므로 직선 MN과 직선 AD가 이루는 예각의 크기도 60°이다. (참)

ㄷ. 직선 MN이 직선 AC와 평행하고 직선 AC는 평면 ACFE 위에 있다. $\overline{BD}\perp\overline{AF}$, $\overline{BD}\perp\overline{CE}$이므로 직선 BD와 평면 ACFE는 서로 수직이고 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이다.
따라서 $\overline{MN}\perp\overline{BD}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05



점 H에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{HI}=k$, $\overline{PH}=2k$이므로 직각삼각형 PIH에서

$\overline{PI}^2=\overline{PH}^2+\overline{HI}^2=(2k)^2+k^2=5k^2$

즉, $\overline{PI}=\sqrt{5}k$

또한 $\overline{HI}\perp\overline{AB}$, $\overline{PH}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI}\perp\overline{AB}$이다.

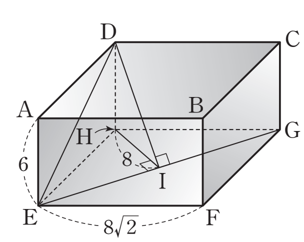
삼각형 PAB의 넓이가 20이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PI}=\dfrac{1}{2}\times 2k\times\sqrt{5}k=\sqrt{5}k^2=20$

따라서 $k^2=4\sqrt{5}$

답 ⑤

06



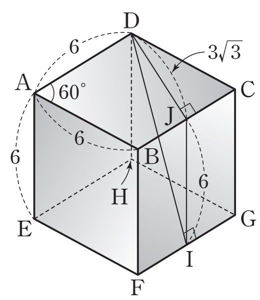
점 H에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면 사각형 EFGH가 한 변의 길이가 $8\sqrt{2}$인 정사각형이므로

$\overline{HI}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=8$

삼수선의 정리에 의하여 선분 DI는 선분 EG와 수직이다.
즉, 점 D와 직선 EG 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{DI}}=\sqrt{6^2+8^2}=10$
또 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DG}}=\sqrt{6^2+(8\sqrt{2})^2}=2\sqrt{41}$이므로 선분 EG 위의 점 P에 대하여 $10\le\overline{\mathrm{DP}}\le2\sqrt{41}$이다.
$2\sqrt{41}=\sqrt{164}$이고 $12<\sqrt{164}<13$이므로 자연수인 선분 DP의 길이는 10, 11, 12의 세 가지이고 각 경우 점 P의 개수는
선분 DP의 길이가 10인 경우 1, 선분 DP의 길이가 11인 경우 2,
선분 DP의 길이가 12인 경우 2이다.
따라서 조건을 만족시키는 점 P의 개수는 5이다.

답 ③

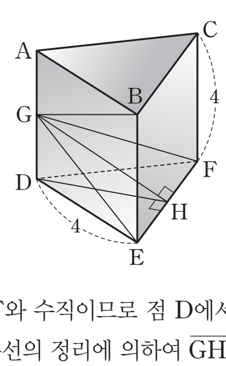
07



평면 ABCD와 평면 BFGC는 서로 수직이고, 두 평면의 교선이 직선 BC이므로 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면 선분 DJ는 평면 BFGC에 수직이다.
$\angle\mathrm{DCB}=60^\circ$이고 $\overline{\mathrm{DC}}=6$이므로
$\overline{\mathrm{DJ}}=\overline{\mathrm{CD}}\times\sin 60^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$
점 J에서 선분 FG에 내린 수선의 발은 삼수선의 정리에 의하여 점 I이므로 $\overline{\mathrm{JI}}=6$
이때 삼각형 DIJ는 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{DI}}^2=\overline{\mathrm{DJ}}^2+\overline{\mathrm{JI}}^2=(3\sqrt{3})^2+6^2=27+36=63$

답 63

08

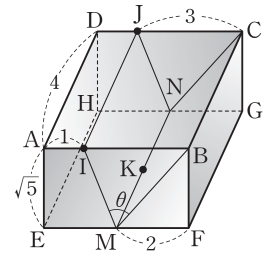


선분 GD는 평면 DEF와 수직이므로 점 D에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{GH}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$
평면 GEF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기가 30°이므로
$\angle\mathrm{GHD}=30^\circ$
삼각형 DEF가 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로
$\overline{\mathrm{DH}}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$
즉, $\overline{\mathrm{DG}}=\overline{\mathrm{DH}}\tan 30^\circ=2$이므로 $\overline{\mathrm{AG}}=2$

$\overline{\mathrm{GB}}=\overline{\mathrm{GF}}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$이고, $\overline{\mathrm{BF}}=4\sqrt{2}$이므로
삼각형 BGF에서 코사인법칙에 의하여
$\cos(\angle\mathrm{BGF})=\dfrac{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}$

답 ②

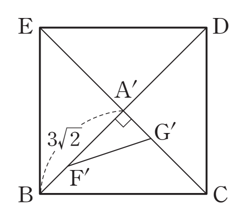
09



선분 EF의 중점을 M, 선분 HG의 중점을 N이라 하면 평면 IKJ와 평면 BKC의 교선은 직선 MN이고 $\overline{\mathrm{IM}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$이므로
θ는 두 직선 IM, MB가 이루는 예각의 크기와 같다.
이때 $\overline{\mathrm{IM}}=\overline{\mathrm{IE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{AI}}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$,
$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$, $\overline{\mathrm{BI}}=3$
즉, 삼각형 BIM은 $\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BM}}$인 이등변삼각형이므로 $\theta=\angle\mathrm{IMB}$
$\cos(\angle\mathrm{IMB})=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{IM}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$
따라서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

답 ②

10



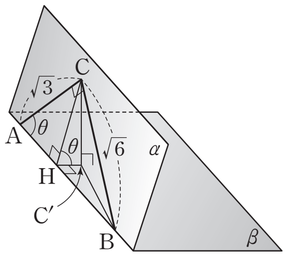
점 A의 평면 BCDE 위로의 정사영을 A′이라 하면 점 A′은 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이다.
점 F의 평면 BCDE 위로의 정사영을 F′이라 하면 점 F′은 선분 A′B를 2 : 1로 내분하는 점이고, 점 G의 평면 BCDE 위로의 정사영을 G′이라 하면 점 G′은 선분 A′C를 1 : 2로 내분하는 점이며 선분 FG의 평면 BCDE 위로의 정사영은 선분 F′G′이다.
이때 $\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{A'C}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$에서
$\overline{\mathrm{A'F'}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{A'G'}}=\sqrt{2}$이고 $\angle\mathrm{F'A'G'}=90^\circ$이므로
$\overline{\mathrm{F'G'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{A'F'}}^2+\overline{\mathrm{A'G'}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$
따라서 선분 FG의 평면 BCDE 위로의 정사영의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

답 ④

11

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2}=3$이고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$, $\overline{CH}=\sqrt{2}$



그림과 같이 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$, $\overline{CC'}\perp\beta$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{C'H}\perp\overline{AB}$이고, 이때 선분 BC의 평면 β 위로의 정사영은 선분 BC′이다.

한편, 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\angle CHC'=\theta=\angle CAH$이므로 $\frac{\overline{CC'}}{\overline{CH}}=\sin\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$

$\overline{AC}=\sqrt{3}$, $\overline{CH}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{CC'}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 CC′B가 직각삼각형이므로

$$\overline{BC'}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CC'}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{6-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

답 ④

12

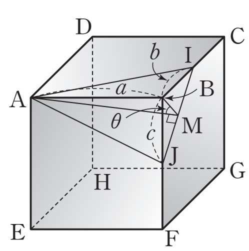
$\overline{AB}=a$, $\overline{BI}=b$라 하면 삼각형 AJI의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times a\times b=4$, $ab=8$ …… ㉠

마찬가지로 $\overline{BJ}=c$라 하면 삼각형 AJI의 평면 DHGC 위로의 정사영의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times a\times c=4$, $ac=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=c$이므로 $\overline{AI}=\overline{AJ}$



그림과 같이 선분 IJ의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 AJI, BJI가 모두 이등변삼각형이므로 $\overline{AM}\perp\overline{IJ}$, $\overline{BM}\perp\overline{IJ}$이고 $\cos\theta=\cos(\angle AMB)$이다.

$\cos\theta=\frac{1}{3}$에서 $\tan\theta=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{BM}=\frac{a}{\tan\theta}=\frac{a}{2\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

$b=\sqrt{2}\times\overline{BM}=\frac{a}{2}$ …… ㉢

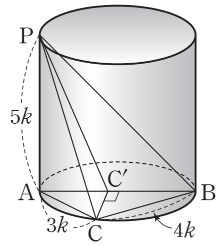
㉠, ㉢에서 $a=4$, $b=2$

따라서 사면체 B−AJI의 부피는

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times b^2\times a=\frac{8}{3}$

답 ⑤

13



$\overline{PA}\perp\overline{AB}$, $\overline{PA}\perp\overline{AC}$이므로 $\cos\theta=\cos(\angle BAC)=\frac{3}{5}$이고 선분 AB가 밑면의 지름이므로 $\angle ACB=90°$이다.

즉, $\overline{AB}=5k$라 하면 $\overline{AC}=3k$, $\overline{BC}=4k$, $\overline{AP}=5k$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C′이라 하면

$\overline{BC'}=\overline{BC}\times\cos(\angle CBA)=4k\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}k$

$\overline{PA}$와 밑면이 수직이고, $\overline{AC}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PC}\perp\overline{BC}$이다.

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{(5k)^2+(3k)^2}=\sqrt{34}k$

$\overline{PA}\perp$(평면 ABC)이므로 $\overline{PA}\perp\overline{CC'}$이고 $\overline{CC'}\perp\overline{AB}$

즉, $\overline{CC'}\perp$(평면 PAB)이므로 삼각형 PCB의 평면 PAB 위로의 정사영은 삼각형 PC′B이다.

(삼각형 PCB의 넓이)$\times\cos\alpha=$(삼각형 PC′B의 넓이)

$\left(\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PC}\right)\times\cos\alpha=\frac{1}{2}\times\overline{BC'}\times\overline{PA}$

$\left(\frac{1}{2}\times4k\times\sqrt{34}k\right)\times\cos\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}k\times5k$

$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{34}}$

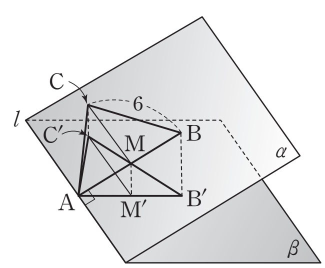
$\cos^2\alpha=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}$

따라서 $p=17$, $q=8$이므로

$p+q=17+8=25$

답 25

14



점 B의 평면 β 위로의 정사영을 B′이라 하자. 두 선분 AB, AB′의 중점을 각각 M, M′이라 하면 점 M의 평면 β 위로의 정사영은 점 M′이다.

점 C의 평면 β 위로의 정사영을 C′이라 하면 조건 (나)에 의하여 $\overline{B'C'}=4\sqrt{2}$이고 조건 (가)에 의하여 선분 CM은 직선 l과 평행하므로

$\overline{C'M'}=\overline{CM}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

이때 $\overline{C'M'}\perp\overline{AB'}$이므로

$\overline{AB'}=2\times\overline{M'B'}=2\times\sqrt{\overline{B'C'}^2-\overline{C'M'}^2}$

$=2\times\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$

삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영의 넓이 S는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB'}}\times\overline{\mathrm{C'M'}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times3\sqrt{3}=3\sqrt{15}$

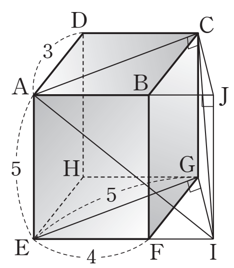
따라서 $S^2=(3\sqrt{15})^2=135$

답 135

15

ㄱ. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{CI}}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{CG}}$이므로 직선 AC는 평면 CGI에 수직이다. (참)

ㄴ.



평면 AIC와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기는 평면 AIC와 평면 ABCD가 이루는 예각의 크기와 같다. 두 평면 AIC와 ABCD의 교선이 직선 AC이므로 점 I에서 선분 AB의 연장선 위에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{CI}}$이고 직선 IJ는 평면 ABCD에 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{JC}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$이다.

이때 $\overline{\mathrm{CJ}}=\overline{\mathrm{AC}}\tan(\angle\mathrm{CAJ})=5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$이고 $\overline{\mathrm{IJ}}=5$이므로

$\tan\alpha=\frac{5}{\frac{15}{4}}=\frac{4}{3}$

따라서 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ (참)

ㄷ. 삼각형 AIC의 평면 AEHD 위로의 정사영은 삼각형 AED이다.

이때 삼각형 AIC의 넓이를 S라 하면

$\overline{\mathrm{CI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CJ}}^2+\overline{\mathrm{IJ}}^2}=\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2+5^2}=\frac{25}{4}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CI}}=\frac{1}{2}\times5\times\frac{25}{4}=\frac{125}{8}$

삼각형 AED의 넓이를 S'이라 하면

$S'=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\times3\times5=\frac{15}{2}$이므로

$\cos\beta=\frac{S'}{S}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{125}{8}}=\frac{12}{25}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

점 A(3, 2, 4)에서 y축에 내린 수선의 발 B의 좌표는 (0, 2, 0)이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-3)^2+(2-2)^2+(0-4)^2}=5$

점 A에서 zx평면에 내린 수선의 발 C의 좌표는 (3, 0, 4)이고

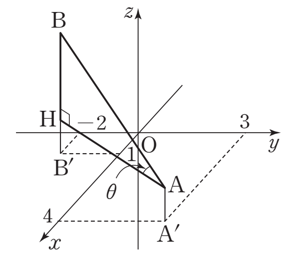
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(3-3)^2+(0-2)^2+(4-4)^2}=2$

삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{BAC}=90°$인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times2\times5=5$

답 ⑤

17



점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A′이라 하면 A′(4, 3, 0)

점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 B′(1, −2, 0)

점 A에서 선분 BB′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(1-4)^2+(-2-3)^2+(0-0)^2}=\sqrt{34}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1-4)^2+(-2-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

이때 직선 AB와 xy평면이 이루는 예각의 크기 θ는 $\angle\mathrm{BAH}$의 크기와 같다.

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\sqrt{34}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{17}}{5}$

답 ②

18

점 B를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′(2, 3, −5)

이때 xy평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

마찬가지로 점 B를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 B″이라 하면 B″(−2, 3, 5)

이때 yz평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B''Q}}$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{B''Q}}\geq\overline{\mathrm{AB''}}$

즉, $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{BQ}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB''}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB'}}=\overline{\mathrm{AB''}}$에서 $\overline{\mathrm{AB'}}^2=\overline{\mathrm{AB''}}^2$이므로

$(2-a)^2+(3-2)^2+(-5-1)^2=(-2-a)^2+(3-2)^2+(5-1)^2$

$a^2-4a+41=a^2+4a+21$, $8a=20$

따라서 $a=\frac{5}{2}$

답 ①

19

삼각형 OAB는 $\angle\mathrm{AOB}=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$

$(a^2+0^2+4^2)+\{(-2)^2+b^2+1^2\}$

$=(-2-a)^2+(b-0)^2+(1-4)^2$

$a^2+b^2+21=a^2+4a+b^2+13$

$4a=8$, $a=2$

또 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{a^2+16}\times\sqrt{b^2+5}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{b^2+5}$

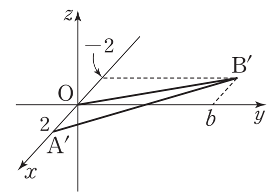
$=\sqrt{5b^2+25}$

한편, 점 A와 점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면 $\mathrm{A}'(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}'(-2,\ b,\ 0)$

이때 삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 삼각형 $\mathrm{OA'B'}$의 넓이와 같고 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times |b|=b$이다.

즉, $\sqrt{5b^2+25}\times\cos\theta=b$에서



$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$이므로

$\sqrt{5b^2+25}=\sqrt{6}b$

$5b^2+25=6b^2$, $b^2=25$

$b>0$이므로 $b=5$

따라서 $a+b=2+5=7$

답 7

20

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서

$\sqrt{(0-2)^2+(0-a)^2+(0-b)^2}=\sqrt{(c-2)^2+(0-a)^2+(0-b)^2}$

$4+a^2+b^2=(c-2)^2+a^2+b^2$

$(c-2)^2=4$, $c=0$ 또는 $c=4$

$c>0$이므로 $c=4$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서

$\sqrt{(c-2)^2+(0-a)^2+(0-b)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(c-a)^2+(0-b)^2}$

$c=4$이므로 $4+a^2+b^2=4+(4-a)^2+b^2$

$a^2=(4-a)^2$에서 $a=2$

한편, 삼각형 OBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times c\times c=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$이므로 사면체 OABC의 부피는 $\frac{8}{3}b$이다.

$\frac{8}{3}b=16$에서 $b=6$

따라서 $a+b+c=2+6+4=12$

답 12

21

두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면 $\mathrm{A}'(4,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{B}'(a,\ b,\ 0)$이므로 선분 AB의 xy평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2+(0-0)^2}=5$

즉, $(a-4)^2+(b-2)^2=25$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 두 점 A, B에서 yz평면에 내린 수선의 발을 각각 A'', B''이라 하면 $\mathrm{A}''(0,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{B}''(0,\ b,\ c)$이므로 선분 AB의 yz평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{\mathrm{A''B''}}=\sqrt{(0-0)^2+(b-2)^2+(c-1)^2}=6$

즉, $(b-2)^2+(c-1)^2=36$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $(a-4)^2=25-(b-2)^2$, $(c-1)^2=36-(b-2)^2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(c-1)^2$

$=25-(b-2)^2+(b-2)^2+36-(b-2)^2$

$=61-(b-2)^2$

에서 선분 AB의 길이가 최대가 되려면

$(b-2)^2=0$, $b=2$이다.

$a>0$, $c>0$이므로 ㉠, ㉡에서 $a=9$, $c=7$

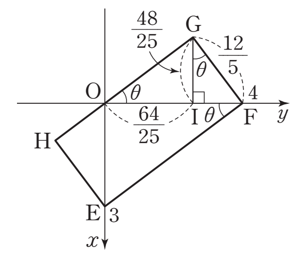
따라서 $a+b+c=9+2+7=18$

답 18

22

xy평면에 놓여 있는 직사각형 HEFG에서 $\overline{\mathrm{OE}}=3$, $\overline{\mathrm{OF}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$



그림과 같이 점 G에서 y축에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\angle\mathrm{EFO}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{FGI}=\angle\mathrm{GOI}=\theta$

삼각형 EFO에서

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{EF}}}=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{EF}}}=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=\frac{3}{4}$이므로

삼각형 GOF에서 $\overline{\mathrm{GF}}=\overline{\mathrm{OF}}\times\sin\theta=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

삼각형 FGI에서 $\overline{\mathrm{GI}}=\overline{\mathrm{FG}}\times\cos\theta=\frac{12}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{48}{25}$

삼각형 GOI에서 $\overline{\mathrm{OI}}=\frac{\overline{\mathrm{GI}}}{\tan\theta}=\frac{48}{25}\times\frac{4}{3}=\frac{64}{25}$

즉, $\mathrm{G}\left(-\frac{48}{25},\ \frac{64}{25},\ 0\right)$

점 C의 x좌표, y좌표는 점 G의 x좌표, y좌표와 각각 같으므로

$a=-\frac{48}{25}$, $b=\frac{64}{25}$

또한 조건에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}$이므로 정사각형 BCGF에서

$\overline{\mathrm{CG}}=\overline{\mathrm{GF}}=\frac{12}{5}$

$c>0$이므로 $c=\frac{12}{5}$

따라서 $a+b+c=-\frac{48}{25}+\frac{64}{25}+\frac{12}{5}=\frac{76}{25}$

답 ①

23

점 $\mathrm{P}(1,\ 2,\ 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는

$(1,\ 2,\ -3)$

선분 OQ를 $2:3$으로 외분하는 점 R의 좌표는

$\left(\frac{2\times 1-3\times 0}{2-3},\ \frac{2\times 2-3\times 0}{2-3},\ \frac{2\times(-3)-3\times 0}{2-3}\right)$

즉, $(-2,\ -4,\ 6)$

따라서

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{(-2-1)^2+(-4-2)^2+(6-3)^2}$

$=\sqrt{9+36+9}=3\sqrt{6}$

답 ②

24

$3\overline{PA}=\overline{PB}$를 만족시키는 직선 AB 위의 점 P는 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점 또는 $1:3$으로 외분하는 점이다.

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times6+3\times2}{1+3}, \frac{1\times5+3\times(-3)}{1+3}, \frac{1\times(-3)+3\times1}{1+3}\right)$

즉, $(3, -1, 0)$

선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times6-3\times2}{1-3}, \frac{1\times5-3\times(-3)}{1-3}, \frac{1\times(-3)-3\times1}{1-3}\right)$

즉, $(0, -7, 3)$

두 점 P_1, P_2의 좌표가 각각 $P_1(3, -1, 0)$, $P_2(0, -7, 3)$ 또는 $P_1(0, -7, 3)$, $P_2(3, -1, 0)$이므로 선분 P_1P_2의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3}{2}, -4, \frac{3}{2}\right)$이다.

따라서 $a+b+c=\frac{3}{2}+(-4)+\frac{3}{2}=-1$

답 ④

25

$\overline{AB}=\sqrt{(0-3)^2+(5-1)^2+\{-1-(-1)\}^2}=5$,

$\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(3-1)^2+\{-3-(-1)\}^2}=3$

삼각형 ABC에서 $\angle BAC$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점은 선분 BC를 $5:3$으로 내분하는 점이므로 그 점의 좌표는

$\left(\frac{5\times2+3\times0}{5+3}, \frac{5\times3+3\times5}{5+3}, \frac{5\times(-3)+3\times(-1)}{5+3}\right)$

즉, $\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{4}, -\frac{9}{4}\right)$

따라서 $a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{15}{4}$, $c=-\frac{9}{4}$이므로

$a+b+c=\frac{5}{4}+\frac{15}{4}+\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{11}{4}$

답 ①

26

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times b+3\times2}{1+3}, \frac{1\times c+3\times a}{1+3}, \frac{1\times7+3\times4}{1+3}\right)$

즉, 조건 (가)에서 점 $\left(\frac{b+6}{4}, \frac{c+3a}{4}, \frac{19}{4}\right)$가 z축 위의 점이므로

$\frac{b+6}{4}=0$, $\frac{c+3a}{4}=0$

$b=-6$, $c=-3a$ …… ㉠

점 A에서 yz평면에 내린 수선의 발은 $A'(0, a, 4)$,

점 B에서 yz평면에 내린 수선의 발은 $B'(0, c, 7)$

이므로 선분 AB의 yz평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{A'B'}=\sqrt{(0-0)^2+(c-a)^2+(7-4)^2}=\sqrt{(c-a)^2+9}=5$

즉, $(c-a)^2+9=25$, $(c-a)^2=16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(-3a-a)^2=16$, $16a^2=16$, $a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$

㉠에 대입하면 $c=-3$

따라서 $a+b+c=1+(-6)+(-3)=-8$

답 ③

27

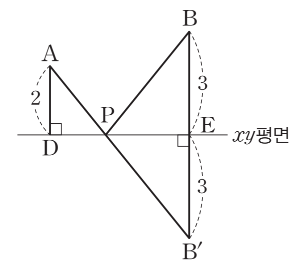
점 B를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$B'(-4, b, -3)$

xy평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되는 점 P는 직선 AB′과 xy평면의 교점이다.



점 A와 점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 $\overline{AD}=2$, $\overline{BE}=\overline{B'E}=3$이므로 삼각형 APD와 삼각형 B′PE는 닮음비가 $2:3$인 닮은 도형이다.

즉, 점 P는 선분 AB′을 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{2\times(-4)+3\times a}{2+3}, \frac{2\times b+3\times(-1)}{2+3}, \frac{2\times(-3)+3\times2}{2+3}\right)$

즉, $P\left(\frac{-8+3a}{5}, \frac{2b-3}{5}, 0\right)$ …… ㉠

또 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$P\left(\frac{a-4+4}{3}, \frac{-1+b+0}{3}, \frac{2+3+c}{3}\right)$

즉, $P\left(\frac{a}{3}, \frac{b-1}{3}, \frac{c+5}{3}\right)$ …… ㉡

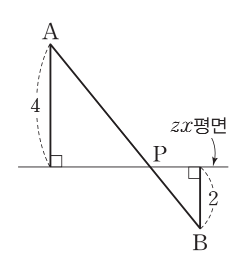
㉠, ㉡에서 $\frac{-8+3a}{5}=\frac{a}{3}$, $\frac{2b-3}{5}=\frac{b-1}{3}$, $0=\frac{c+5}{3}$

$a=6$, $b=4$, $c=-5$

따라서 $a+b+c=6+4+(-5)=5$

답 ⑤

28



점 A의 y좌표가 4이므로 점 A에서 zx평면에 내린 수선의 발과 점 A 사이의 거리는 4이고 점 B의 y좌표가 -2이므로 점 B에서 zx평면에 내린 수선의 발과 점 B 사이의 거리는 2이다. 즉, 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다.

$P\left(\frac{2\times3+1\times a}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times4}{2+1}, \frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}\right)$

즉, $P\left(\frac{a}{3}+2, 0, 3\right)$

조건 (나)에서 $\overline{BP}=3$이므로

$\overline{BP}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}+2-3\right)^2+\{0-(-2)\}^2+(3-5)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{a}{3}-1\right)^2+4+4}=3$

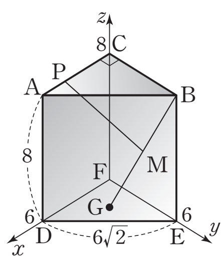
$\left(\frac{a}{3}-1\right)^2+8=9$, $\left(\frac{a}{3}-1\right)^2=1$

즉, $\frac{a}{3}-1=1$ 또는 $\frac{a}{3}-1=-1$

$a>0$이므로 $a=6$

답 6

29



점 F가 원점, 직선 FD가 x축 위, 직선 FE가 y축 위, 직선 FC가 z축 위에 있는 좌표공간에서 삼각형 DEF가 빗변의 길이가 $6\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{DF}=\overline{FE}=6$이다.

즉, 여섯 개의 점 A, B, C, D, E, F는

A$(6, 0, 8)$, B$(0, 6, 8)$, C$(0, 0, 8)$, D$(6, 0, 0)$, E$(0, 6, 0)$, F$(0, 0, 0)$

이때 점 G가 삼각형 DEF의 무게중심이므로

$G\left(\frac{6+0+0}{3}, \frac{0+6+0}{3}, \frac{0+0+0}{3}\right)$

즉, G$(2, 2, 0)$

점 M이 선분 BG의 중점이므로

$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{8+0}{2}\right)$

즉, M$(1, 4, 4)$

점 P는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{1\times0+2\times6}{1+2}, \frac{1\times0+2\times0}{1+2}, \frac{1\times8+2\times8}{1+2}\right)$

즉, P$(4, 0, 8)$

따라서

$\overline{PM}^2=(1-4)^2+(4-0)^2+(4-8)^2=9+16+16=41$

답 41

30

원점 O에 대하여 삼각형 OAB는 변 AB가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$

$(-2-a)^2+(1-3)^2+\{-5-(-1)\}^2$

$=\{a^2+3^2+(-1)^2\}+\{(-2)^2+1^2+(-5)^2\}$

$a^2+4a+24=a^2+40$, $a=4$

구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점과 같으므로

$C\left(\frac{a-2}{2}, 2, -3\right)$에서 $a=4$이므로 C$(1, 2, -3)$

구의 반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(1-4)^2+(2-3)^2+\{-3-(-1)\}^2}=\sqrt{14}$

즉, 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$

x축 위의 모든 점의 y좌표와 z좌표는 모두 0이므로

$y=0$, $z=0$을 대입하면 $(x-1)^2=1$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표는 2이다.

답 ②

31

구 S의 중심을 P(a, b, c)라 하자.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H$(a, 0, 0)$이라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로

$a=\frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 I$(0, b, 0)$이라 하면 점 I는 선분 CD의 중점이므로

$b=\frac{-4+6}{2}=1$

점 P에서 z축에 내린 수선을 발을 J$(0, 0, c)$라 하면 삼각형 EJP는 $\angle EJP=90°$인 직각삼각형이고

$\overline{EP}=7$, $\overline{JP}=\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(1-0)^2+(c-c)^2}=3$이므로

$\overline{EJ}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{EF}=2\overline{EJ}=4\sqrt{10}$

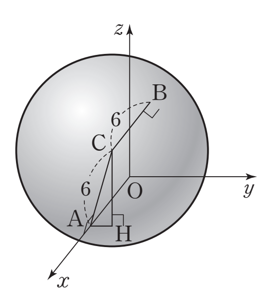
답 ②

32

구 S의 중심이 C(a, b, c)이므로 점 A의 좌표는 $(a, 0, 0)$이고 점 B의 좌표는 $(0, b, c)$이다. 구 S의 반지름의 길이가 6이므로

$\overline{CB}=|a|=6$, $a=6$ $(a>0)$

$\overline{CA}=\sqrt{b^2+c^2}=6$, $b^2+c^2=36$ ······ ㉠



한편, 그림과 같이 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기는 $\angle CAH$의 크기와 같으므로

$\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{CA}}=\frac{|b|}{6}=\frac{b}{6}$, $\frac{b}{6}=\frac{1}{3}$, $b=2$

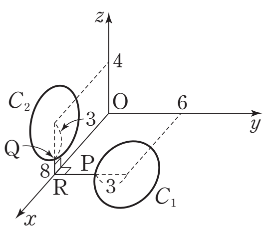
㉠에 대입하면 $c>0$이므로 $c=4\sqrt{2}$

따라서 $a\times b\times c=6\times2\times4\sqrt{2}=48\sqrt{2}$

답 ③

33

점 $\mathrm{A}(8,\ 6,\ -4)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(8,\ 6,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{AH}}=4$이므로 도형 C_1은 중심이 H이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5^2-4^2}=3$인 xy평면 위의 원이다. 한편, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $\mathrm{A'}(8,\ -6,\ 4)$이다.
점 $\mathrm{A'}(8,\ -6,\ 4)$에서 zx평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\mathrm{I}(8,\ 0,\ 4)$이고 $\overline{\mathrm{A'I}}=6$이므로 도형 C_2는 중심이 I이고 반지름의 길이가 $\sqrt{(3\sqrt{5})^2-6^2}=3$인 zx평면 위의 원이다.

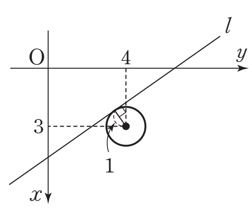


이때 그림과 같이 원 C_1 위의 점 P와 x축 위의 점 R에 대하여 선분 PR의 길이의 최솟값은 점 R의 좌표가 $(8,\ 0,\ 0)$일 때 $6-3=3$이다.
또한 원 C_2 위의 점 Q와 x축 위의 점 R에 대하여 선분 QR의 길이의 최솟값은 점 R의 좌표가 $(8,\ 0,\ 0)$일 때 $4-3=1$이다.
즉, 두 선분 PR, QR의 길이가 각각 최소일 때 점 R의 좌표가 $(8,\ 0,\ 0)$으로 같으므로
$\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{QR}}\geq 3+1=4$이고 최솟값은 4이다.

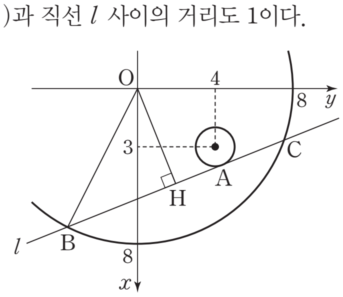
답 ②

34

구 S_1에 접하고 xy평면에 수직인 평면을 α라 하면 구 S_1의 중심인 $(3,\ 4,\ 10)$에서 평면 α까지의 거리는 구의 반지름의 길이인 1과 같다.
구 S_1의 xy평면으로의 정사영은 중심이 $(3,\ 4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원과 그 내부이다.

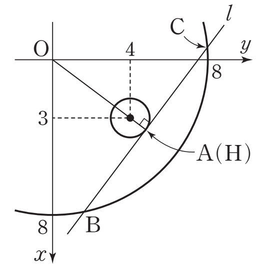


이때 평면 α가 xy평면에 수직이므로 평면 α와 xy평면의 교선을 l이라 하면 점 $(3,\ 4,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리도 1이다.



구 S_1의 xy평면 위로의 정사영과 직선 l이 접하는 점을 A라 하고, 구 S_2와 xy평면이 만나서 생기는 원과 직선 l이 만나는 점을 B, C라 하자.
원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 구 S_2와 평면 α가 만나서 생기는 원의 지름이 선분 BC이므로 이 원의 넓이가 최소가 되려면 반지름인 선분 HB(또는 HC)의 길이가 최소가 되어야 한다.

이때 $\overline{\mathrm{HB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{8^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$이므로 선분 OH의 길이가 최대일 때 선분 HB의 길이는 최소이다.



두 점 A, H는 모두 직선 l 위의 점이므로 점 A의 위치에 관계없이 항상 $\overline{\mathrm{OH}}\leq\overline{\mathrm{OA}}$가 성립한다. 또한 그림과 같이 원점과 점 $(3,\ 4,\ 0)$을 이은 직선이 xy평면 위의 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$과 만나는 점 중에서 원점으로부터 거리가 더 먼 점이 A일 때, 선분 OA의 길이는 최대이고 직선 OA와 직선 l이 서로 수직이므로 두 점 A, H는 일치한다.
즉, 이 경우 선분 OH의 길이도 최대이다.
이때 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+4^2}+1=6$이므로 선분 HB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$이다. 즉, 구하는 원의 넓이의 최솟값은
$(2\sqrt{7})^2\pi=28\pi$이다.
따라서 $a=28$

답 28

실전편

실전 모의고사 1회

본문 130~137쪽

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ③	08 ③	09 ②	10 ②
11 ②	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 8	17 29	18 4	19 14	20 9
21 383	22 31	23 ①	24 ④	25 ②
26 ②	27 ③	28 ①	29 320	30 17

01

$(\sqrt[3]{4})^{\log_2 27}=(\sqrt[3]{2^2})^{\log_2 3^3}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{3\log_2 3}=2^{2\log_2 3}$

$=2^{\log_2 9}=9^{\log_2 2}=9$

답 ⑤

02

$f(x)=2x^3+4x^2-1$에서

$f'(x)=6x^2+8x$

따라서 $f'(1)=6+8=14$

답 ③

03

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이 성립해야 한다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2+x)=1+1=2$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(4x+a)=4+a$

$f(1)=1+1=2$에서

$2=4+a$

따라서 $a=-2$

답 ①

04

$\tan\theta=\frac{a}{2}=-2$에서 $a=-4$

원의 반지름의 길이는 원점과 점 $(2,\ -4)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{-4}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=-4\sqrt{5}$

답 ①

05

세 수 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=4b$ $\cdots\cdots$ ㉠

세 수 $\log_2 3$, $\log_2 a$, $\log_2(b+1)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2 a=\log_2 3+\log_2(b+1)$

$\log_2 a^2=\log_2\{3(b+1)\}$

$a^2=3(b+1)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $4b=3(b+1)$, $b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $a^2=12$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{3}$

따라서 $ab=2\sqrt{3}\times 3=6\sqrt{3}$

답 ⑤

06

$\lim_{x\to 1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 2+}f(x)=1$, $f(3)=0$이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)+f(3)=1+1+0=2$

답 ①

07

$g(k)=l$이라 하면

$(f\circ g)(k)=f(g(k))=f(l)=2$에서 $1\le\sqrt{l}<2$

$1\le l<4$

그런데 l의 값은 정수이므로 $l=1$ 또는 $l=2$ 또는 $l=3$

$g(k)=1$에서 $0<\sqrt[3]{k}<1$이므로 $0<k<1$

$g(k)=2$에서 $1\le\sqrt[3]{k}<2$이므로 $1\le k<8$

$g(k)=3$에서 $2\le\sqrt[3]{k}<3$이므로 $8\le k<27$

따라서 $0<k<27$

$\alpha=0$, $\beta=27$이므로 $\alpha+\beta=0+27=27$

답 ③

08

$\int_a^x f(t)dt=x^3+2x^2-x-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=a^3+2a^2-a-2=0$

$a^3+2a^2-a-2=a^2(a+2)-(a+2)$

$=(a+2)(a^2-1)$

$=(a+2)(a-1)(a+1)=0$

에서 $a>0$이므로 $a=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4x-1$

따라서 $a+f(1)=1+(3+4-1)=7$

답 ③

09

함수 $y=2^{x+a}$에 $x=0$을 대입하면 $y=2^a$이므로

점 A의 좌표는 $(0,\ 2^a)$

함수 $y=\log_2(x+1)-a$에 $y=0$을 대입하면 $x=2^a-1$이므로

점 B의 좌표는 $(2^a-1,\ 0)$

$\angle AOB=90°$이므로 세 점 A, B, O를 지나는 원의 지름은 선분 AB이다.

$\pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2=\frac{13}{4}\pi$이므로 $\overline{AB}^2=13$

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$

$=(2^a)^2+(2^a-1)^2=13$

$2^a=t\ (t>0)$이라 하면

$t^2+(t-1)^2=13$

$2t^2-2t-12=0,\ t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0$

$t>0$이므로 $t=3$

따라서 $2^a=3$에서 $a=\log_2 3$

답 ②

10

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=k$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

또한 $f(x)$는 다항함수로 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

마찬가지로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k$에서 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이다.

그러므로 $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 가진다.

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\{(x-1)(ax+b)\}=-b$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\{x(ax+b)\}=a+b$

이므로 $k=-b=a+b$

이때 k는 양수이므로

$a=-2b,\ a>0,\ b<0$ …… ㉠

$f(x-1)=(x-1)(x-1-1)(ax-a+b)$

$=(x-1)(x-2)(ax-a+b)$

$f(x)f(x-1)=x(x-1)^2(x-2)(ax+b)(ax-a+b)$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2}=4$에서

$\lim_{x\to 1}\{x(x-2)(ax+b)(ax-a+b)\}=-(a+b)b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=4,\ b=-2,\ k=2$

따라서 $f(x)=x(x-1)(4x-2)$이므로

$f(k)=f(2)=2\times 1\times 6=12$

답 ②

11

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=3a_2-S_1$

$=3a_2-a_1$

$=3\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=4$

(우변)$=4$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$(k+2)a_{k+1}-S_k=k+3$

$(k+2)a_{k+1}-S_k+a_{k+1}-a_{k+1}=k+3$

$(\boxed{k+3})a_{k+1}-S_{k+1}=k+3$ …… ㉠

$a_{k+2}=a_{k+1}+\frac{1}{k+3}$에서 $a_{k+1}=a_{k+2}-\boxed{\frac{1}{k+3}}$이므로

㉠에 이 식을 대입하면

$(k+3)\left(a_{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)-S_{k+1}=k+3$

$(k+3)a_{k+2}-1-S_{k+1}=k+3$

$(k+3)a_{k+2}-S_{k+1}=\boxed{k+4}$

따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$

이다.

이상에서 $f(k)=k+3$, $g(k)=\frac{1}{k+3}$, $h(k)=k+4$이므로

$\frac{f(12)\times g(2)}{h(2)}=\frac{15\times\frac{1}{5}}{6}=\frac{1}{2}$

답 ②

12

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이고, $f'(x)$가 $x=1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$f'(x)=3(x-1)^2-1=3x^2-6x+2$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3x^2-6x+2)\,dx$

$=x^3-3x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=6$에서 $C=6$

$f(x)=x^3-3x^2+2x+6$

$f(1)=1-3+2+6=6$이므로 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y-6=-(x-1)$

$y=-x+7$

이 접선이 점 $(-10,\ a)$를 지나므로

$a=-(-10)+7=17$

답 ④

13

점 A의 x좌표를 a라 하면

$\overline{AB}=\log_2(a+1)-\log_4 a$

$=\log_4(a+1)^2-\log_4 a$

$=\log_4\frac{(a+1)^2}{a}$

$t>0$일 때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{(t+1)^2}{t}=\frac{t^2+2t+1}{t}=t+\frac{1}{t}+2\geq 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}+2=4$

이때 등호는 $t=\frac{1}{t}$, 즉 $t=1$일 때 성립한다.

즉, $a>0$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 \frac{(a+1)^2}{a}$의 최솟값은 $a=1$일 때 1이다.

따라서 $0<a<1$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}>1$이므로 자연수 k는 2, 3, 4, $\cdots$이고 $l=2$이다.

자연수 k ($k=2, 3, 4, \cdots$)에 대하여 두 점 A_k, D_k의 x좌표를 각각 a_k, b_k라 하면 두 점 A_k, D_k의 y좌표는 서로 같으므로

$\log_2(a_k+1)=\log_4 b_k$

$(a_k+1)^2=b_k$ $\cdots\cdots$ ㉠

선분 AB의 길이가 자연수 k일 때 점 B를 B_k라 하면

$\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=\log_4 \frac{(a_k+1)^2}{a_k}=k$에서 $\frac{(a_k+1)^2}{a_k}=4^k$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=l}^{l+9} \frac{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k}}{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{A}_k}}=\sum_{k=2}^{11} \frac{b_k}{a_k}=\sum_{k=2}^{11} \frac{(a_k+1)^2}{a_k}$$

$$=\sum_{k=2}^{11} 4^k=\frac{4^2(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{2^{24}-16}{3}$$

답 ④

참고

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 \frac{(a+1)^2}{a}=k$에서 $\frac{(a+1)^2}{a}=4^k$ ($k=2, 3, 4, \cdots$)

$a^2+2a+1=4^k a$, $a^2+2(1-2^{2k-1})a+1=0$

$a=-(1-2^{2k-1})\pm\sqrt{(1-2^{2k-1})^2-1}$

$\quad=(2^{2k-1}-1)\pm\sqrt{(2^{2k-1}-1)^2-1}$

$2^{2k-1}-1=p$라 하면 $k\geq 2$이므로 $p\geq 7$이다.

따라서 $k=2, 3, 4, \cdots$일 때, $0<a<1$을 만족시키는

$a=p-\sqrt{p^2-1}$의 값이 반드시 존재한다.

14

방정식 $\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)-\sin 2nx=0$의 실근은 두 함수

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\sin 2nx$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

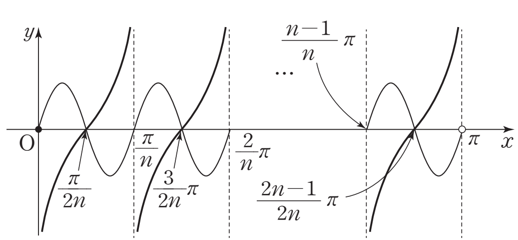
함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$의 그래프는 함수

$y=\tan nx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$만큼 평행이동한 것이고,

함수 $y=\tan nx$의 주기는 $\frac{\pi}{n}$이다.

또한 함수 $y=\sin 2nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이다.

따라서 $0\leq x<\pi$에서 두 함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\sin 2nx$의 그래프는 다음과 같다.



이때 두 그래프가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{\pi}{2n}$, $\frac{3}{2n}\pi$, $\frac{5}{2n}\pi$, $\cdots$, $\frac{2n-1}{2n}\pi$

이다. 따라서

$$a_n=\frac{\pi}{2n}\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}$$

$$=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{\pi}{2n}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2n}\times n^2=\frac{\pi}{2}n$$

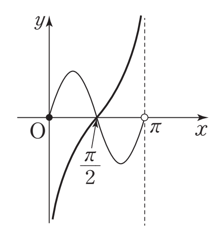
이므로

$$\sum_{k=1}^{12} a_k=\sum_{k=1}^{12}\frac{\pi}{2}k=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{12}k=\frac{\pi}{2}\times\frac{12\times 13}{2}=39\pi$$

답 ⑤

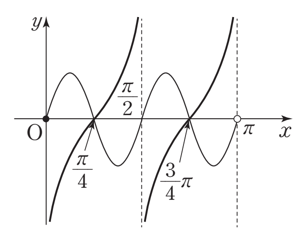
참고

$n=1$일 때 두 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\sin 2x$의 그래프는 다음과 같다.



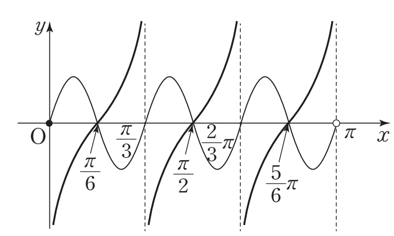
두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $a_1=\frac{\pi}{2}$

$n=2$일 때 두 함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\sin 4x$의 그래프는 다음과 같다.



두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$이므로 $a_2=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi=\pi$

$n=3$일 때 두 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $y=\sin 6x$의 그래프는 다음과 같다.



두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로

$a_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$

$\vdots$

따라서 $n=k$일 때 $a_k=\frac{k}{2}\pi$

15

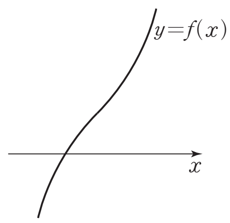
$f(x)=x^3-3ax+a^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

(i) $a\le 0$일 때

$f'(x)\ge 0$에서 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다.

$g(a)=f(1)=1-3a+a^2+a=a^2-2a+1=(a-1)^2$



(ii) $a>0$일 때

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$에서 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

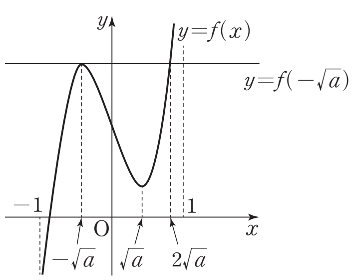
x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-\sqrt{a})=-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}+a^2+a=2a\sqrt{a}+a^2+a$이고

$f(x)-f(-\sqrt{a})=x^3-3ax-2a\sqrt{a}=(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})$

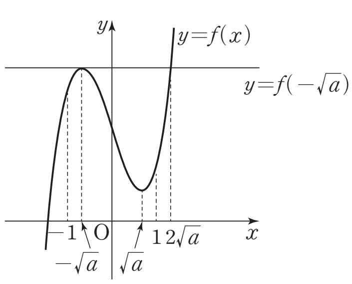
이므로 $f(-\sqrt{a})=f(2\sqrt{a})$

(가) $0<2\sqrt{a}\le 1$, 즉 $0<a\le\frac{1}{4}$일 때



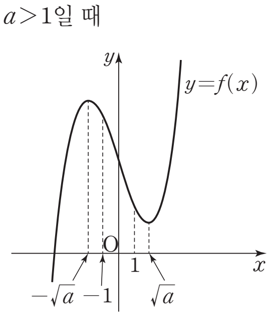
$g(a)=f(1)=a^2-2a+1=(a-1)^2$

(나) $\sqrt{a}\le 1<2\sqrt{a}$, 즉 $\frac{1}{4}<a\le 1$일 때



$g(a)=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+a^2+a=a(\sqrt{a}+1)^2$

(다) $1<\sqrt{a}$일 때, 즉 $a>1$일 때



$g(a)=f(-1)=-1+3a+a^2+a=a^2+4a-1$

그러므로 (i), (ii)에서 $g(a)=\begin{cases}(a-1)^2 & \left(a\le\frac{1}{4}\right)\\ a(\sqrt{a}+1)^2 & \left(\frac{1}{4}<a\le 1\right)\\ a^2+4a-1 & (a>1)\end{cases}$

ㄱ. $g(2)=4+8-1=11$ (참)

ㄴ. 함수 $g(a)$는 $a<\frac{1}{4}$일 때 감소하고 $a>\frac{1}{4}$일 때 증가하므로

$a=\frac{1}{4}$일 때 극소이면서 최소가 된다. 따라서 최솟값은

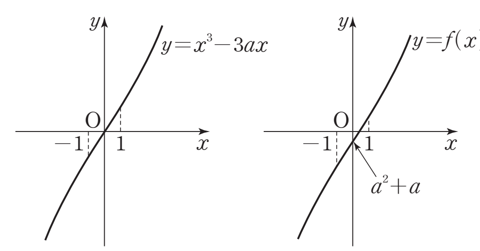
$g\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}-1\right)^2=\frac{9}{16}$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)=x^3-3ax+a^2+a$의 그래프는 함수 $y=x^3-3ax$의 그래프를 y축의 방향으로 a^2+a만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=x^3-3ax$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은

$a^2+a\ge 0$, 즉 $a\le -1$ 또는 $a\ge 0$일 때

$h(a)=g(a)$

$-1<a<0$일 때 $f(x)$는 증가하는 함수이므로



$h(a)=|f(-1)|=|a^2+4a-1|$이므로

$h(a)=\begin{cases}(a-1)^2 & (a\le -1)\\ |a^2+4a-1| & (-1<a<0)\\ (a-1)^2 & \left(0\le a\le\frac{1}{4}\right)\\ a(\sqrt{a}+1)^2 & \left(\frac{1}{4}<a\le 1\right)\\ a^2+4a-1 & (a>1)\end{cases}$

에서 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{4}-2-1\right|=\frac{11}{4}$, $h(1)=1\times 4=4$

그러므로 $h\left(-\frac{1}{2}\right)+h(1)=\frac{27}{4}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

16

$\int_0^1 (4x^3+6x^2+5)\,dx=\left[x^4+2x^3+5x\right]_0^1=1+2+5=8$

답 8

17

$S_{n+2}-S_n=3a_{n+1}-a_n$에서

$a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+1}-a_n$

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$S_{10}=\frac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times(1+a_{10})}{2}=150$

이므로 $a_{10}=29$

답 29

18

$x=2t^3-2t^2$에서 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-4t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $2t(3t-2)=0$

$t=0$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

$0<t<\frac{2}{3}$일 때 $v<0$, $t>\frac{2}{3}$일 때 $v>0$이므로 출발 후 $t=\frac{2}{3}$일 때 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=12t-4$

이므로 $t=\frac{2}{3}$일 때 가속도는

$12\times\frac{2}{3}-4=8-4=4$

답 4

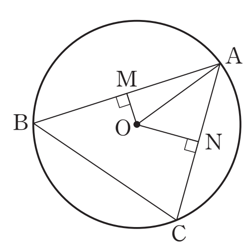
19

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에서

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=2R$

$R=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sin C}=\frac{8\sqrt{2}}{2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=6$

원의 중심 O에서 두 현 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자.



직각삼각형 OAM에서

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AM}}^2}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=2$

$\overline{\mathrm{OM}}:\overline{\mathrm{ON}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{ON}}=4$

직각삼각형 OAN에서

$\overline{\mathrm{AN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{ON}}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=2\,\overline{\mathrm{AN}}=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

이므로 사인법칙에서 $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}=2R$

$\sin B=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2R}=\frac{4\sqrt{5}}{12}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin^2 B=\frac{5}{9}$

$p=9$, $q=5$이므로 $p+q=9+5=14$

답 14

20

삼차방정식 $x^3-px^2+(2p^2-3p)x+q+1=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$f(x)=x^3-px^2+(2p^2-3p)x+q+1$이라 하면 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지고, 함수 $f(x)$의 두 극값의 부호가 다르다.

$f'(x)=3x^2-2px+(2p^2-3p)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=p^2-3(2p^2-3p)>0$

$-5p^2+9p>0$, $p(5p-9)<0$

$0<p<\frac{9}{5}$

p는 정수이므로 $p=1$

$f(x)=x^3-x^2-x+q+1$에서

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+q+1=q+\frac{32}{27}$

$f(1)=1-1-1+q+1=q$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$q\left(q+\frac{32}{27}\right)<0$에서 $-\frac{32}{27}<q<0$

q는 정수이므로 $q=-1$

따라서 $10p+q=10\times1-1=9$

답 9

21

$a_{18}=32$이므로 $a_{17}=16$ 또는 $a_{17}=2^{32}$이다.

그런데 $a_1=1$이므로 a_n의 정의에 의하여 $a_{17}=2^{32}$은 성립할 수 없다.

따라서 $a_{17}=16$이므로 $p\geq16$이다.

$p=16$이면 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	1	2	4	8	16	32	5	10	20	$\log_2 20$	$\cdots$

이때 $a_{10}=\log_2 20$이 되어 그 값이 무리수이므로 $a_{18}=32$가 될 수 없다.

따라서 a_{18}의 값이 $32=2^5$이 되려면 p의 최솟값 m이 2^k (k는 자연수) 꼴이 되어야 하고 우선 다음 조건을 모두 만족시켜야 한다.

(i) $m=2^k>16$

(ii) $\log_2 2m=\log_2 2^{k+1}=k+1$이므로 $a_{18}=32$가 되려면 $k+1$의 값은 2의 거듭제곱꼴이어야 한다.

(i), (ii)를 모두 만족시키는 k의 값은 7, 15, 31, 63, $\cdots$

그런데 $k=15$, 즉 $m=2^{15}$이면 $a_{17}=2^{16}$, $a_{18}=16$이므로 만족시키지 않는다.

또한 $k=31$, 63, $\cdots$이면 $a_{18}>32$이므로 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 p의 최솟값은 $k=7$일 때이므로 $m=2^7=128$이고 그때의 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$
a_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	8	16	32	64	128	256	8	16	32	$\cdots$

따라서 조건을 만족시키는 p의 값의 범위는 $2^7 \le p < 2^8$이다.
자연수 p의 최댓값 $M=255$이므로
$M+m=255+128=383$

답 383

22

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로 $\alpha<2$인 상수 α에 대하여
$f(x)=(x-2)^2(x-\alpha)$
로 나타낼 수 있다.
$\{(x-2)f(x)\}'=f(x)+(x-2)f'(x)$이므로 조건 (나)에서

$$g(x)=\int\{f(x)+(x-2)f'(x)\}\,dx$$
$$=\int\{(x-2)f(x)\}'\,dx$$
$$=(x-2)f(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

즉, $g(x)=(x-2)^3(x-\alpha)+C$
$=(x^3-6x^2+12x-8)(x-\alpha)+C$

$g'(x)=(3x^2-12x+12)(x-\alpha)+(x-2)^3$
$=3(x-2)^2(x-\alpha)+(x-2)^3$
$=(x-2)^2\{3(x-\alpha)+x-2\}$
$=(x-2)^2(4x-3\alpha-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{3\alpha+2}{4}$

$\alpha<2$에서 $x=\dfrac{3\alpha+2}{4}<2$이므로
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{3\alpha+2}{4}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{3\alpha+2}{4}$에서 극소이면서 최소이므로
조건 (다)에서
$x=\dfrac{3\alpha+2}{4}=\dfrac{1}{2}$에서 $\alpha=0$
$f(x)=x(x-2)^2$
$g(x)=x(x-2)^3+C$
이고
$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{27}{8}\right)+C=-\dfrac{27}{16}+C=-\dfrac{3}{4}$
에서 $C=\dfrac{15}{16}$
$g(x)=x(x-2)^3+\dfrac{15}{16}$
따라서 $f(1)+g(1)=1+\left(-1+\dfrac{15}{16}\right)=\dfrac{15}{16}$
이므로 $p=16$, $q=15$이고
$p+q=16+15=31$

답 31

23

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $P(a,\ 0,\ 0)$이라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a-4)^2+(0-3)^2+(0-2)^2=(a-1)^2+(0+2)^2+(0+6)^2$
$a^2-8a+29=a^2-2a+41$, $-6a=12$
따라서 $a=-2$

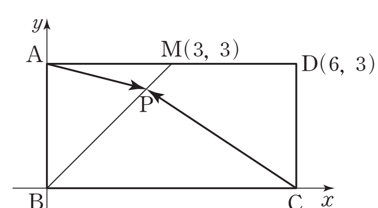
답 ①

24

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{24}-\dfrac{y^2}{32}=1$ 위의 점 $A(6,\ -4)$에서의 접선의 방정식은
$\dfrac{6x}{24}-\dfrac{-4y}{32}=1$, $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{8}=1$
이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(4,\ 0)$, $(0,\ 8)$이다.
따라서 $\overline{BC}=\sqrt{(0-4)^2+(8-0)^2}=4\sqrt{5}$

답 ④

25



그림과 같이 점 B를 원점으로 하고 두 점 A, C의 좌표가 각각 $(0,\ 3)$, $(6,\ 0)$이 되도록 하는 좌표평면을 생각하면 점 D의 좌표는 $(6,\ 3)$이고 점 M의 좌표는 $(3,\ 3)$이므로 점 P의 좌표는 $(a,\ a)$ $(0\le a\le 3)$이라 할 수 있다.
이때 $\overrightarrow{AP}=(a,\ a-3)$, $\overrightarrow{CP}=(a-6,\ a)$이므로
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=(a,\ a-3)\cdot(a-6,\ a)$
$=a(a-6)+(a-3)a$
$=a^2-6a+a^2-3a$
$=2a^2-9a$
$=2\left(a-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{81}{8}$
따라서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}$는 $a=\dfrac{9}{4}$일 때 최솟값 $-\dfrac{81}{8}$을 갖는다.

답 ②

26

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{ME}\,/\!/\,\overline{AF}$이므로 직선 AF와 직선 DE가 이루는 각의 크기는 직선 ME와 직선 DE가 이루는 각의 크기와 같다.
삼각형 DBE에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{DE}^2=\overline{BD}^2+\overline{BE}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{BE}\times\cos 60°$
$=6^2+2^2-2\times6\times2\times\dfrac{1}{2}=28$

이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=2\sqrt{7}$

이때 $\overline{\mathrm{DM}}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$이고

$\overline{\mathrm{ME}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{7}=\sqrt{7}$이다.

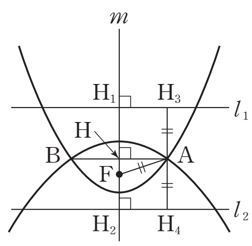
따라서 삼각형 DME에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{7})^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{7}\times2\sqrt{7}}=\frac{2}{7}$$

답 ②

27

두 포물선의 교점 A에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H, 두 준선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_3}$, $\mathrm{H_4}$라 하자.



$\overline{\mathrm{AF}}=k\ (k>0)$이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AH_3}}=\overline{\mathrm{AH_4}}=\overline{\mathrm{AF}}=k$

$\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{H_3H_4}}=\overline{\mathrm{AH_3}}+\overline{\mathrm{AH_4}}=k+k=2k$

$\overline{\mathrm{H_1F}}:\overline{\mathrm{H_2F}}=2:1$이므로

$\overline{\mathrm{H_2F}}=\dfrac{1}{3}\times\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\dfrac{1}{3}\times2k=\dfrac{2}{3}k$

$\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{HH_2}}-\overline{\mathrm{H_2F}}=\overline{\mathrm{AH_4}}-\overline{\mathrm{H_2F}}=k-\dfrac{2}{3}k=\dfrac{k}{3}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

직각삼각형 AHF에서

$\overline{\mathrm{AF}}^2=\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HF}}^2$

$k^2=(4\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{k}{3}\right)^2$, $\dfrac{8}{9}k^2=32$

$k^2=36$, $k=6\ (k>0)$

따라서 $\overline{\mathrm{AF}}=6$

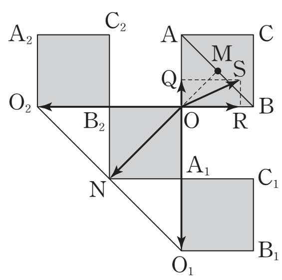
답 ③

28

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

$\quad=(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$\quad=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$



$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$라 하면 점 S는 정사각형 AOBC의 내부(경계선 포함)에 있다. 선분 OA를 2 : 3으로 외분하는 점을 $\mathrm{O_1}$, 1 : 2로 외분하는 점을 $\mathrm{A_1}$이라 하고, 선분 BC를 2 : 3으로 외분하는 점을 $\mathrm{B_1}$, 1 : 2로 외분하는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 하자. 또 선분 OB를 2 : 3으로 외분하는 점을 $\mathrm{O_2}$, 1 : 2로 외분하는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하고, 선분 AC를 2 : 3으로 외분하는 점을 $\mathrm{A_2}$, 1 : 2로 외분하는 점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 또 두 선분 AB, $\mathrm{O_1O_2}$의 중점을 각각 M, N이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}$

(i) 점 P가 점 A와 일치하는 경우

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}$

이므로 점 X는 정사각형 $\mathrm{A_1O_1B_1C_1}$의 내부(경계선 포함)에 있다.

(ii) 점 P가 점 M과 일치하는 경우

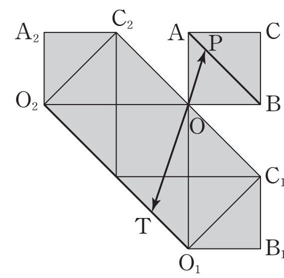
$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

이므로 점 X는 정사각형 $\mathrm{B_2NA_1O}$의 내부(경계선 포함)에 있다.

(iii) 점 P가 점 B와 일치하는 경우

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OO_2}}$

이므로 점 X는 정사각형 $\mathrm{A_2O_2B_2C_2}$의 내부(경계선 포함)에 있다.



이때 점 P가 선분 AB 위를 움직이면 점 T는 선분 $\mathrm{O_1O_2}$ 위를 움직이므로 (i), (ii), (iii)에 의하여 점 X가 나타내는 영역은 육각형 $\mathrm{O_1B_1C_1C_2A_2O_2}$의 내부(경계선 포함)이다. 이때 두 삼각형 $\mathrm{O_1B_1C_1}$, $\mathrm{C_2A_2O_2}$의 넓이의 합은 4이고 직사각형 $\mathrm{O_1C_1C_2O_2}$의 넓이는

$\overline{\mathrm{O_1O_2}}\times\overline{\mathrm{O_1C_1}}=4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=16$이다.

따라서 점 X가 나타내는 영역의 넓이는

$4+16=20$

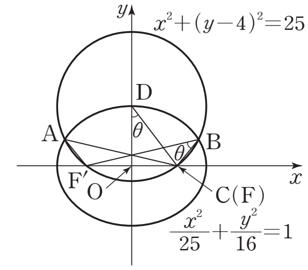
답 ①

29

점 D의 좌표를 (0, 4)라 하면 원 $x^2+(y-4)^2=25$는 중심이 D이고 반지름의 길이가 5인 원이므로

$\overline{\mathrm{OD}}=4$, $\overline{\mathrm{DC}}=5$

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DC}}^2-\overline{\mathrm{OD}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ …… ㉠



한편, 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 $c=\sqrt{25-16}=3$이므로

$\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OC}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 점 C는 타원의 초점 F와 일치한다.

이때 두 선분 AF, BF′은 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{AF}=\overline{BF'}=p$, $\overline{BF}=q$이고

$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{BF'}+\overline{BF}=2\times5=10$이므로

$p+q=10$

한편, 삼각형 FBF′에서 $\angle FBF'=\theta$라 하면 원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$\angle FDF'=2\angle FBF'=2\theta$

이고 y축은 선분 FF′의 수직이등분선이므로

$\angle FDO=\frac{1}{2}\times\angle FDF'=\frac{1}{2}\times2\theta=\theta$

직각삼각형 FDO에서 $\cos\theta=\frac{\overline{OD}}{\overline{DF}}=\frac{4}{5}$

$\overline{FF'}=2c=2\times3=6$이므로 삼각형 FBF′에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=p^2+q^2-2pq\cos\theta=p^2+q^2-2pq\times\frac{4}{5}$

$\quad=p^2+q^2-\frac{8}{5}pq=(p+q)^2-\frac{18}{5}pq$

$\quad=10^2-\frac{18}{5}pq$

따라서 $\frac{18}{5}pq=64$이므로

$18pq=64\times5=320$

답 320

다른 풀이

원의 방정식과 타원의 방정식을 연립하여 두 점 A, B의 좌표를 구하면 $A\left(\frac{5\sqrt{65}}{9}, \frac{16}{9}\right)$, $B\left(-\frac{5\sqrt{65}}{9}, \frac{16}{9}\right)$이고, $C(3, 0)$은 타원의 한 초점이므로 $\overline{AC}=p$, $\overline{BC}=q$에서

$p+q=10$, $p^2+q^2+2pq=100$ ...... ㉠

$p^2=\left(3-\frac{5\sqrt{65}}{9}\right)^2+\left(0-\frac{16}{9}\right)^2$, $q^2=\left(3+\frac{5\sqrt{65}}{9}\right)^2+\left(0-\frac{16}{9}\right)^2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\left\{\left(3-\frac{5\sqrt{65}}{9}\right)^2+\left(-\frac{16}{9}\right)^2\right\}+\left\{\left(3+\frac{5\sqrt{65}}{9}\right)^2+\left(-\frac{16}{9}\right)^2\right\}+2pq$

$=100$

$\frac{2(65\times5^2+16^2)}{9^2}+18+2pq=100$

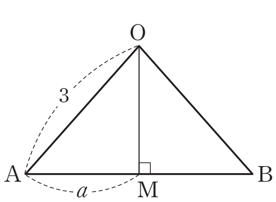
$18pq=320$

30

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BH}$이고,

삼각형 OAC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{CI}$이다.

이때 $\overline{BH}:\overline{CI}=\sqrt{5}:\sqrt{2}$이므로 두 삼각형 OAB, OAC의 넓이의 비도 $\sqrt{5}:\sqrt{2}$이다.



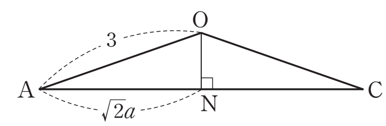
삼각형 OAB에서 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하고 $\overline{AM}=a$라 하자.

$\overline{OA}=3$이고 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{9-a^2}$

즉, 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}=\frac{1}{2}\times2a\times\sqrt{9-a^2}=a\sqrt{9-a^2}$



삼각형 OAC에서 그림과 같이 선분 AC의 중점을 N이라 하면

$\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2a=\sqrt{2}a$

이고 $\overline{ON}\perp\overline{AC}$이므로

$\overline{ON}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AN}^2}=\sqrt{9-(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{9-2a^2}$

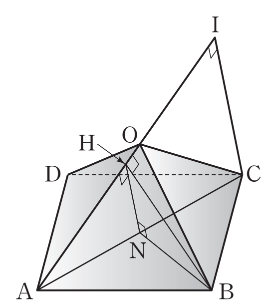
즉, 삼각형 OAC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{ON}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}a\times\sqrt{9-2a^2}=\sqrt{2}a\times\sqrt{9-2a^2}$

$a\sqrt{9-a^2}:(\sqrt{2}a\times\sqrt{9-2a^2})=\sqrt{5}:\sqrt{2}$

$\sqrt{9-a^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{9-2a^2}$, $9-a^2=5(9-2a^2)$, $a=2$

$\overline{AB}=2a=4$



한편, $\overline{BN}\perp\overline{AC}$, $\overline{BN}\perp\overline{ON}$이므로 직선 BN은 평면 OAC에 수직이다. 즉, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{NH}\perp\overline{OA}$이다.

또한 직선 BN은 평면 OAC에 수직이므로 $\angle BNH=90°$이고

선분 BH의 평면 OAC 위로의 정사영은 선분 NH이다.

이때 점 N은 선분 AC의 중점이므로 삼각형 ANH와 삼각형 ACI는 닮음비가 $\overline{AN}:\overline{AC}=1:2$인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{BH}:\overline{CI}=\sqrt{5}:\sqrt{2}$에서

$\overline{BH}=\sqrt{5}k$, $\overline{CI}=\sqrt{2}k$ $(k>0)$이라 하면

$\overline{NH}=\frac{1}{2}\overline{CI}=\frac{\sqrt{2}}{2}k$이고

$\overline{BN}=\sqrt{(\sqrt{5}k)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}k$

이때 $\overline{BN}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times4=2\sqrt{2}$이므로

$\frac{3\sqrt{2}}{2}k=2\sqrt{2}$에서 $k=\frac{4}{3}$

즉, $l=\overline{NH}=\frac{\sqrt{2}}{2}k=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고 $l^2=\frac{8}{9}$이다.

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=9+8=17$

답 17

실전 모의고사 2회

본문 138~145쪽

01 ④	02 ④	03 ②	04 ③	05 ③
06 ①	07 ①	08 ②	09 ②	10 ③
11 ②	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ⑤
16 60	17 10	18 80	19 8	20 35
21 330	22 32	23 ④	24 ①	25 ①
26 ②	27 ④	28 ①	29 18	30 12

01

$\sqrt[3]{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2^4}\times(2^{-1})^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

$=2^1=2$

답 ④

02

$\int_{-2}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx=2\int_0^2(3x^2+1)\,dx$

$=2\left[x^3+x\right]_0^2$

$=2\times(8+2)=20$

답 ④

03

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-b_k)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=3\times5-8=7$

답 ②

04

$\lim_{x\to0-}f(x)=1,\ \lim_{x\to2+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=1+2=3$

답 ③

05

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로

$3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\tan x=2$에서

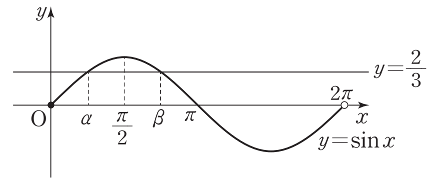
$3\cos x\times\frac{\sin x}{\cos x}=2$

$\sin x=\frac{2}{3}$ (단, $\cos x\neq0$)

$0\le x<2\pi$에서 $\sin x=\frac{2}{3}$의 두 실근을 α, β라 하면

$\sin(\pi-x)=\sin x$이므로

$\alpha+\beta=\pi$



답 ③

06

시각 t일 때의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면

$v_1(t)=f'(t)=t^2+2t+1,\ v_2(t)=g'(t)=6t-3$

$v_1(t)=v_2(t)$에서 $t^2+2t+1=6t-3,\ t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0$

$t=2$

시각 t일 때의 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하면

$a_1(t)=v_1'(t)=2t+2,\ a_2(t)=v_2'(t)=6$

따라서 $t=2$일 때, 두 점 P, Q의 가속도의 합은

$a_1(2)+a_2(2)=6+6=12$

답 ①

07

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{2^{-1}}x=-\log_2 x$이므로

$(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}x-8=0$에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8=0$

$(\log_2 x-4)(\log_2 x+2)=0$

$\log_2 x=4$ 또는 $\log_2 x=-2$

$x=2^4$ 또는 $x=2^{-2}$ …… ㉡

㉡은 ㉠을 모두 만족시키므로 모든 실근의 곱은

$2^4\times2^{-2}=2^{4-2}=2^2=4$

답 ①

다른 풀이

$\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x$이므로

$(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}x-8=0$에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8=0$ …… ㉠

$\log_2 x=t$라 하면

$t^2-2t-8=0$ …… ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-8)>0$

이므로 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 ㉠도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 ㉡의 서로 다른 두 실근은

$\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$

$\log_2\alpha\beta=2$

$\alpha\beta=2^2=4$

따라서 모든 실근의 곱은 4이다.

08

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)+2}{h}=1$에서 $h\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(2+2h)+2\}=f(2)+2=0$에서 $f(2)=-2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2=2f'(2)=1$$

이므로 $f'(2)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-xf(x)+xf(x)-2f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{-x\{f(x)-f(2)\}+(x-2)f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\left[\frac{-x\{f(x)-f(2)\}}{x-2}+f(x)\right]\\&=\lim_{x\to 2}(-x)\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+\lim_{x\to 2}f(x)\\&=-2f'(2)+f(2)\\&=-2\times\frac{1}{2}+(-2)=-3\end{aligned}$$

답 ②

09

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle CDA=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=5^2+3^2-2\times 5\times 3\times\cos 60^\circ\\&=19 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 $\overline{AD}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=2^2+x^2-2\times 2\times x\times\cos 120^\circ\\&=4+x^2-4x\times\cos(180^\circ-60^\circ)\\&=4+x^2-4x\times(-\cos 60^\circ)\\&=4+x^2+2x \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$x^2+2x+4=19$, $x^2+2x-15=0$

$(x-3)(x+5)=0$

$x>0$이므로 $x=3$

즉, $\overline{AD}=3$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=\frac{\sqrt{19}}{\sin 60^\circ}=2R$$

$$R=\frac{\sqrt{19}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

이므로 $R^2=\frac{19}{3}$

따라서 $\overline{AD}+R^2=3+\frac{19}{3}=\frac{28}{3}$

답 ②

10

세 함수 $f(x)$, $f(x)-a$, $f(x)+a$는 모두 $x=1$, $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $g(x)=f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$가 불연속인 x의 값이 오직 한 개가 되도록 하려면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속, $x=2$에서 연속 또는 $x=1$에서 연속, $x=2$에서 불연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속일 때

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}\\&=\lim_{x\to 2+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}\\&=f(2)\{f(2)-a\}\{f(2)+a\}\end{aligned}$$

가 성립한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}&=2\times(2-a)(2+a)\\&=2(4-a^2)\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 2+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}=0\times(0-a)(0+a)=0$$

$f(2)\{f(2)-a\}\{f(2)+a\}=2\times(2-a)(2+a)=2(4-a^2)$

에서

$a^2-4=0$이므로 $a=-2$ 또는 $a=2$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}\\&=\lim_{x\to 1+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}\\&=f(1)\{f(1)-a\}\{f(1)+a\}\end{aligned}$$

가 성립한다.

$$\lim_{x\to 1-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}=0\times(0-a)(0+a)=0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}&=-1\times(-1-a)(-1+a)\\&=a^2-1\end{aligned}$$

$f(1)\{f(1)-a\}\{f(1)+a\}=-1\times(-1-a)(-1+a)=a^2-1$

에서

$a^2-1=0$이므로 $a=-1$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=2$이면 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이고 $x=1$에서 불연속이다.

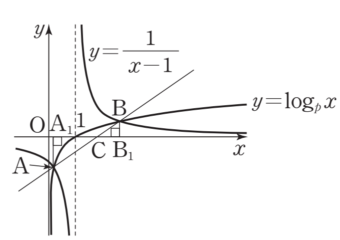
또 $a=-1$ 또는 $a=1$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이고 $x=2$에서 불연속이다. 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은 -2, -1, 1, 2의 4개이고 최댓값은 2이다.

따라서 $n=4$, $m=2$이므로

$n+m=4+2=6$

답 ③

11



두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1이라 하면 삼각형 ACA_1과 삼각형 BCB_1은 서로 닮은 도형이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=2$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AA_1}}}{\overline{\mathrm{BB_1}}}=2$이다.

즉, $\log_p a=-2\log_p b$이므로

$\log_p a=\log_p b^{-2}=\log_p \dfrac{1}{b^2}$에서

$a=\dfrac{1}{b^2}$ …… ㉠

한편, 두 점 A, B가 곡선 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 위의 점이므로

$\dfrac{1}{a-1}=-\dfrac{2}{b-1}$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$$\dfrac{1}{\dfrac{1}{b^2}-1}=-\dfrac{2}{b-1}$$

$$\dfrac{b^2}{1-b^2}=\dfrac{-2}{b-1}$$

$b^2(b-1)=2(b^2-1)$

$b>1$이므로

$b^2=2(b+1)$

$b^2-2b-2=0$에서

$b=1+\sqrt{3}$

따라서

$$ab=\dfrac{1}{b^2}\times b=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

12

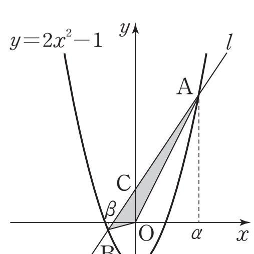
곡선 $y=2x^2-1$과 직선 $y=ax+1$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $2x^2-ax-2=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{a}{2}$, $\alpha\beta=-1$

점 $(0, 1)$을 점 C라 하면

삼각형 ABO의 넓이는 두 삼각형 ACO, CBO의 넓이의 합이므로



$$\begin{aligned}S(a)&=\dfrac{1}{2}\times1\times\alpha+\dfrac{1}{2}\times1\times(-\beta)\\&=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\&=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+4}\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{a\to\infty}\dfrac{S(a)}{a+1}=\lim_{a\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+4}}{a+1}=\lim_{a\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{a^2}}}{1+\dfrac{1}{a}}=\dfrac{1}{4}$$

답 ①

13

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=1^5+1^7=2$

(우변)$=\dfrac{1}{8}\times1^4\times(1+1)^4=\dfrac{1}{8}\times2^4=2$

이므로 (∗)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 (∗)이 성립한다고 가정하면

$a_m+b_m=\dfrac{1}{8}m^4(m+1)^4$

이다. $n=m+1$일 때

$$\begin{aligned}&a_{m+1}+b_{m+1}\\&=\dfrac{1}{8}m^4(m+1)^4+\boxed{(m+1)^5+(m+1)^7}\\&=\dfrac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+8(m+1)+8(m+1)^3\}\\&=\dfrac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+(4m+4)(2m^2+4m+4)\}\\&=\dfrac{1}{8}(m+1)^4[m^4+(\boxed{4m+4})\{(m+2)^2+m^2\}]\\&=\dfrac{1}{8}(m+1)^4[m^4+\{(m+2)^2-m^2\}\{(m+2)^2+m^2\}]\\&=\dfrac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+(m+2)^4-m^4\}\\&=\dfrac{1}{8}(m+1)^4(m+2)^4\\&=\dfrac{1}{8}\{\boxed{(m+1)(m+2)}\}^4\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (∗)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+b_n=\dfrac{1}{8}n^4(n+1)^4$

이다.

이상에서

$f(m)=(m+1)^5+(m+1)^7$

$g(m)=4m+4$

$h(m)=(m+1)(m+2)$

이므로

$f(1)=2^5+2^7=160$

$g(3)=12+4=16$

$h(5)=6\times7=42$

따라서 $f(1)+g(3)+h(5)=160+16+42=218$

답 ⑤

14

함수 $f(x)=a\cos b\pi x$의 그래프는 주기가 $\dfrac{2}{b}$이다.

$f(0)=a$이므로 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{A}(0, a)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2b}, 0\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2b}, 0\right)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{b}, -a\right)$

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DC}}$이고 $\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$이므로 삼각형 BDC는 직각이등변삼각형이다. 이때 원점 O에 대하여 $\angle\mathrm{ABO}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAO}$이므로 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

그러므로 $a=\dfrac{1}{2b}$ …… ㉠

$\overline{AB}=\overline{BD}$에서 두 삼각형 ABC, BDC의 넓이는 같다.

즉,

(삼각형 ADC의 넓이)

$=$(삼각형 ABC의 넓이)$+$(삼각형 BDC의 넓이)

$=2\times$(삼각형 ABC의 넓이)

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{b}\times a$

$=\frac{a}{b}=18$

㉠에서 $\frac{1}{2b^2}=18$, $b^2=\frac{1}{36}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{6}$

$b=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 $a+b=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$

답 ④

15

ㄱ. $f(x)=x^2(x-t)^2$에서

$f'(x)=2x(x-t)^2+2x^2(x-t)$

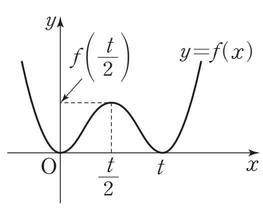
$=2x(x-t)\{(x-t)+x\}$

$=2x(x-t)(2x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=t$ 또는 $x=\frac{t}{2}$

$t\neq0$일 때 $x=\frac{t}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{2}$에서 극댓값을 가진다. (참)

ㄴ. $t>0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f\left(\frac{t}{2}\right)=\left(\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{t}{2}-t\right)^2=\left(\frac{t}{2}\right)^4$이므로

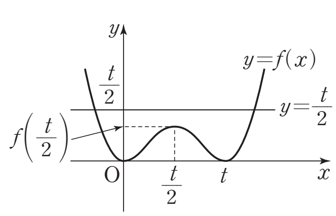
$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}$에서 $t=2$

따라서

(i) $0<t<2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4<\frac{t}{2}$

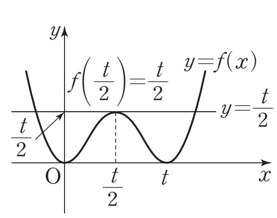
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $g(t)=2$



(ii) $t=2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}$

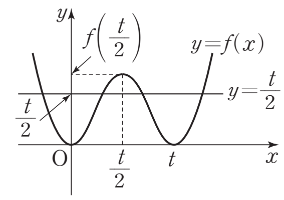
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 $g(t)=3$



(iii) $t>2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4>\frac{t}{2}$

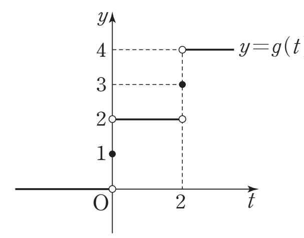
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 네 점에서 만나므로 $g(t)=4$



또한 $t=0$일 때 함수 $f(x)=x^4$의 그래프와 직선 $y=0$은 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$이고 $t<0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 만나지 않으므로 $g(t)=0$이다.

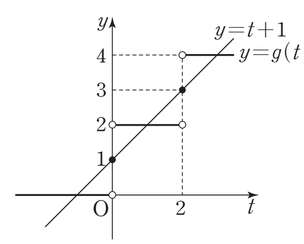
따라서 부등식 $\lim_{t\to a-}g(t)<\lim_{t\to a+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 a는 0, 2이므로 그 합은 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=t+1$, $y=g(t)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

그림과 같이 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=t+1$은 5개의 점에서 만나므로 방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다. (참)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$f'(x)=2x+4$

$g(x)=\int f'(x)\,dx+\int f(x)\,dx$

$=\int\{f'(x)+f(x)\}\,dx$

$=\int\{(2x+4)+(x^2+4x+3)\}\,dx$

$=\int(x^2+6x+7)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $g(0)=C=3$이므로

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+3$

따라서 $g(3)=9+27+21+3=60$

답 60

다른 풀이

$g(x)=\int f'(x)\,dx+\int f(x)\,dx$

$=f(x)+C_1+\int (x^2+4x+3)\,dx$ (단, C_1은 적분상수)

$=x^2+4x+3+C_1+\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+3+C_1+C_2$

이때 $g(0)=3$이므로 $C_1+C_2=0$

따라서 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+3$이므로

$g(3)=9+27+21+3=60$

17

$f(x)=4^x-2^{x+2}+3$

$=2^{2x}-4\times 2^x+3$

$=(2^x-2)^2-1$

$-2\le x\le 2$에서 $\frac{1}{4}\le 2^x\le 4$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -1, $x=2$일 때 최댓값 3을 갖는다.

따라서 $M=3$, $m=-1$이므로

$M^2+m^2=3^2+(-1)^2=9+1=10$

답 10

18

$a_1=10$

$a_2=a_1+3=10+3=13$

$a_3=a_2+3=13+3=16$

$a_4=\log_2 a_3=\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

$a_5=\log_2 a_4=\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2$

$a_6=\log_2 a_5=\log_2 2=1$

$\log_2 1=0$으로 자연수가 아니므로

$a_7=a_6+3=1+3=4$

$a_8=2$

$a_9=1$

$a_{10}=4$

$\vdots$

에서 $n\ge 4$일 때 수열 $\{a_n\}$은 4, 2, 1이 반복되므로

$\sum_{k=1}^{20} a_k=10+13+16+(4+2+1)\times 5+4+2$

$=39+35+6=80$

답 80

19

$S_p=T_p$이므로

$\int_0^{a_p}(x^3-px^2)\,dx=0$

이다.

$\int_0^{a_p}(x^3-px^2)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{p}{3}x^3\right]_0^{a_p}$

$=\frac{1}{4}{a_p}^4-\frac{p}{3}{a_p}^3$

$=\frac{1}{4}{a_p}^3\left(a_p-\frac{4}{3}p\right)$

$=0$

$a_p\ne 0$이므로 $a_p=\frac{4}{3}p$

따라서

$\lim_{p\to\infty}\frac{6a_p}{p+1}=\lim_{p\to\infty}\frac{6\times\frac{4}{3}p}{p+1}$

$=\lim_{p\to\infty}\frac{8p}{p+1}$

$=8$

답 8

20

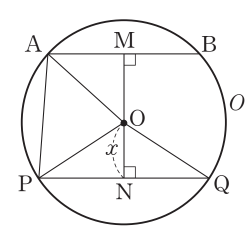
원 O의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 AB, PQ에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고 $\overline{\mathrm{ON}}=x$ $(0\le x<3)$이라 하자.

이때 0이 아닌 x의 값에 대하여 점 N은 그림과 같이 점 O의 위쪽 또는 아래쪽에 생기지만 삼각형 APQ의 넓이의 최댓값을 구하므로 점 N은 점 O의 아래쪽에 놓인다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PN}}=2\sqrt{3^2-x^2}=2\sqrt{9-x^2}$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{9-(\sqrt{5})^2}=2$

$\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{OM}}+\overline{\mathrm{ON}}=2+x$이므로



삼각형 APQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{9-x^2}\times(2+x)$

$=\sqrt{9-x^2}\times(2+x)$

이때

$f(x)=S^2=(9-x^2)(x^2+4x+4)$

$=-x^4-4x^3+5x^2+36x+36$

으로 놓으면

$f'(x)=-(4x^3+12x^2-10x-36)$

$=-2(2x^3+6x^2-5x-18)$

$=-2(x+2)(2x^2+2x-9)$

$f'(x)=0$에서 $0\le x<3$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$

따라서 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 $f(x)$는 극대이면서 최대이다.

$S>0$이므로 S^2이 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 최대이면 S도 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 최대이다.

$x^2=\frac{10-\sqrt{19}}{2}$이므로 ㉠에서

$a^2=4(9-x^2)=4\left(9-\frac{10-\sqrt{19}}{2}\right)=16+2\sqrt{19}$

따라서 $m=16$, $n=19$이므로

$m+n=16+19=35$

답 35

21

$a_2=a$라 하면 조건 (가)에서 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이므로

$a_1+a_2=1+a$

$a_2+a_3=4+a$에서 $a_3=4$

$a_3+a_4=7+a$에서 $a_4=3+a$

$a_4+a_5=10+a$에서 $a_5=7$

$a_5+a_6=13+a$에서 $a_6=6+a$

$a_6+a_7=16+a$에서 $a_7=10$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{2n-1}=3n-2$ ...... ㉠

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{2n}=3n+a-3$

조건 (나)에서 $a_{20}=32$이므로

$a_{20}=30+a-3=27+a=32$에서

$a=5$이므로

$a_{2n}=3n+5-3=3n+2$ ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}\\&=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)+\sum_{k=1}^{10}(3k+2)\\&=\sum_{k=1}^{10}6k\\&=6\times\frac{10\times11}{2}\\&=330\end{aligned}$$

답 330

다른 풀이

조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+3$

즉, $a_{n+2}=a_n+3$이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a_2이고 공차가 3인 등차수열이다.

조건 (나)에서 $a_{20}=a_2+9\times3=32$이므로 $a_2=5$이다.

이때 수열 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$은 첫째항이 6, 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})\\&=\frac{10\times(2\times6+9\times6)}{2}\\&=330\end{aligned}$$

22

함수 $g_n(x)$는 $2k-1\le x<2k$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$)에서 함숫값이 $f(k)$인 상숫값을 가지므로 $f'(k)=0$이면 함수 $g_n(x)$는 $x=2k-1$, $x=2k$에서 미분가능하고 $f'(k)\ne0$이면 함수 $g_n(x)$는 $x=2k-1$, $x=2k$에서 미분가능하지 않다.

만약 모든 자연수 k에 대하여 $f'(k)\ne0$이면

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ \cdots,\ a_n=2n$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 자연수 p의 최솟값은 1이 되어 모순이다.

조건 (가)에서 $b_1=a_6=l$ (l은 짝수인 자연수)라 하면

$b_2=a_7=l+2,\ b_3=a_8=l+4,\ b_4=a_9=l+6,\ \cdots$이므로

$f'(6)=0$ ...... ㉠

이고, 7 이상인 자연수 k에 대하여 $f'(k)\ne0$이다.

$x<11$일 때 $g_6(x)=g_5(x)$이고

$11\le x<12$일 때 $g_6(x)=f(6)$, $g_5(x)=f(x-5)$이고

$x\ge12$일 때 $g_6(x)=g_5(x-1)$이므로

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_0^{12}g_6(x)\,dx-\int_0^{11}g_5(x)\,dx&=\int_{11}^{12}g_6(x)\,dx\\&=\int_{11}^{12}f(6)\,dx=0\end{aligned}$$

따라서 $f(6)=0$ ...... ㉡

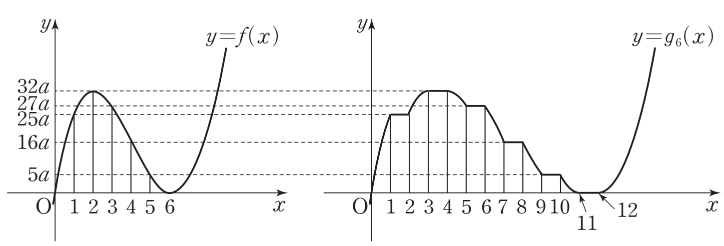
$f(0)=0$이고 ㉠, ㉡에 의하여

$f(x)=ax(x-6)^2$ (a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=a\{(x-6)^2+2x(x-6)\}=3a(x-2)(x-6)$

따라서 $a>0$일 때, 함수 $y=f(x)$와 함수 $y=g_6(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\int_6^{14}f(x)dx=\int_{12}^{20}g_6(x)\,dx$이므로

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}&\int_0^{20}g_6(x)\,dx-\int_0^{14}f(x)\,dx\\&=\int_0^{12}g_6(x)\,dx+\int_{12}^{20}g_6(x)\,dx-\left(\int_0^6f(x)\,dx+\int_6^{14}f(x)\,dx\right)\\&=\int_0^{12}g_6(x)\,dx-\int_0^6f(x)\,dx\\&=\int_1^2g_6(x)\,dx+\int_3^4g_6(x)\,dx+\int_5^6g_6(x)\,dx+\int_7^8g_6(x)\,dx\\&\qquad+\int_9^{10}g_6(x)\,dx+\int_{11}^{12}g_6(x)\,dx\\&=25a+32a+27a+16a+5a+0\\&=105a=21\end{aligned}$$

$a=\frac{1}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x(x-6)^2$이므로

$f(10)=\frac{1}{5}\times10\times(10-6)^2=32$

답 32

참고

$a<0$일 때, $\int_6^{14}f(x)\,dx=\int_{12}^{20}g_6(x)\,dx$이고

$\int_0^{20}g_6(x)\,dx-\int_0^{14}f(x)\,dx<0$이므로

조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

23

점 A를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(3,\ 4,\ -2)$이므로 이 점을 다시 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이 A이다.

즉, $A(3,\ 4,\ 2)$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(3,\ 4,\ -2)$이므로 이 점을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 점이 B이다.

즉, $B(3,\ -4,\ 2)$

따라서 $\overline{AB}=|-4-4|=8$

답 ④

24

포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서 포물선의 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$b^2=8a$ …… ㉠

$\overline{PH}=a-(-2)=a+2$

한편 포물선의 정의에 의해 $\overline{PH}=\overline{PF}$이므로

$\overline{PF}=a+2$ …… ㉡

원 C_1은 중심이 P이고, 반지름의 길이가 $\overline{FP}$이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{FP}$ …… ㉢

원 C_2는 중심이 F이고, 반지름의 길이가 $\overline{PF}$이므로

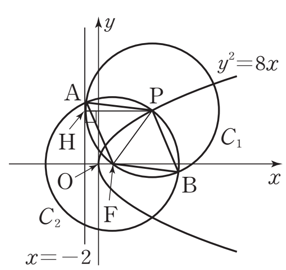
$\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{PF}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$\overline{AP}=\overline{AF}=\overline{PF}=a+2$

$\overline{BP}=\overline{BF}=\overline{PF}=a+2$

즉, 두 삼각형 AFP, BPF는 한 변의 길이가 $a+2$이고, 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)^2$인 정삼각형이다. 이때 사각형 AFBP의 넓이는 두 정삼각형 AFP, BPF의 넓이의 합이므로



$2\times\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)^2=50\sqrt{3}$

$(a+2)^2=100$

$a=8\ (a>0)$

㉠에서 $b^2=8\times8=64,\ b=8\ (b>0)$

따라서 $a+b=8+8=16$

답 ①

25

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=3^2-2^2=5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=k$라 하면

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2+2k+2^2=13+2k$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2-2k+2^2=13-2k$

이므로 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}|\,|\vec{a}-\vec{b}|\cos\theta$에서

$5=\sqrt{13+2k}\times\sqrt{13-2k}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$

$5\sqrt{5}=\sqrt{(13+2k)(13-2k)}$

$125=169-4k^2,\ k^2=11$

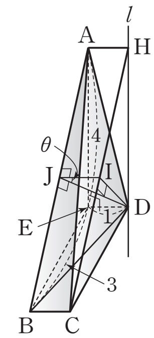
따라서 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=11$

답 ①

26

$\overline{AE}=4,\ \overline{BE}=3$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

점 D를 지나고 평면 BCDE에 수직인 직선을 l이라 하면 직선 l은 직선 AE와 평행하다. 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 네 점 A, B, C, H는 한 평면 위에 있다. 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 I라 하고 점 I에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 J라 하면 삼수선의 정리에 의하여 선분 DJ는 선분 AB와 수직이다.



즉, 평면 ABC와 평면 ABD가 이루는 각을 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{IJ}}{\overline{DJ}}$

삼각형 HCD에서 $\frac{1}{2}\times\overline{CH}\times\overline{DI}=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DH}$이므로

$\overline{DI}=\frac{12}{5}$이고 $\overline{DJ}=\sqrt{1^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}$

즉, $\cos\theta=\frac{\overline{IJ}}{\overline{DJ}}=\frac{5}{13}$

한편, 직선 AE가 평면 BCDE에 수직이고, 선분 BE와 선분 BC는 서로 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 선분 AB와 선분 BC는 서로 수직이다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times5=\frac{5}{2}$이므로 삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는

$\frac{5}{2}\cos\theta=\frac{5}{2}\times\frac{5}{13}=\frac{25}{26}$

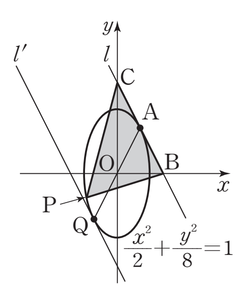
답 ②

27

타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $A(1,\ 2)$에서의 접선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{2y}{8}=1,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(2,\ 0),\ (0,\ 4)$이다.



삼각형 PBC의 넓이가 최대가 되는 경우는 점 P와 직선 l 사이의 거리가 최대가 되는 경우이다. 직선 l과 평행하면서 제3사분면에서 타원과 접하는 직선을 l'이라 하고 타원과 직선 l'이 만나는 점을 Q라 하면 점 P와 직선 l 사이의 거리가 최대가 되는 경우는 점 P가 점 Q와 일치하는 경우이다. 이때 점 Q는 점 A와 원점에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표는 $(-1,\ -2)$이고 점 P의 좌표가 $(-1,\ -2)$일 때 삼각형 PBC의 넓이는 최대이다.

점 $(-1,\ -2)$와 직선 $l:2x+y-4=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|2\times(-1)+(-2)-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+4^2}\times\frac{8}{\sqrt{5}}=8$

답 ④

참고

직선 BC의 기울기가 -2이므로 직선 l'의 방정식은

$y=-2x-\sqrt{2\times(-2)^2+8}=-2x-4$

$2x+y+4=0$

따라서 점 B$(2,\ 0)$과 직선 l' : $2x+y+4=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|2\times2+0+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

28

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}&=(\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}})-(\overrightarrow{\mathrm{CQ}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CQ}})-(\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{QP}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{QP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

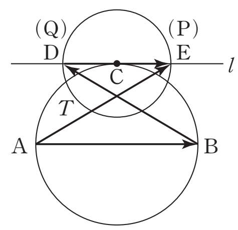
이때 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 l이 원 T와 만나는 두 점을 D, E $(\overline{\mathrm{AD}}<\overline{\mathrm{AE}})$라 하자.

(i) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$

$\le|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$

$\le|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|$

$=3+2=5$



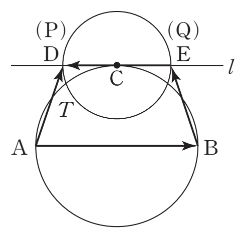
즉, 두 점 P, Q가 각각 두 점 E, D와 일치할 때 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$는 최댓값 5를 갖는다.

(ii) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$

$\ge|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|-|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$

$\ge|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|-|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|$

$=3-2=1$



즉, 두 점 P, Q가 각각 두 점 D, E와 일치할 때 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$는 최솟값 1을 갖는다.

(i), (ii)에서 $M=5$, $m=1$이므로

$M+m=5+1=6$

답 ①

참고

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값과 최솟값은 점 C의 위치와 관계없이 일정하다.

29

점 $(6-n,\ n)$은 직선 $y=-x+6$ 위의 점이다.

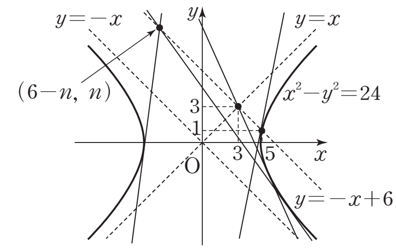
직선 $y=-x+6$과 쌍곡선 $x^2-y^2=24$를 연립하면

$x^2-(6-x)^2=24$

$x^2-(36-12x+x^2)=24,\ x=5$

즉, 직선 $y=-x+6$과 쌍곡선 $x^2-y^2=24$는 점 $(5,\ 1)$에서 만난다.

또, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=x$, $y=-x$이므로 직선 $y=-x+6$과 점근선 $y=x$는 점 $(3,\ 3)$에서 만난다.



그림과 같이 점 $(3,\ 3)$과 쌍곡선 위의 점 $(5,\ 1)$에서 쌍곡선에 그을 수 있는 서로 다른 모든 접선의 개수는 1이고, 자연수 n $(n\ne1,\ n\ne3)$에 대하여 직선 $y=-x+6$ 위의 점 $(6-n,\ n)$에서 쌍곡선에 그을 수 있는 서로 다른 모든 접선의 개수는 2이므로

$\begin{cases}a_1=a_3=1\\a_n=2\ (n\ne1,\ n\ne3)\end{cases}$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=1\times2+2\times8=18$

답 18

다른 풀이

점 $(6-n,\ n)$에서 쌍곡선 $x^2-y^2=24$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 접선의 방정식은

$ax-by=24$ …… ㉠

㉠이 점 $(6-n,\ n)$을 지나므로

$a(6-n)-bn=24$

$b=\frac{(6-n)a-24}{n}$ …… ㉡

한편, 점 $(a,\ b)$는 쌍곡선 위의 점이므로

$a^2-b^2=24$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$a^2-\left\{\frac{(6-n)a-24}{n}\right\}^2=24$

위 식을 정리하여 간단히 하면

$(3-n)a^2-4(6-n)a+2(24+n^2)=0$ …… ㉣

(i) $n=3$일 때

$-4\times(6-3)a+2(24+3^2)=0,\ a=\frac{11}{2}$

㉡에서

$b=a-8=\frac{11}{2}-8=-\frac{5}{2}$

이므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{11}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

즉, 접점의 개수가 1이므로 $a_3=1$

(ii) $n\ne3$일 때

이차방정식 ㉣의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(6-n)\}^2-(3-n)\times2(24+n^2)$

$=2n^2(n-1)$

ⓐ $n=1$일 때

이차방정식 ㉣에서

$a^2-10a+25=0,\ a=5$ (중근)

㉡에서

$b=5a-24=5\times5-24=1$

이므로 접점의 좌표는 $(5,\ 1)$

즉, 접점의 개수가 1이므로 $a_1=1$

ⓑ $n\neq1$일 때

$\dfrac{D}{4}>0$이므로 이차방정식 ㉣의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하자.

$a=\alpha$를 ㉡에 대입하면 $b=\dfrac{(6-n)\alpha-24}{n}$이므로 접점의 좌표는

$\left(\alpha,\ \dfrac{(6-n)\alpha-24}{n}\right)$

$a=\beta$를 ㉡에 대입하면 $b=\dfrac{(6-n)\beta-24}{n}$이므로 접점의 좌표는

$\left(\beta,\ \dfrac{(6-n)\beta-24}{n}\right)$

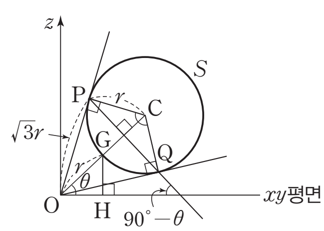
즉, 접점의 개수가 2이므로

$a_2=a_4=a_5=\cdots=2$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_1=a_3=1 \\ a_n=2\ (n\neq1,\ n\neq3) \end{cases}$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=1\times2+2\times8=18$

30



그림과 같이 원점과 구의 중심 C를 지나고 xy평면에 수직인 평면으로 구를 자른 단면을 생각하자. 이때 원점에서 이 원에 접선을 그었을 때 두 접점 중 z좌표가 큰 점이 P, 작은 점이 Q이다.

구의 반지름의 길이를 r라 하면 조건 (가)에서 삼각형 OPQ가 정삼각형이므로 $\angle PCQ=120°$, $\angle PCO=\angle QCO=60°$이다.

즉, $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{PQ}=\sqrt{3}r$

삼각형 OPQ의 무게중심을 G라 하면 점 $G\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{4}{3},\ 2\right)$는 선분 OC 위에 있고, $\overline{OG}=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{OP}\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}r=r$이므로

$r=\overline{OG}=\sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+2^2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$,

$\overline{PQ}=\sqrt{3}r=\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{21}}{3}=2\sqrt{7}$

한편, 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{4}{3},\ 0\right)$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

즉, 직선 OG와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{OH}}{\overline{OG}}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{21}}{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

이때 직선 PQ와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $90°-\theta$이므로 선분 PQ의 xy평면 위로의 정사영의 길이 l은

$l=\overline{PQ}\times\cos(90°-\theta)=2\sqrt{7}\times\sin\theta$

$=2\sqrt{7}\times\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}=2\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=2\sqrt{3}$

따라서 $l^2=(2\sqrt{3})^2=12$

답 12

실전 모의고사 3회 본문 146~153쪽

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ①	07 ②	08 ③	09 ③	10 ②
11 ②	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 11	17 7	18 9	19 12	20 68
21 11	22 550	23 ②	24 ③	25 ④
26 ⑤	27 ⑤	28 ②	29 8	30 30

01

$\sqrt[5]{16}\times\sqrt[10]{8}=\sqrt[5]{2^4}\times\sqrt[10]{2^3}=2^{\frac{4}{5}}\times2^{\frac{3}{10}}=2^{\frac{8}{10}+\frac{3}{10}}=2^{\frac{11}{10}}$

답 ②

02

$$\int_0^1 x^3(a-x^2)\,dx=\int_0^1(ax^3-x^5)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3a-2}{12}$$

즉, $\dfrac{3a-2}{12}=\dfrac{5}{12}$에서

$3a-2=5$, $3a=7$

따라서 $a=\dfrac{7}{3}$

답 ⑤

03

함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=4^{x+1}$

이 그래프가 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=4^2=16$

답 ④

04

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=3$이고 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=4$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}f(x)=3+4=7$

답 ⑤

05

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta-\sin\theta$$
$$=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{7}{5}$$

답 ②

06

$F(x)=(x+1)f(x)-4x^3-6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-12x^2-12x$

$(x+1)f'(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$

$x\neq-1$일 때 $f'(x)=12x$이고 $f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)$도 다항함수이다.

따라서 $f'(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}f'(x)=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}f'(x)=\lim\limits_{x\to-1}12x=-12$

답 ①

07

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이므로 $f'(1)=3$이고 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ 2)$를 지난다.

즉, $f(1)=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이므로 $g'(1)=2$이고 곡선 $y=g(x)$는 점 $(1,\ 3)$을 지난다.

즉, $g(1)=3$

한편, 곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 중에서 x좌표가 1인 점의 y좌표는

$f(1)g(1)+1=2\times3+1=7$이고

$h(x)=f(x)g(x)+1$이라 하면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 $(1,\ 7)$에서의 접선의 기울기는

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=3\times3+2\times2=13$

구하는 접선의 방정식은 $y-7=13(x-1)$, 즉

$y=13x-6$

따라서 $a-b=13-(-6)=19$

답 ②

08

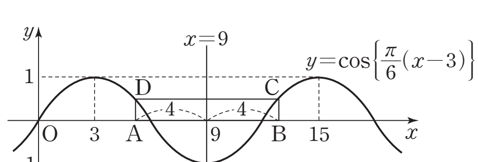
함수 $y=\cos\left\{\frac{\pi}{6}(x-3)\right\}$의 그래프는 주기가 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이고

$y=\cos\frac{\pi}{6}x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

$x=3$일 때 $y=1$이고 주기가 12이므로 $x=9$일 때 $y=-1$, $x=15$일 때 $y=1$이다. 따라서 두 점 A, B는 직선 $x=9$에 대하여 대칭이다.

$\overline{\text{AB}}=8$에서 점 A와 점 B의 좌표는 각각 A$(5,\ 0)$, B$(13,\ 0)$이고

$x=5$일 때 $y=\cos\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 점 D의 좌표는 D$\left(5,\ \frac{1}{2}\right)$이다.



따라서 직사각형 ABCD의 넓이 S는

$S=8\times\frac{1}{2}=4$

답 ③

09

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to b-}\{(x-2)^2+a\}=\lim\limits_{x\to b+}2x=f(b)$

$\lim\limits_{x\to b-}\{(x-2)^2+a\}=(b-2)^2+a$

$\lim\limits_{x\to b+}2x=2b$

$f(b)=2b$

그러므로 $(b-2)^2+a=2b$, 즉 $b^2-6b+a+4=0$에서

$a=-b^2+6b-4=-(b-3)^2+5$

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ③

10

함수 $y=a^{x+1}+b$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이고 감소하는 함수이므로

$0<a<1$

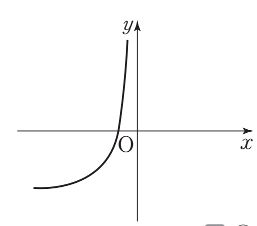
또 함수 $y=a^{x+1}+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=a^0+b=1+b$에서 $b=-1$

이 값을 $y=\log_a(bx)$에 대입하면 $y=\log_a(-x)$이고

이 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다. 이때 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 $0<a<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값이 감소하는 그래프이다.

따라서 함수 $y=\log_a(bx)$의 그래프의 개형은 오른쪽과 같다.



답 ②

11

$g(x)=f(x)+2a$이므로 방정식 $g(x)=0$의 근은 방정식 $f(x)=-2a$의 근과 같다.

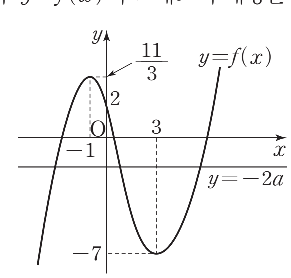
$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$

에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	-7	↗

$f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 $-7<-2a<2$이어야 한다. 즉,

$-1<a<\frac{7}{2}$

따라서 만족시키는 정수 a의 값은 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 4이다.

답 ②

12

$\{f(x)-2ax+a^2\}^2$

$=a^4+4a^2x^2+\{f(x)\}^2-4a^3x-4axf(x)+2a^2f(x)$

$=a^4-4xa^3+\{4x^2+2f(x)\}a^2-4xf(x)a+\{f(x)\}^2$

이므로

$$\int_0^1 \{f(x)-2ax+a^2\}^2dx$$

$$=a^4\int_0^1 1\,dx-a^3\int_0^1 4x\,dx+a^2\int_0^1 \{4x^2+2f(x)\}\,dx$$

$$-4a\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_0^1 \{f(x)\}^2dx$$

$$=a^4-2a^3+\left\{\frac{4}{3}+2\times\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}a^2-4a\times 0+\int_0^1 \{f(x)\}^2dx$$

$$=a^4-2a^3-2a^2+\int_0^1 \{f(x)\}^2dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=k$ (k는 상수)라 하고 ㉠을 $g(a)$로 놓으면

$g'(a)=4a^3-6a^2-4a=2a(2a+1)(a-2)$

$g'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

$g(a)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$ 중에서 최솟값을 가진다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+k=-\frac{3}{16}+k$

$g(2)=16-16-8+k=-8+k$

이므로 $g(a)$는 $a=2$에서 최솟값을 가진다.

답 ④

13

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$

이므로 $S_n-S_{n-1}=\frac{3{S_n}^2}{3S_n+1}$, 즉

$(S_n-S_{n-1})(3S_n+1)=3{S_n}^2$, $3{S_n}^2+S_n-3S_nS_{n-1}-S_{n-1}=3{S_n}^2$

$(1-3S_{n-1})S_n=S_{n-1}$

$S_n=\frac{S_{n-1}}{1-3S_{n-1}}$, $\frac{1}{S_n}=\frac{1-3S_{n-1}}{S_{n-1}}$

이므로 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}+\boxed{-3}$, $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$이다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공차가 $\boxed{-3}$인 등차수열이다. 즉,

$\frac{1}{S_n}=-3n+4$, $S_n=\boxed{\frac{1}{4-3n}}$

이다. ㉠에서

$a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge 2)$

$=\frac{1}{4-3n}-\frac{1}{7-3n}=\boxed{\frac{3}{(4-3n)(7-3n)}}$

따라서 $a_n=\begin{cases} 1 & (n=1) \\ \boxed{\frac{3}{(4-3n)(7-3n)}} & (n\ge 2) \end{cases}$

그러므로

$k=-3$, $f(n)=\frac{1}{4-3n}$, $g(n)=\frac{3}{(4-3n)(7-3n)}$

이다.

따라서 $kf(3)g(3)=-3\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}$

답 ③

14

ㄱ. t초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(0)=x_2(0)=0$이므로

$x_1(t)=\int_0^t v_1(t)\,dt=\int_0^t (4t^2-6at-a^2)\,dt$

$=\frac{4}{3}t^3-3at^2-a^2t$

$x_2(t)=\int_0^t v_2(t)\,dt=\int_0^t (t^2+6at-10a^2)\,dt$

$=\frac{1}{3}t^3+3at^2-10a^2t$

따라서

$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$

$=\left|\frac{4}{3}t^3-3at^2-a^2t-\frac{1}{3}t^3-3at^2+10a^2t\right|$

$=|t^3-6at^2+9a^2t|=|t|(t-3a)^2$

$=t(t-3a)^2$ (참)

ㄴ. $a=2$일 때, $f(t)=t(t-6)^2$이므로

$f'(t)=(t-6)^2+2t(t-6)=(t-6)(t-6+2t)$

$=3(t-2)(t-6)$

따라서 $y=f(t)$는 $t=2$에서 극댓값을 가지고 $t=6$에서 극솟값을 가지므로 $0\le t\le 3$에서 $y=f(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최댓값을 가진다.

따라서 최댓값은 $f(2)=2\times(-4)^2=32$ (참)

ㄷ. $0\le t\le 3$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

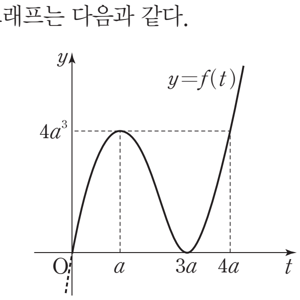
(i) $a>0$일 때

$f'(t)=(t-3a)^2+t\times 2(t-3a)=(t-3a)(t-3a+2t)$

$=3(t-3a)(t-a)$

이므로 $y=f(t)$는 $t=a$에서 극댓값을 가지고, $t=3a$에서 극솟값을 가진다.

$f(0)=f(3a)=0$이고, $f(a)=f(4a)=4a^3$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



㉠ $4a<3$ 또는 $a>3$, 즉 $0<a<\frac{3}{4}$ 또는 $a>3$인 경우

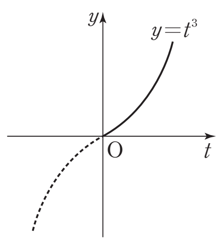
$0\le t\le 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(3)=27(a-1)^2$

㉡ $a\le 3\le 4a$, 즉 $\frac{3}{4}\le a\le 3$인 경우

$0\le t\le 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(a)=4a^3$

(ii) $a=0$일 때

$f(t)=t^3$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$0\le t\le 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(3)=3^3=27$

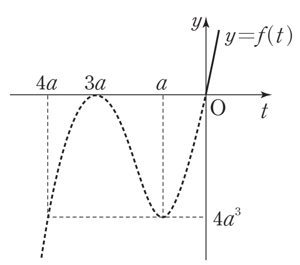
(iii) $a<0$일 때

$f'(t)=(t-3a)^2+t\times 2(t-3a)=(t-3a)(t-3a+2t)$

$=3(t-3a)(t-a)$

이므로 $y=f(t)$는 $t=a$에서 극솟값을 가지고, $t=3a$에서 극댓값을 가진다.

$f(0)=f(3a)=0$이고, $f(a)=f(4a)=4a^3$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.

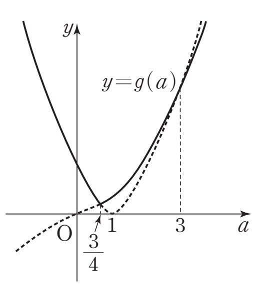


$0\le t\le 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(3)=27(a-1)^2$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(a)=\begin{cases} 27(a-1)^2 & \left(a<\frac{3}{4},\ a>3\right) \\ 4a^3 & \left(\frac{3}{4}\le a\le 3\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(a)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $g(a)$는 $a=\frac{3}{4}$일 때, 최솟값 $g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{16}$을 가진다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

$\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라 하면 $S_n=\begin{cases} n^2-2n+2 & (n\le 20) \\ 3n & (n\ge 21)\end{cases}$ …… ㉠

$n\le 20$일 때 $S_n=n^2-2n+2$이므로

$2\le n\le 20$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-2n+2)-\{(n-1)^2-2(n-1)+2\}=2n-3$

$n=1$일 때, ㉠에서 $a_1=S_1=1$

$a_n=\begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-3 & (2\le n\le 20)\end{cases}$ …… ㉡

$n=21$일 때, ㉠에서 $S_{21}=3\times 21=63$이므로

$a_{21}=S_{21}-S_{20}=63-(20^2-2\times 20+2)=-299$ …… ㉢

$n\ge 22$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-3(n-1)=3$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $a_n=\begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-3 & (2\le n\le 20) \\ -299 & (n=21) \\ 3 & (n\ge 22)\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2}$에서

(i) $k=1$일 때

$a_1=1$

(ii) $2\le k\le 6$일 때

$a_k=2k-3$에서

$\sum_{k=2}^{6} a_{3k-2}=-1+\sum_{k=2}^{6} a_{3k-2}-(-1)=\sum_{k=1}^{6}(6k-7)-(-1)$

$=6\sum_{k=1}^{6}k-7\times 6-(-1)$

$=6\times\left(\frac{6\times 7}{2}\right)-42-(-1)=85$

$\sum_{k=7}^{15} ka_{3k}$에서

(iii) $k=7$일 때

$7a_{21}=7\times(-299)=-2093$

(iv) $8\le k\le 15$일 때

$a_k=3$이므로

$\sum_{k=8}^{15} ka_{3k}=\sum_{k=8}^{15}(k\times 3)=3\sum_{k=8}^{15}k$

$=3\left(\sum_{k=1}^{15}k-\sum_{k=1}^{7}k\right)=3\left(\frac{15\times 16}{2}-\frac{7\times 8}{2}\right)=276$

(i)~(iv)에서

$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2}+\sum_{k=7}^{15} ka_{3k}=1+85+(-2093)+276=-1731$

답 ③

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=5$ …… ㉠

$a_7+a_8=(a+6d)+(a+7d)=2a+13d=37$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $d=3$

따라서 $a_n=(-1)+(n-1)\times 3=3n-4$

$a_n<30$에서 $3n-4<30$, $n<\frac{34}{3}$

따라서 모든 자연수 n은 1, 2, 3, …, 11이고 그 개수는 11이다.

답 11

17

$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}$의 극한값이 존재하고 $x \to 2$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$f(2)-2=0$, 즉 $f(2)=2$

$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-3}{2x-4}$의 극한값이 존재하고 $x \to 2$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$g(2)-3=0$, 즉 $g(2)=3$

$$\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-3}{2x-4}=\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-3}{2(x-2)}=\frac{1}{2}\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-3}{x-2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{1}{2}g'(2)$$

그러므로 $f'(2)=\frac{1}{2}g'(2)$, 즉 $g'(2)=2f'(2)$

함수 $h(x)=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$에서

$$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$$
$$=3f'(2)+2g'(2)=3f'(2)+4f'(2)=7f'(2)$$

이므로 $\frac{h'(2)}{f'(2)}=7$

따라서 $a=7$

답 7

18

$4^{2x}>\sqrt[n]{8}\times 4^{x}$에서

$2^{4x}>8^{\frac{1}{n}}\times 2^{2x}$, $2^{4x}>2^{\frac{3}{n}}\times 2^{2x}$, $2^{4x}>2^{2x+\frac{3}{n}}$

밑이 1보다 크므로

$4x>2x+\frac{3}{n}$, $2x>\frac{3}{n}$, $x>\frac{3}{2n}$

따라서 $\frac{3}{2n}=\frac{1}{6}$이므로 $n=9$

답 9

19

함수 $f(x)+ax$의 도함수 $f'(x)+a$에 대하여

$f'(x)+a=(x+2)(x-5)+a=x^2-3x-10+a$

$f(x)+ax$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위해서는

이차방정식 $f'(x)+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-3x-10+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4(-10+a)=49-4a>0$에서 $a<\frac{49}{4}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 12이다.

답 12

20

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$$b_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}=ar^{2n-1-1}+ar^{2n+1-1}=ar^{2n-2}+ar^{2n}$$
$$=a(r^2)^{n-1}+a(r^2)^{n-1}\times r^2=(a+ar^2)(r^2)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a+ar^2$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21이므로

$\frac{(a+ar^2)\{(r^2)^3-1\}}{r^2-1}=21$ …… ㉠

$$c_n=a_{4n-3}+a_{4n-1}=ar^{4n-3-1}+ar^{4n-1-1}=ar^{4n-4}+ar^{4n-2}$$
$$=a(r^4)^{n-1}+a(r^4)^{n-1}\times r^2$$
$$=(a+ar^2)(r^4)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $a+ar^2$이고 공비가 r^4인 등비수열이다.

수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제2항까지의 합이 17이므로

$\frac{(a+ar^2)\{(r^4)^2-1\}}{r^4-1}=17$ …… ㉡

㉠에서

$$\frac{(a+ar^2)\{(r^2)^3-1\}}{r^2-1}=\frac{(a+ar^2)(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{r^2-1}$$
$$=(a+ar^2)(r^4+r^2+1)=21$$

따라서 $a+ar^2=\frac{21}{r^4+r^2+1}$ …… ㉢

㉡에서

$$\frac{(a+ar^2)\{(r^4)^2-1\}}{r^4-1}=\frac{(a+ar^2)(r^4-1)(r^4+1)}{r^4-1}$$
$$=(a+ar^2)(r^4+1)=17$$

따라서 $a+ar^2=\frac{17}{r^4+1}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$\frac{21}{r^4+r^2+1}=\frac{17}{r^4+1}$, $21(r^4+1)=17(r^4+r^2+1)$

$4r^4-17r^2+4=0$, $(4r^2-1)(r^2-4)=0$

$r>1$이므로 $r^2=4$이고 $a=\frac{1}{5}$이다.

$a_3+a_7=ar^2+ar^6=\frac{1}{5}\times 4+\frac{1}{5}\times 4^3=\frac{4}{5}+\frac{64}{5}=\frac{68}{5}$

따라서 $k=\frac{68}{5}$이므로 $5k=68$

답 68

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$에서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합은

$(a_1+a_3)+(a_3+a_5)+(a_5+a_7)=a_1+2a_3+2a_5+a_7$

따라서 $a_1+2a_3+2a_5+a_7=21$ …… ㉠

$c_n=a_{4n-3}+a_{4n-1}$에서 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제2항까지의 합은

$(a_1+a_3)+(a_5+a_7)$

따라서 $a_1+a_3+a_5+a_7=17$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a_3+a_5=4$

따라서 $a_1+a_7=13$

$ar^2+ar^4=4$에서 $a=\frac{4}{r^2+r^4}$ …… ㉢

$a+ar^6=13$에서 $a=\frac{13}{1+r^6}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$\frac{4}{r^2+r^4}=\frac{13}{1+r^6}$, $4(r^2)^3-13(r^2)^2-13r^2+4=0$

$(r^2-4)\{4(r^2)^2+3r^2-1\}=0$

$(r^2-4)(4r^2-1)(r^2+1)=0$

$r^2+1>0$이고 $r>1$이므로 $r^2=4$이고 $a=\frac{1}{5}$

$a_3+a_7=ar^2+ar^6=\frac{1}{5}\times 4+\frac{1}{5}\times 4^3=\frac{4}{5}+\frac{64}{5}=\frac{68}{5}$

따라서 $k=\frac{68}{5}$이므로 $5k=68$

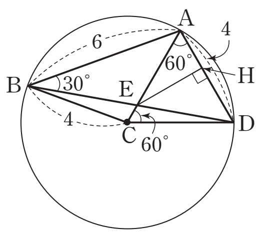
21

삼각형 ABD에서 $\angle\text{ABE}=30^\circ$이고 정삼각형 ACD에서 $\angle\text{ACD}=60^\circ$이므로 원주각과 중심각의 관계에 의하여 점 C는 삼각형 ABD의 외접원의 중심이다.

그러므로 $\overline{\text{AC}}=\overline{\text{CD}}=\overline{\text{AD}}=4$이고 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{AD}}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{\text{AB}}}{\sin(\angle\text{ADB})},\ \frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{6}{\sin(\angle\text{ADB})}$$

$$\sin(\angle\text{ADB})=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



$\overline{\text{AE}}=k\ (k>0)$이라 하고 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 AEH에서 $\overline{\text{AH}}=k\cos 60^\circ=\frac{k}{2}$

$\overline{\text{DH}}=\overline{\text{AD}}-\overline{\text{AH}}=4-\frac{k}{2}$

$\sin(\angle\text{ADE})=\frac{3}{4}$이므로

$$\cos(\angle\text{ADE})=\sqrt{1-\sin^2(\angle\text{ADE})}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan(\angle\text{ADE})=\frac{\sin(\angle\text{ADE})}{\cos(\angle\text{ADE})}=\frac{3}{\sqrt{7}}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

한편, 직각삼각형 EHA에서

$$\overline{\text{EH}}=\sin 60^\circ\times\overline{\text{AE}}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$$

직각삼각형 EDH에서

$$\tan(\angle\text{EDH})=\frac{\overline{\text{EH}}}{\overline{\text{DH}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

$\angle\text{ADE}=\angle\text{EDH}$이므로 ㉠과 ㉡에서

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}}=\frac{3}{\sqrt{7}},\ \text{즉 } k=\frac{24}{\sqrt{21}+3}=2(\sqrt{21}-3)=\overline{\text{AE}}$$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{AE}}}{\sin(\angle\text{ADE})}=2R\text{에서 }\frac{2(\sqrt{21}-3)}{\frac{3}{4}}=2R$$

따라서 $2R=\frac{8(\sqrt{21}-3)}{3}$에서 $p=3$, $q=8$이므로

$p+q=11$

답 11

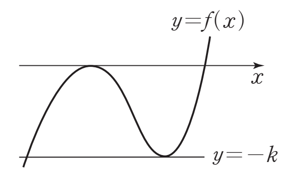
22

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하고,

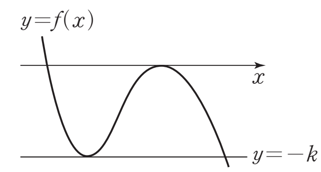
조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-k$에 접한다.

따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 2가지 경우이다.

① 최고차항의 계수가 양수인 경우



② 최고차항의 계수가 음수인 경우

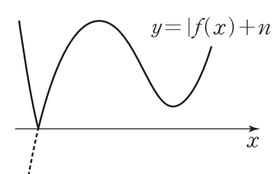


①, ②에서 삼차함수 $y=f(x)$의 극댓값은 0이고, 극솟값은 $-k$이다.

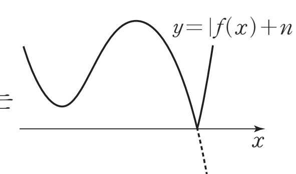
따라서 함수 $y=f(x)+n$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $y=f(x)+n$의 극댓값은 n, 극솟값은 $n-k$이다.

(i) $n-k\geq 0$일 때, 즉 $n\geq k$

함수 $|f(x)+n|$의 극댓값은 n이다.

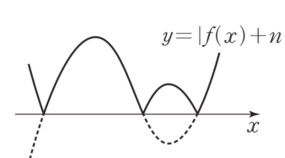


또는

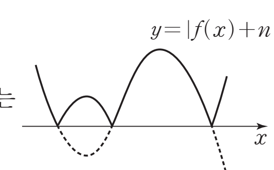


(ii) $n-k<0$일 때, 즉 $n<k$

함수 $|f(x)+n|$의 극댓값은 n, $-n+k$이다.



또는



(i), (ii)에서

$n=1$일 때, $S_1=\{1,\ -1+k\}$

$n=2$일 때, $S_2=\{2,\ -2+k\}$

$n=6$일 때, 조건 (나)에 의하여 $S_6=\{6\}$

이므로

$S_1\cup S_2\cup S_6=\{1,\ -1+k,\ 2,\ -2+k,\ 6\}$

이때 $S_1\cup S_2\cup S_6$의 모든 원소의 합이 $2k+6$이므로

$2k+6=17$, $k=\frac{11}{2}$

따라서 $100k=550$

답 550

23

점 A의 xy평면 위로의 정사영을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는

(3, 0, 0)

점 B의 xy평면 위로의 정사영을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는

(6, 4, 0)

삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영은 삼각형 OA′B′이므로 삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times4=6$

답 ②

24

점 A$(-4, 0)$에서 포물선 $y^2=8x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (a, b)라 하자.

점 (a, b)는 포물선 위의 점이므로

$b^2=8a$ …… ㉠

포물선 $y^2=8x$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$by=4(x+a)$이고, 이 직선이 점 A$(-4, 0)$을 지나므로

$b\times0=4(-4+a)$, $a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$b^2=8\times4=32$, $b=\pm4\sqrt{2}$

두 점 B, C의 좌표를 각각 $(4, 4\sqrt{2})$, $(4, -4\sqrt{2})$라 하고, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(4, 0)$이므로

$\overline{BC}=8\sqrt{2}$, $\overline{AH}=8$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times8\sqrt{2}\times8=32\sqrt{2}$

답 ③

25

점 P의 좌표를 $(a, 2a-3)$이라 하면 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2a-4}{3}, \frac{4a-5}{3}\right)$

조건 (가)에서 $\frac{2a-4}{3}>0$, $\frac{4a-5}{3}>0$이므로

$a>2$

조건 (나)에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$이므로

$(a+4, 2a-4)\cdot\left(\frac{2a-4}{3}, \frac{4a-29}{3}\right)=0$

$\frac{1}{3}(a+4)(2a-4)+\frac{1}{3}(2a-4)(4a-29)=0$

$a\neq2$이므로

$(a+4)+(4a-29)=0$, $a=5$

즉, 점 P의 좌표는 $(5, 7)$

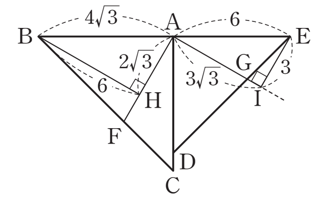
따라서

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-9, -6)\cdot(-5, 1)$

$=45-6=39$

답 ④

26



[그림 1]의 점 B에서 직선 AF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle BAF=60°$이므로

$\overline{BH}=\overline{AB}\sin60°=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

$\overline{AH}=\overline{AB}\cos60°=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

또 점 E에서 직선 AG에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{EI}=\overline{AE}\sin30°=6\times\frac{1}{2}=3$

$\overline{AI}=\overline{AE}\cos30°=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

이때 $\angle FAG=90°$이므로 [그림 2]에서 점 A를 원점으로 하고 두 점 H, I의 좌표가 각각 $(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $(0, 3\sqrt{3}, 0)$이고, 점 B의 z좌표가 양수가 되도록 하는 좌표공간을 생각하면 두 점 B, E의 좌표는 각각 B$(2\sqrt{3}, 0, 6)$, E$(0, 3\sqrt{3}, 3)$이다.

따라서

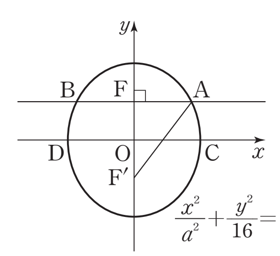
$\overline{BE}=\sqrt{(0-2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3}-0)^2+(3-6)^2}$

$=\sqrt{12+27+9}$

$=4\sqrt{3}$

답 ⑤

27



두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(0, c)$, $(0, -c)$ $(c>0)$이라 하면

$\overline{AF}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times6=3$

타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=2\times4=8$

$\overline{AF'}=8-\overline{AF}=8-3=5$

직각삼각형 AFF′에서

$\overline{FF'}=\sqrt{\overline{AF'}^2-\overline{AF}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\overline{OF}=c=\frac{1}{2}\times\overline{FF'}$

$=\frac{1}{2}\times4=2$

타원의 성질에 의하여

$a^2=16-c^2=16-4=12$

$a=2\sqrt{3}$ $(a>0)$

두 점 C, D의 좌표는 각각 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=2a=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

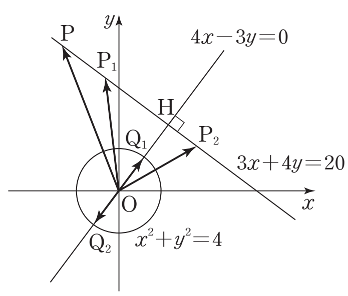
답 ⑤

28

$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_2}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$이므로 두 직선 OQ, $3x+4y=20$은 서로 수직이다.



따라서 직선 $4x-3y=0$과 원 $x^2+y^2=4$가 만나는 두 점 중에서 제1사분면에 있는 점을 $\mathrm{Q_1}$, 제3사분면에 있는 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하면 직선 $3x+4y=20$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

를 만족시키는 경우는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 Q가 점 $\mathrm{Q_1}$ 또는 점 $\mathrm{Q_2}$와 일치하는 경우이다.

이때 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ\le\theta\le 180^\circ)$라 하면 점 Q가 점 $\mathrm{Q_1}$과 일치할 때 $0^\circ\le\theta<90^\circ$이고, 점 Q가 점 $\mathrm{Q_2}$와 일치할 때 $90^\circ<\theta\le 180^\circ$이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}<0$을 만족시키는 경우는 점 Q가 점 $\mathrm{Q_2}$와 일치하는 경우이다.

한편, 두 직선 $4x-3y=0$, $3x+4y-20=0$이 만나는 점을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|3\times 0+4\times 0-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

이때

$\overline{\mathrm{Q_2H}}=\overline{\mathrm{OH}}+2=6$

이므로 점 $\mathrm{Q_2}$는 직선 $3x+4y=20$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ_2}}|\ge 6$을 만족시킨다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ_2}}|=n$을 만족시키는 점 P의 개수 $f(n)$은

$$f(n)=\begin{cases}0\ (1\le n\le 5)\\ 1\ (n=6)\\ 2\ (n\ge 7)\end{cases}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} f(k)=0\times 5+1\times 1+2\times 4=9$$

답 ②

참고

(i) 점 Q가 점 $\mathrm{Q_1}$과 일치하는 경우

점 $\mathrm{Q_1}$은 직선 $3x+4y=20$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$에 대하여

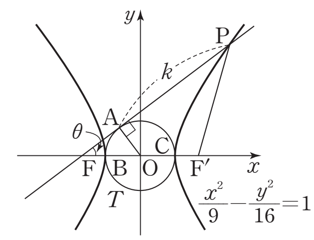
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}&=\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OQ_1}}\\&=4\times 2=8\ (\text{일정})\end{aligned}$$

(ii) 점 Q가 점 $\mathrm{Q_2}$와 일치하는 경우

점 $\mathrm{Q_2}$는 직선 $3x+4y=20$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$에 대하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}&=-\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OQ_2}}\\&=-4\times 2=-8\ (\text{일정})\end{aligned}$$

29



그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(-c,\ 0)$, $(c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{9+16}=5$, $\overline{\mathrm{OF}}=c=5$

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 꼭짓점을 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$이라 하면 원 T는 선분 BC를 지름으로 하는 원이므로 반지름의 길이 $\overline{\mathrm{OA}}$는

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times 6=3$

이때 두 직선 PF, OA는 서로 수직이므로 직각삼각형 OAF에서

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OF}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ …… ㉠

$\angle\mathrm{AFO}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=\frac{4}{5}$

$\overline{\mathrm{AP}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{AF}}=k+4$

이고 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2\times 3=6$

$(k+4)-\overline{\mathrm{PF'}}=6$, $\overline{\mathrm{PF'}}=k-2$

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\times c=2\times 5=10$

삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\cos\theta$

$(k-2)^2=(k+4)^2+10^2-2\times(k+4)\times 10\times\frac{4}{5}$

$4k=48$, $k=12$

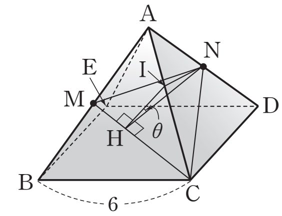
즉, $\overline{\mathrm{AP}}=12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AF}}=12-4=8$

답 8

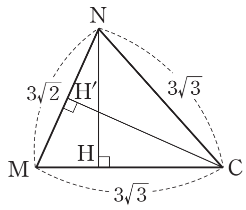
30



평면 MCN과 평면 ABC의 교선은 직선 MC이므로 점 N에서 직선 MC에 내린 수선의 발을 H, 점 H를 지나고 직선 MC에 수직인 평면

이 직선 AC와 만나는 점을 I라 하면

$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{NHI})$



삼각형 NMC는 $\overline{\mathrm{MC}}=\overline{\mathrm{NC}}$인 이등변삼각형이므로 선분 MN의 중점을 H′이라 하면

$\overline{\mathrm{CH'}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$이다.

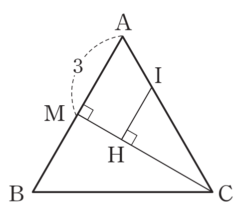
$\overline{\mathrm{CH'}}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

이때 $\overline{\mathrm{CH'}}\times\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{NH}}\times\overline{\mathrm{MC}}$이므로

$\frac{3\sqrt{10}}{2}\times3\sqrt{2}=\overline{\mathrm{NH}}\times3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{NH}}=\sqrt{15}$

또 $\overline{\mathrm{MH}}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{15})^2}=\sqrt{3}$이므로 점 H는 선분 MC를 1 : 2로 내분하는 점이다.

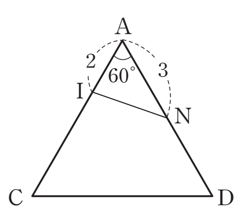


정삼각형 ABC에서 점 M이 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이다.

즉, $\overline{\mathrm{AM}}/\!/\overline{\mathrm{IH}}$이고 점 H는 선분 MC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{IH}}=\frac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AM}}=2$

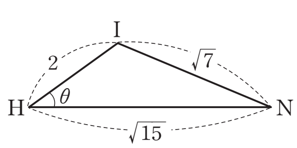
$\overline{\mathrm{AI}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AC}}=2$



삼각형 AIN에서 $\overline{\mathrm{AI}}=2$, $\overline{\mathrm{AN}}=3$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{IN}}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos60^\circ=7$

즉, $\overline{\mathrm{IN}}=\sqrt{7}$



따라서 삼각형 IHN에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{2^2+(\sqrt{15})^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times\sqrt{15}}=\frac{12}{4\sqrt{15}}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

이므로

$50\cos^2\theta=50\times\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2=50\times\frac{3}{5}=30$

답 30

실전 모의고사 4회 본문 154~161쪽

01 ④	02 ③	03 ②	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ②	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 10	17 7	18 33	19 7	20 612
21 25	22 120	23 ①	24 ④	25 ③
26 ⑤	27 ⑤	28 ④	29 16	30 180

01

$\sqrt[8]{3^7}\times\sqrt{3^{\frac{9}{4}}}=3^{\frac{7}{8}}\times\left(3^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=3^{\frac{7}{8}}\times3^{\frac{9}{8}}$

$=3^{\frac{7}{8}+\frac{9}{8}}$

$=3^2=9$

답 ④

02

$\int_0^1(4x^3-3ax^2+4)\,dx=\left[x^4-ax^3+4x\right]_0^1$

$=1-a+4$

$=5-a=2$

따라서 $a=3$

답 ③

03

$y=\log_2\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$=\log_2\left\{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right\}$

$=\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)+\log_2\sqrt{2}$

$=\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$

함수 $y=\log_2\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=-\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$m+n=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

답 ②

04

$\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to-1-}f(x)=-1+1=0$

답 ③

05

$\dfrac{1}{3-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$에서

$3-\tan\theta=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$

따라서 $\tan\theta=2\sqrt{2}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$이므로

$\sin\theta=2\sqrt{2}\cos\theta$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 ㉠을 대입하면

$8\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$9\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

㉠에서 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta+\cos\theta&=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\\&=-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

답 ①

06

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f'(x)\,dx=f'(x)$이고

$f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$$\begin{aligned}f(2)-f(1)&=\int_1^2 f'(x)\,dx\\&=\int_1^2(3x^2+2ax)\,dx\\&=\Big[x^3+ax^2\Big]_1^2\\&=(8+4a)-(1+a)\\&=3a+7=19\end{aligned}$$

따라서 $a=4$

답 ④

07

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a)$이다.

$\lim\limits_{x\to a-}(2x+b)=\lim\limits_{x\to a+}(2x^2-3b)=2a+b$

$2a+b=2a^2-3b$, $4b=2a^2-2a$

따라서 $b=\dfrac{1}{2}a(a-1)$

이때 a, b가 10 이하의 자연수이므로

$a=2$일 때, $b=1$

$a=3$일 때, $b=3$

$a=4$일 때, $b=6$

$a=5$일 때, $b=10$

따라서 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 6)$, $(5, 10)$의 4개이다.

답 ③

08

$8\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(x+7)\right\}=4\sqrt{3}$에서

$\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(x+7)\right\}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

$\theta=\dfrac{\pi}{6}(x+7)$이라 하면

$0\le x\le 12$에서 $7\le x+7\le 19$

$\dfrac{7}{6}\pi\le\dfrac{\pi}{6}(x+7)\le\dfrac{19}{6}\pi$이므로

$\dfrac{7}{6}\pi\le\theta\le\dfrac{19}{6}\pi$

㉠에서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta=\dfrac{7}{3}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{8}{3}\pi$

그러므로

$\dfrac{\pi}{6}(x+7)=\dfrac{7}{3}\pi$에서 $x=7$

$\dfrac{\pi}{6}(x+7)=\dfrac{8}{3}\pi$에서 $x=9$

따라서 $x=7$ 또는 $x=9$이므로 만나는 두 점의 x좌표의 합은

$7+9=16$

답 ②

09

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 a, b는

방정식 $f(x)=-x+4$의 두 근이므로 0이 아닌 상수 m에 대하여

$f(x)-(-x+4)=m(x-a)(x-b)$ $(m<0)$으로 놓을 수 있다.

따라서 $f(x)=m(x-a)(x-b)-x+4$

$f'(x)=m(x-b)+m(x-a)-1$

점 A에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=m(a-b)-1=3$

$m(a-b)=4$

따라서 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기는

$f'(b)=m(b-a)-1=-4-1=-5$

답 ③

10

$(\log 5)^2+(\log 2)^2=(\log 5+\log 2)^2-2\log 5\times\log 2=1-2a$

$$\begin{aligned}(\log 5-\log 2)^2&=(\log 5)^2+(\log 2)^2-2\log 5\times\log 2\\&=1-2a-2a=1-4a\end{aligned}$$

이므로 $\log 5-\log 2=\sqrt{1-4a}$

$(\log 25)^4-(\log 4)^4$

$=(2\log 5)^4-(2\log 2)^4$

$=16\{(\log 5)^4-(\log 2)^4\}$

$=16\{(\log 5)^2+(\log 2)^2\}\{(\log 5)^2-(\log 2)^2\}$

$=16\{(\log 5)^2+(\log 2)^2\}(\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)$

$=16(1-2a)\sqrt{1-4a}$

따라서 $p=16$, $q=4$이므로

$p+q=16+4=20$

답 ③

11

조건 (나)에서 $a_{n+3}-a_{n+1}=b_{n+3}-b_{n+1}$이므로

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_{n+3}-b_{n+3}$

따라서

$a_2-b_2=a_4-b_4=a_6-b_6=a_8-b_8=\cdots=a_{2n}-b_{2n}=\alpha$라 하고

$a_3-b_3=a_5-b_5=a_7-b_7=a_9-b_9=\cdots=a_{2n+1}-b_{2n+1}=\beta$라 하면

$\sum_{k=1}^{8}(a_{k+1}-b_{k+1})=(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_9-b_9)=48$에서

$4(\alpha+\beta)=48$, $\alpha+\beta=12$

조건 (나)에서 $a_{n+3}-a_{n+1}=b_{n+2}-b_n$이므로

$a_{n+3}-b_{n+2}=a_{n+1}-b_n$

그런데 조건 (가)에서 $a_3-b_2=3-6=-3$이므로

$a_{2n+3}-b_{2n+2}=a_{2n+1}-b_{2n}=-3$

따라서 $a_{2n+1}-b_{2n}=-3$이고 $\alpha+\beta=12$이므로

$a_{2n}-b_{2n}+a_{2n+1}-b_{2n+1}=12$에서

$a_{2n}-b_{2n+1}=15$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}(a_{2k}-b_{2k+1})&=(a_2-b_3)+(a_4-b_5)+(a_6-b_7)+\cdots+(a_{16}-b_{17})\\&=15+15+\cdots+15\\&=15\times8=120\end{aligned}$$

답 ②

12

수직선 위의 좌표가 1인 점 A를 출발한 점 P의

1초 후의 위치는 $1+1\times2=3$

2초 후의 위치는 $3+\frac{1}{2}\times1\times2=4$

4초 후의 위치는 $4-\frac{1}{2}\times2\times1=3$

6초 후의 위치는 $3-\frac{1}{2}\times2\times1=2$

7초 후의 위치는 $2+\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{5}{2}$

8초 후의 위치는 $\frac{5}{2}+1\times1=\frac{7}{2}$

이므로 $\frac{15}{2}$초 후의 위치는 $\frac{5}{2}+1\times\frac{1}{2}=3$

$t=\frac{15}{2}$일 때 점 P는 수직선 위의 좌표가 3인 점 B를 세 번째 지난다.

그러므로 $t=\frac{15}{2}$일 때까지 점 P가 실제로 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{15}{2}}|v(t)|\,dt$

$=1\times2+\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1$

$=2+1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$=6$

답 ③

13

$a_1=1$이고, $3S_n=(n+2)a_n$에서

$n=2$일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$이므로 $a_2=3$이다.

즉, $\begin{cases}p+q=1\\4p+2q=3\end{cases}$ 이므로 연립방정식을 풀면

$p=\boxed{\frac{1}{2}}$, $q=\boxed{\frac{1}{2}}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\boxed{\frac{1}{2}}\times n^2+\boxed{\frac{1}{2}}\times n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ……(*)

이다.

(i) $n=1$일 때, $a_1=\boxed{\frac{1}{2}}\times1^2+\boxed{\frac{1}{2}}\times1=1$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_m=\boxed{\frac{1}{2}}\times m^2+\boxed{\frac{1}{2}}\times m=\frac{1}{2}m(m+1)$

한편, $3S_n=(n+2)a_n$에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$이므로

$3a_{m+1}=(m+3)a_{m+1}-(m+2)a_m$, $ma_{m+1}=(m+2)a_m$

$$\begin{aligned}a_{m+1}&=\boxed{\frac{m+2}{m}}\times a_m=\frac{m+2}{m}\times\frac{1}{2}m(m+1)\\&=\frac{1}{2}\times\boxed{(m+1)(m+2)}\\&=\frac{1}{2}(m+1)^2+\frac{1}{2}(m+1)\end{aligned}$$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이고

$f(m)=\frac{m+2}{m}$, $g(m)=(m+1)(m+2)$

이므로 $\alpha+\beta=1$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=4$에서

$f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=f(1)+g(4)=3+30=33$

답 ②

14

조건 (가)와 (나)에서 $0<h<5$인 임의의 h에 대하여

$\int_{4-h}^{4}f'(x)\,dx\times\int_{4}^{4+h}f'(x)\,dx<0$이므로

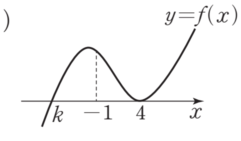
$\int_{4-h}^{4}f'(x)\,dx>0$이고 $\int_{4}^{4+h}f'(x)\,dx<0$ 또는

$\int_{4-h}^{4}f'(x)\,dx<0$이고 $\int_{4}^{4+h}f'(x)\,dx>0$이어야 한다.

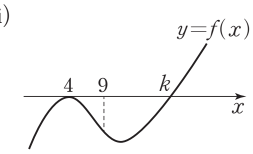
그러므로 $f'(x)$의 부호가 $x=4$의 좌우에서 바뀌고 $f'(4)=0$이다.

즉, $f(4)=f'(4)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(i)



(ii)



$f(x)=(x-4)^2(x-k)$ $(k\neq4)$라 하면

$f'(x)=2(x-4)(x-k)+(x-4)^2$

$\quad=(x-4)\{2(x-k)+(x-4)\}$

$\quad=(x-4)\{3x-(2k+4)\}=0$

에서 $x=4$ 또는 $x=\frac{2k+4}{3}$

방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 차는 5 이상이므로

$\left|4-\frac{2k+4}{3}\right|\geq5$ …… ㉠

(i)의 경우

㉠에서 $4-\frac{2k+4}{3}\geq5$, $k\leq-\frac{7}{2}$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$의 두 근의 차를 d_1이라 하면

$d_1\geq4-\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{15}{2}$

(ii)의 경우

㉠에서 $\frac{2k+4}{3}-4\geq5$, $k\geq\frac{23}{2}$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$의 두 근의 차를 d_2라 하면

$d_2\geq\frac{23}{2}-4=\frac{15}{2}$

(i), (ii)로부터 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차의 최솟값은 $\frac{15}{2}$

답 ⑤

15

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수이고, $a\neq0$)으로 놓으면

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $d=1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

조건 (나)에서

$f'(0)=-3$, $c=-3$

$f'(1)=-3$, $3a+2b+c=-3$

$c=-3$이므로 $3a+2b=0$

따라서 $b=-\frac{3}{2}a$ …… ㉠

조건 (다)에서 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 α, β는 방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}$이고, ㉠에서 $b=-\frac{3}{2}a$이므로 $\alpha+\beta=1$

$\alpha\beta=\frac{c}{3a}$이고, $c=-3$이므로 $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$

또

$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|a(\alpha^3-\beta^3)-\frac{3}{2}a(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\right|$

$\quad=|\alpha-\beta|\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이므로

$|\alpha-\beta|\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=|\alpha-\beta|$

$\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=1$

$\left|a\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=1$ …… ㉡

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left|a\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{3}{2}a-3\right|=1$, $\left|-\frac{1}{2}a-2\right|=1$

$|a+4|=2$

에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$ …… ㉢

한편, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=b^2-3ac=\left(-\frac{3}{2}a\right)^2+9a$

$\quad=\frac{9}{4}a(a+4)>0$

따라서 $a<-4$ 또는 $a>0$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a=-6$이고, ㉠에서 $b=9$

따라서 $f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1$이므로

$f(2)=-48+36-6+1=-17$

답 ③

다른 풀이

조건 (나)에서 $f'(0)=f'(1)=-3$이므로

$f'(x)=kx(x-1)-3=kx^2-kx-3$ $(k\neq0)$으로 놓을 수 있다.

이때 $f(x)=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2-3x+1$

조건 (다)에서 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 α, β는 방정식 $f'(x)=kx^2-kx-3=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-\frac{3}{k}$ …… ㉠

한편,

$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)-\frac{k}{2}(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\right|$

$\quad=|\alpha-\beta|\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이므로

$|\alpha-\beta|\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=|\alpha-\beta|$

$\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=1$

$\left|\frac{k}{3}\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left|\frac{k}{3}\left(1+\frac{3}{k}\right)-\frac{k}{2}-3\right|=1$, $\left|-\frac{k}{6}-2\right|=1$

$|k+12|=6$

이므로 $k=-6$ 또는 $k=-18$ …… ㉢

한편, 이차방정식 $f'(x)=kx^2-kx-3=0$의 판별식을 D라 하면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $D>0$이어야 한다.

$D=(-k)^2+12k=k^2+12k$

$\quad=k(k+12)>0$

이므로 $k>0$ 또는 $k<-12$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=-18$이므로

$f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1$

따라서 $f(2)=-48+36-6+1=-17$

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{12}-a_6=(a+11d)-(a+5d)$

$=6d=30$

이므로 $d=5$

따라서 $a_{20}-a_{18}=2d=2\times5=10$

답 10

17

$g(x)=(-2x^3+1)f(x)$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$g(-1)=(2+1)\times f(-1)=3f(-1)$

$g(-1)=9$이므로 $f(-1)=3$

$g(x)=(-2x^3+1)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=-6x^2f(x)+(-2x^3+1)f'(x)$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$g'(-1)=(-6)\times f(-1)+3f'(-1)$

$3=(-6)\times3+3f'(-1)$, $3f'(-1)=21$

따라서 $f'(-1)=7$

답 7

18

$(g\circ g)(a)=g(g(a))=4$에서

$g(a)=s$라 하면

$g(s)=4$이므로 $f(4)=s$

$4<8$이므로 $s=4\times4=16$

$g(a)=16$에서 $f(16)=a$

$16\geq8$이므로

$a=f(16)=\log_2 16+29=33$

답 33

19

사각형 OABC의 넓이는 삼각형 OAB와 삼각형 OBC의 넓이의 합이다. 삼각형 OAB에 대하여 사각형 OABC의 넓이가 최대가 될 때는 삼각형 OBC의 넓이가 최대가 될 때이며 [그림 1]과 같이 점 C에서의 접선의 기울기가 직선 OB의 기울기와 서로 같을 때이다.

점 B의 좌표를 $B(t, 3t-t^2)$으로 놓으면 직선 OB의 기울기는

$\frac{3t-t^2}{t}=3-t$이고

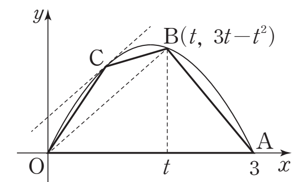
$y=3x-x^2$에서 $y'=3-2x$이므로

구하는 점 C의 x좌표는

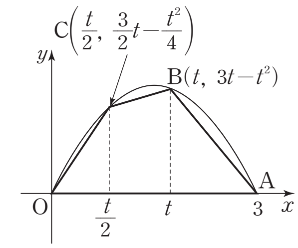
$3-2x=3-t$에서

$x=\frac{t}{2}$

따라서 점 C의 좌표는 $C\left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t-\frac{t^2}{4}\right)$이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 사각형 OABC의 넓이를 $S(t)$ $(0<t<3)$이라 하면

$S(t)$는 [그림 2]에서와 같이

(삼각형의 넓이)+(사다리꼴의 넓이)+(삼각형의 넓이)이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times\left(\frac{3}{2}t-\frac{t^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times\left(\frac{3}{2}t-\frac{t^2}{4}+3t-t^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\times(3-t)\times(3t-t^2)$$

$$=\frac{6t^2-t^3}{16}+\frac{18t^2-5t^3}{16}+\frac{9t-6t^2+t^3}{2}$$

$$=\frac{2t^3-24t^2+72t}{16}$$

$$=\frac{1}{8}(t^3-12t^2+36t)$$

$S'(t)=\frac{1}{8}(3t^2-24t+36)=\frac{3}{8}(t-2)(t-6)$

$S'(t)=0$에서 $0<t<3$이므로 $t=2$

$0<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=2$일 때, $S(t)$는 극대이면서 최대이다.

이때 두 점 B와 C의 좌표는 각각 $B(2, 2)$, $C(1, 2)$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2+2+1+2=7$

답 7

20

함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=k^2x$의 교점의 x좌표는

$\frac{n}{x}=k^2x$ 에서 $x^2=\frac{n}{k^2}$

$x=-\frac{\sqrt{n}}{k}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{n}}{k}$

또한 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{k^2}$의 교점의 x좌표는

$\frac{n}{x}=\frac{x}{k^2}$에서 $x^2=nk^2$

$x=-\sqrt{n}k$ 또는 $x=\sqrt{n}k$

한편, $\sqrt{n}k-\frac{\sqrt{n}}{k}=\frac{\sqrt{n}}{k}-\left(-\frac{\sqrt{n}}{k}\right)$에서

$\sqrt{n}k=\frac{3\sqrt{n}}{k}$, 즉 $k^2=3$, $k=\sqrt{3}$

그러므로 네 수 d, b, a, c는 각각 $-\sqrt{3n}$, $-\sqrt{\dfrac{n}{3}}$, $\sqrt{\dfrac{n}{3}}$, $\sqrt{3n}$이다.

네 수 $-\sqrt{3n}$, $-\sqrt{\dfrac{n}{3}}$, $\sqrt{\dfrac{n}{3}}$, $\sqrt{3n}$의 공차는

$\sqrt{3n}-\sqrt{\dfrac{n}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3n}}{3}$이고 공차는 16 이하의 자연수이므로

$1\le\dfrac{2\sqrt{3n}}{3}\le16$에서

$n=3m^2\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$

따라서 모든 n의 값의 합은

$$\begin{aligned}3(1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2)&=3\sum_{k=1}^{8}k^2\\&=3\times\frac{8\times9\times17}{6}\\&=612\end{aligned}$$

답 612

21

밑면의 반지름의 길이가 30이고 높이가 $10\sqrt{7}$이므로

원뿔의 모선의 길이는

$\sqrt{30^2+(10\sqrt{7})^2}=\sqrt{900+700}=\sqrt{1600}=40$

그림과 같이 원뿔의 전개도를 그리고 부채꼴 OCD에서 호 CD의 중점을 E라 하면 점 B는 선분 OE 위에 있다.

또 부채꼴 OCD에서 중심각의 크기를 θ, 호 CD의 길이를 l이라 하면

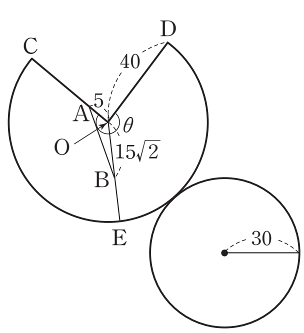
$l=40\times\theta$이고,

l은 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$40\times\theta=2\times\pi\times30$

$\theta=\dfrac{60}{40}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{4}\pi$



그러므로 구하는 최단거리는 삼각형 OAB에서 선분 AB의 길이와 같으므로 코사인법칙으로부터

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2&=5^2+(15\sqrt{2})^2-2\times5\times15\sqrt{2}\times\cos\frac{3}{4}\pi\\&=25+450-2\times5\times15\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=25+450+150\\&=625\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AB}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{625}=25$

답 25

22

$y=x^3-a^2x+a^3$에서 $y'=3x^2-a^2$

접점을 $(t,\ t^3-a^2t+a^3)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-a^2t+a^3)=(3t^2-a^2)(x-t)$, 즉

$y=(3t^2-a^2)x-2t^3+a^3$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(b,\ 0)$을 지나므로

$(3t^2-a^2)b-2t^3+a^3=0$, 즉

$2t^3-3bt^2+a^2b-a^3=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

(i) 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 세 개일 때 ㉠은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-3bt^2+a^2b-a^3$이라 하면

$f'(t)=6t^2-6bt=6t(t-b)$

$b>0$이므로 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$f(0)$	↘	$f(b)$	↗

함수 $y=f(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 개수가 3이어야 하므로 $f(0)>0$이고 $f(b)<0$이어야 한다.

$f(0)=a^2b-a^3=a^2(b-a)>0$에서

$0<a<b\le15$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(b)=-b^3+a^2b-a^3=-b(b^2-a^2)-a^3$이고 ㉡이 성립하면

$f(b)<0$이다.

그러므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $\cdots$, $(1,\ 13)$, $(1,\ 14)$, $(1,\ 15)$,

$(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $\cdots$, $(2,\ 14)$, $(2,\ 15)$,

$(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $\cdots$, $(3,\ 15)$,

$\vdots$

$(12,\ 13)$, $(12,\ 14)$, $(12,\ 15)$,

$(13,\ 14)$, $(13,\ 15)$,

$(14,\ 15)$

이므로 그 개수는

$p=1+2+3+\cdots+14=\dfrac{14\times(1+14)}{2}=105$

(ii) 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 두 개일 때

㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f(0)=0$ 또는 $f(b)=0$이어야 한다.

① $f(0)=0$인 경우

$f(0)=a^2b-a^3=a^2(b-a)=0$에서

$b=a$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $\cdots$, $(14,\ 14)$, $(15,\ 15)$

이므로 그 개수는 15이다.

② $f(b)=0$인 경우

$f(b)=-b^3+a^2b-a^3$에서

$b>a>0$일 때, $-b^3+a^2b-a^3=-b(b^2-a^2)-a^3<0$

$a\ge b>0$일 때, $-b^3+a^2b-a^3=-b^3+a^2(b-a)<0$

이므로 $f(b)=0$일 수 없다.

①, ②에서 $q=15$

따라서 $p+q=105+15=120$

답 120

23

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2a-(-2)}{2-1}, \frac{2b-4}{2-1}, \frac{2\times3-1}{2-1}\right)$에서

$(2a+2, 2b-4, 5)$

이 점이 z축 위의 점이므로 $2a+2=0$, $2b-4=0$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=-1+2=1$

답 ①

24

기울기가 m이고 타원 $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{16}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{21m^2+16}$ …… ㉠

이고, 기울기가 m이고 쌍곡선 $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{8}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{27m^2-8}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 두 직선이 일치하므로

$\sqrt{21m^2+16}=\sqrt{27m^2-8}$

양변을 제곱하여 정리하면

$6m^2=24$, $m^2=4$

답 ④

25

구 S의 중심을 $\mathrm{C}(a, b, c)$, 반지름의 길이를 r라 하면 구 S는 xy평면에 접하므로

$|c|=r$ …… ㉠

점 C에서 zx평면에 내린 수선의 발은 $\mathrm{H}(a, 0, c)$이고 조건 (나)에 의하여 이 점은 점 $(5, 0, 3)$과 일치하므로

$a=5$, $c=3$

즉, ㉠에서 $r=3$

또한 구 S를 zx평면으로 자른 단면인 원 위의 점 P에 대하여 삼각형 CPH는 $\overline{\mathrm{CP}}=r=3$, $\overline{\mathrm{CH}}=|b|$, $\overline{\mathrm{HP}}=2$이고 $\angle\mathrm{PHC}=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2$, $3^2=b^2+2^2$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{5}$

즉, $\mathrm{C}(5, \sqrt{5}, 3)$이다.

한편, 구 S 위의 점 중에서 yz평면까지의 거리가 최대인 점이 A일 때, 점 A에서 yz평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 세 점 A, C, I가 이 순서대로 한 직선 위에 있어야 한다. 즉, 점 C에서 yz평면에 내린 수선의 발이 점 I와 일치하여야 하므로 점 I의 좌표는 $(0, \sqrt{5}, 3)$이고, 중심 $\mathrm{C}(5, \sqrt{5}, 3)$의 x좌표는 5, 구 S의 반지름의 길이는 3이므로 점 A의 좌표는 $(8, \sqrt{5}, 3)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{8^2+(\sqrt{5})^2+3^2}=\sqrt{78}$

답 ③

26

조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ …… ㉠

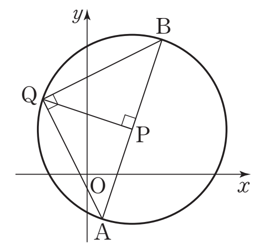
조건 (나)에서

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$이므로

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$에서 $\angle\mathrm{AQB}=90°$이므로 점 Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이고 점 P는 점 Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발이다.



따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 값은 그림과 같이 점 P가 선분 AB의 중점, 즉 원의 중심일 때 최대이고 최댓값은 원의 반지름의 길이와 같으므로

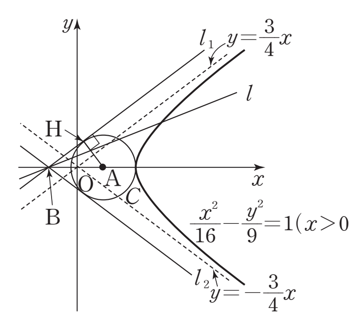
$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2+\{9-(-3)\}^2}=2\sqrt{10}$

답 ⑤

27

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 $\mathrm{A}(a, 0)$인 원 C가 곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ $(x>0)$ 위의 점 $(4, 0)$을 지나야 하므로

$r=4-a$ …… ㉠



쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 점근선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x$, $y=\frac{3}{4}x$

점 $\mathrm{B}(-2, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}$인 직선을 각각 l_1, l_2라 하면

$l_1 : y=\frac{3}{4}(x+2)$, $3x-4y+6=0$

$l_2 : y=-\frac{3}{4}(x+2)$, $3x+4y+6=0$

점 A에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|3\times a-4\times0+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3a+6|}{5}=\frac{3a+6}{5}\ (-2<a<4)\quad\cdots\cdots ㉡$$

점 P와 점 $\mathrm{B}(-2, 0)$을 지나는 직선을 l이라 하면 점 P가 곡선

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\ (x>0)$ 위를 움직일 때, 직선 l은 기울기가 $-\frac{3}{4}$과 $\frac{3}{4}$ 사이의 값을 갖고 점 B를 지나는 직선이다.

이때 직선 l이 원 C와 항상 만나기 위해서는

$r \geq \overline{\mathrm{AH}}$ …… ㉢

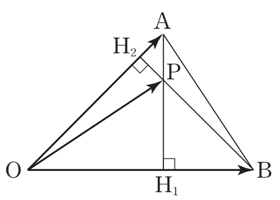
가 성립해야 한다. ㉠, ㉡, ㉢에서

$4-a \geq \frac{3a+6}{5}$, $a \leq \frac{7}{4}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{7}{4}$이다.

답 ⑤

28



점 A에서 변 OB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$, 점 B에서 변 OA에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OH_2}} = \overline{\mathrm{OB}} \times \overline{\mathrm{OH_1}}$

선분 $\mathrm{AH_1}$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P_1}$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = \overline{\mathrm{OB}} \times \overline{\mathrm{OH_1}}$

선분 $\mathrm{BH_2}$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P_2}$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OH_2}}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

를 만족시키는 점 P는 두 선분 $\mathrm{AH_1}$, $\mathrm{BH_2}$의 교점이다.

직각이등변삼각형 $\mathrm{AOH_1}$에서

$\overline{\mathrm{OH_1}} = \overline{\mathrm{OA}} \times \cos 45° = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$

직각이등변삼각형 $\mathrm{PH_1B}$에서

$\overline{\mathrm{PH_1}} = \overline{\mathrm{BH_1}} = \overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{OH_1}} = 5-3=2$

직각삼각형 $\mathrm{POH_1}$에서

$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{OH_1}}^2 + \overline{\mathrm{PH_1}}^2 = 3^2+2^2=13$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2 = 13$

답 ④

다른 풀이

좌표평면에서 점 O를 원점, 두 점 A, B를 각각 직선 $y=x$, x축 위의 점이라 하면 $\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{2}$에서 점 A의 좌표는 $(3, 3)$, $\overline{\mathrm{OB}}=5$에서 점 B의 좌표는 $(5, 0)$이다. 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$에서

$(3, 3) \cdot (a, b) = (5, 0) \cdot (a, b) = (3, 3) \cdot (5, 0)$

$3a+3b=5a=15$

$a=3$, $b=2$, 즉 $\mathrm{P}(3, 2)$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2 = 3^2+2^2=13$

참고

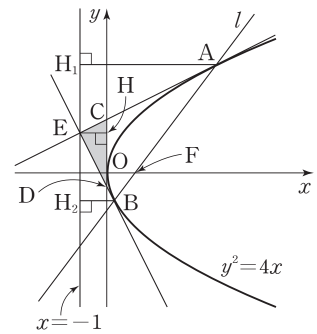
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$, 즉 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$, 즉 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

29



포물선

$y^2=4x$ …… ㉠

의 초점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(1, 0)$이다.

점 F를 지나고 기울기가 $m\ (m \neq 0)$인 직선 l의 방정식은

$y=m(x-1)$ …… ㉡

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\left(\frac{a^2}{4}, a\right)$, $\left(\frac{b^2}{4}, b\right)$ $(b<0<a)$라 하자.

㉠, ㉡을 연립하면

$\{m(x-1)\}^2=4x$

$m^2x^2-2(m^2+2)x+m^2=0$ …… ㉢

이차방정식 ㉢의 서로 다른 두 실근이 $\frac{a^2}{4}$, $\frac{b^2}{4}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{4} = 1$, $ab=-4\ (ab<0)$ …… ㉣

한편, 포물선 $y^2=4x$ 위의 두 점 A, B에서의 접선의 방정식은 각각 $ay=2\left(x+\frac{a^2}{4}\right)$, $by=2\left(x+\frac{b^2}{4}\right)$이고, 두 점 C, D의 좌표는 각각 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, $\left(0, \frac{b}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

이다. 두 점 A, B에서의 접선의 교점 E의 x좌표는 ㉣에 의하여

$\frac{2}{a}\left(x+\frac{a^2}{4}\right) = \frac{2}{b}\left(x+\frac{b^2}{4}\right)$

$\frac{2(b-a)}{ab}x = \frac{b-a}{2}$

$x = \frac{ab}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

이므로 점 E에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{EH}}=1$

이다. 이때 삼각형 CED의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \overline{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) \times 1 = 2$

$a-b=8$ …… ㉤

포물선 위의 두 점 A, B에서 포물선의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 직선 AB는 포물선의 초점 F를 지나므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AF}} + \overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{AH_1}} + \overline{\mathrm{BH_2}}$

$= \left\{\frac{a^2}{4} - (-1)\right\} + \left\{\frac{b^2}{4} - (-1)\right\}$

$= \frac{a^2+b^2}{4} + 2$

㉣, ㉤에서

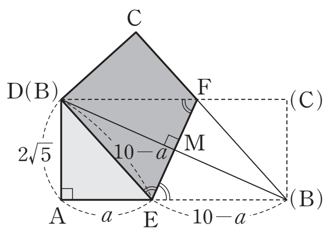
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=8^2+2\times(-4)=56$

이므로

$\overline{AB}=\frac{a^2+b^2}{4}+2=\frac{56}{4}+2=16$

답 16

30



[그림 1]에서 $\overline{AE}=a$라 하면 $\overline{BE}=10-a=\overline{DE}$이므로 직각삼각형 DAE에서

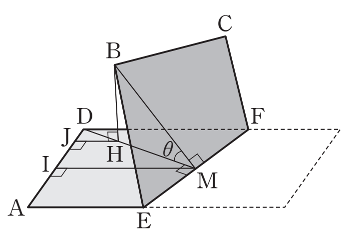
$(10-a)^2=a^2+(2\sqrt{5})^2$

$100-20a+a^2=a^2+20$, $a=4$

즉, $\overline{AE}=4$, $\overline{BE}=\overline{DE}=6$

이때 $\angle DFE=\angle FEB=\angle FED$이므로 삼각형 DEF는 $\overline{DE}=\overline{DF}$인 이등변삼각형이고 사각형 DEBF는 한 변의 길이가 6인 마름모이다.

즉, 선분 EF의 중점을 M이라 하면 $\overline{BM}\perp\overline{EF}$이다.



[그림 2]에서 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영을 H라 하면 직선 BH는 평면 AEFD와 수직이고 $\overline{BM}\perp\overline{EF}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HM}\perp\overline{EF}$이다.

이때 $\overline{DM}\perp\overline{EF}$이고 점 M에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 I라 할 때

$\overline{MI}=\frac{6+4}{2}=5>2$이므로 점 H는 선분 DM 위에 있다.

점 H에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\overline{HJ}=2$이고 삼각형 DJH와 삼각형 DIM은 닮음비가 $\overline{JH}:\overline{IM}=2:5$인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{DH}:\overline{DM}=2:5$이므로 평면 BEFC와 평면 AEFD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,

$\cos\theta=\frac{\overline{HM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{HM}}{\overline{DM}}=\frac{\overline{DM}-\overline{DH}}{\overline{DM}}=\frac{3}{5}$

사각형 BEFC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(6+4)\times2\sqrt{5}=10\sqrt{5}$이므로

사각형 BEFC의 평면 AEFD 위로의 정사영의 넓이는

$S=10\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=6\sqrt{5}$

따라서 $S^2=(6\sqrt{5})^2=180$

답 180

실전 모의고사 5회

본문 162~168쪽

01 ②	02 ①	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 ③	15 ③
16 55	17 32	18 12	19 30	20 424
21 12	22 150	23 ②	24 ④	25 ④
26 ③	27 ②	28 ②	29 12	30 43

01

$(2\sqrt{2})^{-3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(2\times2^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}\times(2^{-2})^{-2}$

$=2^{-3}\times2^{-\frac{3}{2}}\times2^4$

$=2^{-3-\frac{3}{2}+4}$

$=2^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

02

$f'(x)=(2x-x^2)'\times(x+2)+(2x-x^2)\times(x+2)'$

$=(2-2x)(x+2)+(2x-x^2)$

이므로

$f'(1)=0+1=1$

답 ①

03

함수 $f(x)=a^{1-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}$에서 $\frac{1}{a}>1$ $(0<a<1)$이므로

x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가한다.

$2\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 4를 가지므로

$f(2)=\frac{1}{a}=4$

즉, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=4^{x-1}$이므로

$a\times f(3)=\frac{1}{4}\times4^2=4$

답 ②

04

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=1$에서의 우극한은 2이고

함수 $y=f(-x)$의 그래프에서 $x=0$에서의 우극한은

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=0$에서의 좌극한이므로 -1이다.

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to0+}f(-x)=2\times(-1)=-2$

답 ①

05

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2$$
$=\{4^2+7^2+10^2+\cdots+(3n+1)^2\}-\{1^2+4^2+7^2+\cdots+(3n-2)^2\}$
$=(3n+1)^2-1=360$
$(3n+1)^2=361$
n은 자연수이므로 $3n+1=19$
따라서 $n=6$

답 ①

다른 풀이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2&=\sum_{k=1}^{n}\{(3k+1)^2-(3k-2)^2\}\\&=\sum_{k=1}^{n}(18k-3)\\&=18\times\frac{n(n+1)}{2}-3n\\&=9n^2+6n=360\end{aligned}$$

$3n^2+2n-120=0$
$(3n+20)(n-6)=0$
n은 자연수이므로 $n-6=0$
따라서 $n=6$

06

$2(\cos x-1)^2-3=\sin x-4\cos x$
$2\cos^2 x-4\cos x+2-3=\sin x-4\cos x$
$2\cos^2 x-\sin x-1=0$
$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$
$2\sin^2 x+\sin x-1=0$
$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$
$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$
즉, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$
따라서 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ③

07

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이다.
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x^2-x+2a)=3-1+2a=2a+2$
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x+3a)=3a-1$
$f(1)=3a-1$이므로 $2a+2=3a-1$에서
$a=3$
$$f(x)=\begin{cases}3x^2-x+6 & (x<1)\\ -x+9 & (x\ge1)\end{cases}$$
이므로
$f(1)=-1+9=8$
따라서 $a+f(1)=3+8=11$

답 ①

08

$f(x)=x^3-3x^2-6x+10$에서
$f'(x)=3x^2-6x-6$
$f'(-1)=3$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1, 12)$에서의 접선 l_1의 방정식은
$y-12=3(x+1)$, 즉 $3x-y+15=0$
두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(a)=f'(-1)=3$에서
$3a^2-6a-6=3$
$3(a+1)(a-3)=0$
$a\neq-1$이므로 $a=3$이고 $f(a)=-8$
점 A와 직선 l_2 사이의 거리는 점 $B(3, -8)$과 직선 l_1 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는
$$\frac{|3\times3-(-8)+15|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{32}{\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{10}}{5}$$

답 ④

09

두 점 A, B의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(0, 1)$이므로 정사각형 OACB의 넓이는 1이다.
두 함수 $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 점 D의 좌표가 $(1, a)$이고 점 E의 좌표는 $(a, 1)$이다.
정사각형 CEFD에서 $\overline{CD}=\overline{CE}=a-1$이므로 그 넓이는
$(a-1)^2$
두 정사각형 OACB와 CEFD의 넓이의 비가 $1:4$이므로
$1:(a-1)^2=1:4$에서
$(a-1)^2=4$, $a-1=\pm2$
$a>1$이므로 $a=3$
즉, 점 E의 x좌표가 3이므로 점 G의 좌표는 $(3, 3^3)$이고 점 H는 직선 $y=x$에 대하여 점 G와 대칭이므로 점 H의 좌표는 $(3^3, 3)$이다.
따라서 두 점 G, H를 지나는 직선의 방정식은
$y=-(x-3)+3^3$
$y=-x+30$ …… ㉠
따라서 두 점 G, H를 지나는 직선 ㉠이 x축과 만나는 점 I의 좌표는 $(30, 0)$이므로 삼각형 AIH의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(30-1)\times3=\frac{87}{2}$

답 ⑤

10

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$이고
조건 (가)에서 $F(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지므로 $F'(0)=f(0)=0$이다.
조건 (나)에서 $f(x)=0$인 x가 0 이외에 하나 존재하고 조건 (가)에서 $F(x)$는 $x=0$에서만 극값을 가지므로
$f(x)=x(x-a)^2\ (a\neq0)$
$$\begin{aligned}F(1)-F(-1)&=\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^{-1} f(t)\,dt\\&=\int_{-1}^1 f(t)\,dt\end{aligned}$$

$$=\int_{-1}^{1} t(t-a)^2 dt$$
$$=\int_{-1}^{1} (t^3-2at^2+a^2t)\,dt$$
$$=\int_{-1}^{1} (-2at^2)\,dt$$
$$=2\times\int_{0}^{1} (-2at^2)\,dt$$
$$=2\times\left[-\frac{2}{3}at^3\right]_0^1$$
$$=-\frac{4}{3}a=-4$$

에서 $a=3$이므로

$f(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$

따라서

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (t^3-6t^2+9t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+\frac{9}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=4-16+18=6$$

답 ③

11

주어진 그림의 각 단계에서

$a_1=1+1$

$a_2=(1+2)+2\times2$

$a_3=(1+2+3)+3\times3$

$a_4=(1+2+3+4)+4\times4$

⋮

이므로

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k+n^2=\frac{n(n+1)}{2}+n^2=\frac{3n^2+n}{2}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{3k^2+k}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=\frac{1155}{2}+\frac{55}{2}=605$$

답 ⑤

12

함수 $g(x)$는 삼차함수이고 $g(-1)=g'(-1)=0$이므로

$g(x)=(x+1)^2(ax+b)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

라 할 수 있다.

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=-4$이므로

$b=-4$

$$g(x)=(x+1)^2(ax-4)$$
$$=ax^3+2(a-2)x^2+(a-8)x-4$$

$g'(x)=3ax^2+4(a-2)x+a-8$이므로 $g'(1)=-8$에서

$3a+4(a-2)+a-8=-8$

$8a-16=-8$, $a=1$

$g'(x)=3x^2-4x-7$

한편, 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)-9$이므로

$f(3)=g'(3)+9=3\times3^2-4\times3-7+9=17$

답 ④

13

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=5$, (우변)$=5$이므로 ($*$)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$
$$=\frac{(2m+1)!}{m!}-1+\frac{\boxed{\{4(m+1)+1\}\times\{2(m+1)\}!}}{2\times(m+1)!}$$
$$=\frac{2(m+1)(2m+1)!}{2\times(m+1)!}+\frac{(4m+5)(2m+2)!}{2\times(m+1)!}-1$$
$$=\frac{\{(m+1)+(4m+5)(m+1)\}(2m+1)!}{(m+1)!}-1$$
$$=\frac{\boxed{(2m+3)(2m+2)}\times(2m+1)!}{(m+1)!}-1$$
$$=\frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!}-1$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1$$

이다.

$f(m)=\{4(m+1)+1\}\times\{2(m+1)\}!$, $g(m)=(2m+3)(2m+2)$

이므로

$f(1)+g(2)$

$=\{4\times(1+1)+1\}\times\{2\times(1+1)\}!+(2\times2+3)\times(2\times2+2)$

$=9\times4!+7\times6$

$=216+42=258$

답 ②

14

$f(t)=2t^3$, $g(t)=3t^2+12t$라 하자.

ㄱ. $t=2$일 때 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$f(2)=16=5\times3+1$, $g(2)=36=5\times7+1$

이므로 두 점 P, Q는 모두 점 B에서 점 A 방향으로 움직인다.

따라서 두 점 P, Q의 운동 방향은 같다. (참)

ㄴ. 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우는 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 $10n$ (n은 정수)인 경우이다.

$h_1(t)=f(t)-g(t)=2t^3-3t^2-12t$라 하면

$h_1'(t)=6t^2-6t-12=6(t+1)(t-2)$

이므로 $0<t<2$에서 $h_1'(t)<0$이고 $h_1(t)$는 감소한다.

$h_1(0)=0$, $h_1(2)=-20$이므로 $h_1(t)$의 값이 -10, -20일 때 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차는 각각 10, 20이다.

이때 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나고, 만나는 횟수는 2이다. (참)

ㄷ. 두 점 P, Q가 만나는 경우는 두 점이 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우와 반대 방향으로 움직이면서 만나는 경우, 선분의 양 끝 점에서 만나는 경우가 있다.

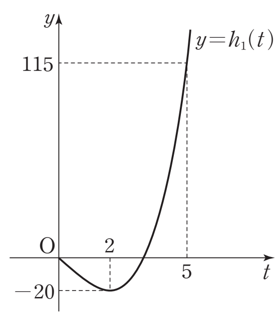
(i) 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우

ㄴ과 마찬가지로 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 $10n$ (n은 정수)인 경우이다.

$h_1(t)=f(t)-g(t)=2t^3-3t^2-12t$라 하면

$h_1'(t)=6t^2-6t-12=6(t+1)(t-2)$에서

$t=2$일 때 $h_1(t)$는 극소이다.



$h_1(0)=0$, $h_1(2)=-20$, $h_1(5)=115$

$0<t\le2$에서 $h_1(t)=10n_1$ (n_1은 정수)인 t의 값은 2개이고

$2<t\le5$에서 $h_1(t)=10n_2$ (n_2는 정수)인 t의 값은 13개이므로

$0<t\le5$일 때 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 15이다.

(ii) 두 점 P, Q가 반대 방향으로 움직이면서 만나는 경우

두 점 P, Q가 움직인 거리의 합이 $10n$ (n은 정수)인 경우이다.

$h_2(t)=f(t)+g(t)=2t^3+3t^2+12t$라 하면

$h_2'(t)=6t^2+6t+12=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{2}$

에서 $t>0$일 때 $h_2'(t)>0$이므로 $h_2(t)$는 증가한다.

$h_2(0)=0$, $h_2(5)=385$이므로 $0<t\le5$일 때

$h_2(t)=10n_3$ (n_3은 정수)인 t의 값은 38개이다.

즉, $0<t\le5$일 때 두 점 P, Q가 반대 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 38이다.

(iii) 두 점 P, Q가 양 끝 점에서 만나는 경우

두 점 P, Q가 선분의 양 끝 점에서 만나기 위해서는 $f(t)$, $g(t)$가 모두 5의 배수이고, $f(t)-g(t)$와 $f(t)+g(t)$ 모두 $10n$ (n은 정수)이어야 한다.

이 경우 (i)과 (ii)를 모두 만족시켜야 하므로 위의 경우에 중복으로 포함되어 있다.

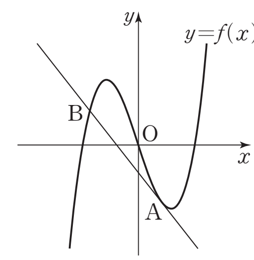
(i), (ii), (iii)에서 $0<t\le5$일 때 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 $15+38=53$ 이하이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15

$a\ne0$일 때 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(g(a),\ f(g(a)))$라 하면 두 점 A, B는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이고, $\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$는 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기이다.



$f'(x)=3x^2+k$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka$

이고, 두 점 A, B의 x좌표는 방정식

$x^3+kx=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka$ …… ㉠

의 실근이다. ㉠을 정리하면

$x^3-3a^2x+2a^3=0$

$(x+2a)(x-a)^2=0$

$x=-2a$ 또는 $x=a$

즉, $g(a)=-2a$ 또는 $g(a)=a$

이때 0이 아닌 실수 a에 대하여 $g(a)\ne a$이므로

$g(a)=-2a$, 즉 $g(x)=-2x$ …… ㉡

$f'(g(x))=f'(-2x)=12x^2+k$

$f'(x)\times f'(g(x))=k^2$에서

$(3x^2+k)\times(12x^2+k)=k^2$

$36x^4+15kx^2=0$, $3x^2(12x^2+5k)=0$

이차방정식 $12x^2+5k=0$의 두 근의 곱이 $-\frac{5}{4}$이므로

$\frac{5k}{12}=-\frac{5}{4}$, $k=-3$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$g(-3)=-2\times(-3)=6$

답 ③

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}+a_{20}=50$에서

$a+9d+a+19d=50$

$a+14d=25$ …… ㉠

$a_{10}-a_{20}=30$에서

$a+9d-(a+19d)=30$

$-10d=30$에서 $d=-3$

$d=-3$을 ㉠에 대입하면 $a=67$

따라서 $a_5=a+4d=67+4\times(-3)=55$

답 55

17

$f(x)=(x+2)(x^2-2x+4)$라 하면

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$이므로

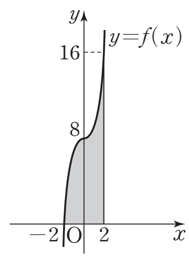
$f(x)=0$에서 $x=-2$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점 $(-2,\ 0)$에서 만난다.

한편 $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8$이므로

$f(x)=x^3+8$에서 $f'(x)=3x^2\ge0$

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}(x+2)(x^2-2x+4)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^3+8)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}8\,dx=8\times4=32$$

답 32

18

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로

$a\cos\frac{2}{3}\pi+b=3$

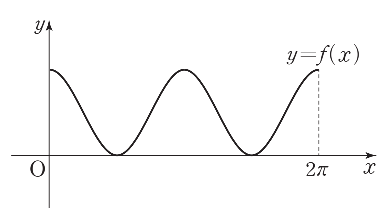
즉, $-\frac{1}{2}a+b=3$ …… ㉠

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=a\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다. 즉, $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 2이려면 다음과 같이

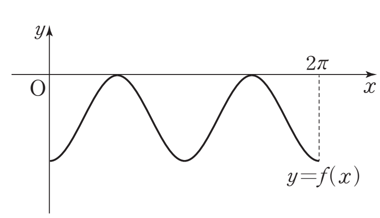
(i) $a>0$이고 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이거나

(ii) $a<0$이고 함수 $f(x)$의 최댓값이 0이어야 한다.

(i) $a>0$이고 함수 $f(x)$의 최솟값이 0인 경우



(ii) $a<0$이고 함수 $f(x)$의 최댓값이 0인 경우



조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3>0$이므로 $a>0$이고 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이다.

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 $-a+b=0$에서

$a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=6$

따라서 $a+b=6+6=12$

답 12

19

$f(x)=2x^3+ax^2-12x+b$에서

$f'(x)=6x^2+2ax-12$이고 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=6+2a-12=0$

에서 $a=3$

$f(1)=10$이므로

$f(1)=2+3-12+b=10$

에서 $b=17$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+17$이므로

$f(-1)=-2+3+12+17=30$

답 30

20

$S_{15}=S_{10}$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{13}+a_{14}+a_{15}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

이므로

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$ …… ㉠

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 정수인 공차를 d라 하면

$(a_1+10d)+(a_1+11d)+(a_1+12d)+(a_1+13d)+(a_1+14d)=0$

에서 $a_1+12d=0$

$a_n+25>0$을 만족시키는 n의 최댓값이 19이므로

$a_1+18d+25>0\ge a_1+19d+25$

$6d+25>0\ge 7d+25$에서 $d=-4$

㉠에서

$a_{13}=0$이므로

$a_1+(13-1)\times(-4)=0$에서 $a_1=48$

따라서 $a_n=48+(n-1)\times(-4)=-4n+52$이므로

$\sum_{k=1}^{20}|a_k|$

$=\sum_{k=1}^{12}(-4k+52)+a_{13}+\sum_{k=14}^{20}(4k-52)$

$=(48+44+40+\cdots+8+4)+0+(4+8+12+\cdots+24+28)$

$=\frac{12}{2}(48+4)+\frac{7}{2}(4+28)$

$=424$

답 424

21

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}\times12\times5=30$이므로 삼각형 ADE의 넓이는 15이다.

(삼각형 ADE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin A=15$ …… ㉠

또한 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\cos A$ …… ㉡

한편, 삼각형 ABC에서 $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos A=\frac{12}{13}$이다.

㉠에서 $\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\frac{5}{13}=15$이므로

$\overline{AD}\times\overline{AE}=78$ …… ㉢

㉡에서

$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\frac{12}{13}$

$=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-144$

$=(\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AE}})^2+2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}-144$

$=(\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AE}})^2+12$ (㉢에 의하여)

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}$일 때, $\overline{\mathrm{DE}}$는 최솟값 $2\sqrt{3}$을 갖는다.

$m=2\sqrt{3}$이므로 $m^2=12$

답 12

22

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 a_n은 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 두 함숫값 $f(-1)$, $f(3)$ 중에서 가장 큰 값이다.

$f(0)=0$, $f'(x)=x(1-x^n)$

$$f(x)=\int_0^x t(1-t^n)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n+2}x^{n+2}$$

(i) n이 홀수일 때

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이고,

$$f(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)^2-\frac{1}{n+2}\times(-1)^{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$$

$$f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$	↘	$f(3)$

따라서 n이 홀수일 때 $f(-1)>f(1)>f(3)$이므로

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$$

(ii) n이 짝수일 때

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이고,

$$f(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)^2-\frac{1}{n+2}\times(-1)^{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$	↘	$f(3)$

따라서 n이 짝수일 때 $f(-1)=f(1)>f(3)$이므로

$$a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

(i), (ii)에서 $a_n=\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{n+2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}4(n+2)a_n=\sum_{n=1}^{10}\{2(n+2)-4(-1)^n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}2n+\sum_{n=1}^{10}4-\sum_{n=1}^{10}4(-1)^n$$

$$=2\times\frac{10\times11}{2}+4\times10-4\times0=150$$

답 150

23

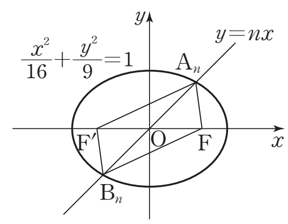
점 $\mathrm{P}(1, 2, 2)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-1, 2, 2)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=|-1-1|=2$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

따라서 $k=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{2}{3}$

답 ②

24



그림과 같이 타원의 두 초점을 F, F′이라 하면 두 점 A_n, B_n은 원점 O에 대하여 서로 대칭이므로 두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{F}'\mathrm{O}$, $\mathrm{B}_n\mathrm{FO}$는 서로 합동이다.

따라서

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{F}'}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}}$ …… ㉠

타원의 정의에 따라 타원 위의 점 A_n에 대하여

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{F}'}=2\times4=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

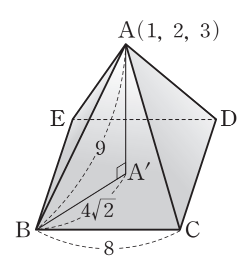
$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{F}'}=8$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}})=\sum_{n=1}^{10}8=8\times10=80$

답 ④

25

두 모서리 BE, BC가 각각 x축, y축에 평행하므로 평면 BCDE는 xy평면과 평행하거나 일치한다. 즉, 네 점 B, C, D, E의 z좌표는 모두 c로 같다.



그림과 같이 점 A의 평면 BCDE 위로의 정사영을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(1, 2, c)$이다. 또한 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BE}}=8$이므로 조건 (다)에 의하여 점 C의 x좌표는 $1+4=5$, y좌표는 $2+4=6$이다.

또 직각삼각형 ABA′에서 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{A'B}}=4\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AA'}}=\sqrt{9^2-(4\sqrt{2})^2}=7$

점 A의 z좌표가 3이고 $c<3$이므로

$c=3-7=-4$

즉, 점 C의 좌표는 $(5, 6, -4)$

따라서 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{5^2+6^2+(-4)^2}=\sqrt{77}$

답 ④

26

변 AD의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$이므로

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{AD}=0$에서

$2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

즉, 점 O는 변 AD의 수직이등분선 위의 점이고 조건 (나)에서 정사각형 ABCD의 한 변 위의 점이므로 점 O는 변 AD의 중점 M이거나 변 BC의 중점이다.

(i) 점 O가 변 AD의 중점일 때

$k=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-|\overrightarrow{MA}|^2<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 점 O가 변 BC의 중점일 때

$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$에서

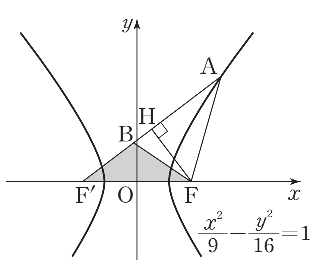
$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{5}$

따라서

$$\begin{aligned}k&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}\\&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=-|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|+0+0+|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{CD}|\\&=-(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2\\&=-5+20\\&=15\end{aligned}$$

답 ③

27



쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각

$(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{9+16}=5$

$\overline{FF'}=2c=2\times5=10$

즉, $\overline{AB}=\overline{AF}=\overline{FF'}=10$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{AF'}-\overline{AF}=2\times3=6$

따라서

$\overline{AF'}=\overline{AF}+6=10+6=16$

$\overline{BF'}=\overline{AF'}-\overline{AB}=16-10=6$

점 F에서 선분 AF′에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 FAF′은 이등변삼각형이므로

$\overline{HF'}=\frac{1}{2}\times\overline{AF'}=\frac{1}{2}\times16=8$

직각삼각형 FHF′에서

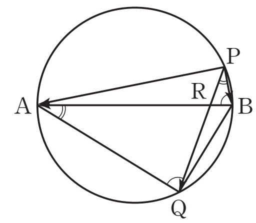
$$\begin{aligned}\overline{HF}&=\sqrt{\overline{FF'}^2-\overline{HF'}^2}\\&=\sqrt{10^2-8^2}=6\end{aligned}$$

따라서 삼각형 BF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BF'}\times\overline{HF}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$

답 ②

28



$\overrightarrow{PQ}=3(t\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PB})$에서 $\overrightarrow{PR'}=t\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PB}$라 하면 $0<t<1$에서 점 R′은 선분 AB 위의 점이고, $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PR'}$에서 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{PR'}$이므로 점 R′은 점 R와 일치한다.

즉, $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PB}$이고, $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PR}$이다.

따라서 점 R는 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점이고,

$\overline{PR}=\frac{1}{3}\overline{PQ}=\frac{1}{3}\times4=\frac{4}{3}$

$\overline{RQ}=\frac{2}{3}\overline{PQ}=\frac{2}{3}\times4=\frac{8}{3}$

이다. 원주각의 성질에 의하여

$\angle BPQ=\angle BAQ$, $\angle ABP=\angle AQP$이므로 두 삼각형 RAQ, RPB는 서로 닮은 도형이다. 따라서

$\overline{AR}:\overline{RQ}=\overline{PR}:\overline{RB}$

$\overline{AR}\times\overline{RB}=\overline{RQ}\times\overline{PR}=\frac{8}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{32}{9}$

이때 $\overline{AR}+\overline{RB}=\overline{AB}=6$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AR}^2+\overline{RB}^2&=(\overline{AR}+\overline{RB})^2-2\times(\overline{AR}\times\overline{RB})\\&=6^2-2\times\frac{32}{9}\\&=\frac{260}{9}\end{aligned}$$

답 ②

참고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=3(t\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PB})=3\{t(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})+\overrightarrow{PB}\}\\&=3\{t\overrightarrow{PA}+(1-t)\overrightarrow{PB}\}\end{aligned}$$

에서 $\overrightarrow{PR'}=t\overrightarrow{PA}+(1-t)\overrightarrow{PB}$라 하면 $0<t<1$에서 점 R′은 선분 AB 위의 점이고, $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PR'}$에서 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{PR'}$이므로 점 R′은 점 R와 일치한다.

즉, $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PA}+(1-t)\overrightarrow{PB}$이고, $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PR}$이다.

29

포물선 $y^2=8(x-2)$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 직선은 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 m인 직선을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx+\frac{2}{m}$

이므로 포물선 $y^2=8(x-2)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x-2)+\frac{2}{m}$

$y=mx-2m+\frac{2}{m}$ ...... ㉠

포물선 $x^2=16(y-4)$에 접하고 기울기가 m인 직선은 포물선 $x^2=16y$에 접하고 기울기가 m인 직선을 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다. 포물선 $x^2=16y$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx-4m^2$이므로 포물선 $x^2=16(y-4)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-4=mx-4m^2$

$y=mx-4m^2+4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 두 접선은 서로 같으므로

$-2m+\frac{2}{m}=-4m^2+4$

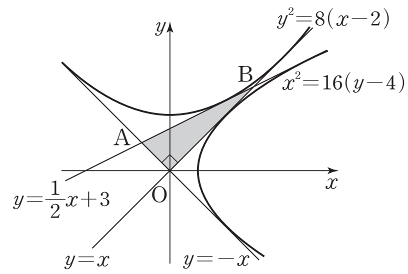
$2m^3-m^2-2m+1=0$

$(m+1)(m-1)(2m-1)=0$

$m=-1$ 또는 $m=1$ 또는 $m=\frac{1}{2}$ ...... ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$y=-x$, $y=x$, $y=\frac{1}{2}x+3$



세 직선이 만나는 점의 좌표는

$(0, 0)$, $(-2, 2)$, $(6, 6)$

이고, 세 점을 차례로 O, A, B라 하면 두 직선 OA, OB는 서로 수직이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=12$

답 12

다른 풀이

포물선 $y^2=8(x-2)$ ...... ㉠

에 접하는 직선의 방정식을

$y=mx+n$ ...... ㉡

이라 하면 ㉠과 ㉡에서 y를 소거하여 얻은 x에 대한 방정식은

$(mx+n)^2=8(x-2)$ ...... ㉢

㉢을 정리한 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}=0$에서

$n=\frac{2}{m}-2m$ ...... ㉣

직선 $y=mx+n$이 포물선

$x^2=16(y-4)$ ...... ㉤

와도 접해야 한다.

㉡과 ㉤에서 y를 소거하여 얻은 x에 대한 방정식은

$x^2=16(mx+n-4)$ ...... ㉥

㉥을 정리한 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면 $\frac{D_2}{4}=0$에서

$n=4-4m^2$ ...... ㉦

㉣, ㉦에서

$\frac{2}{m}-2m=4-4m^2$

$2m^3-m^2-2m+1=0$

$(m+1)(m-1)(2m-1)=0$

$m=-1$ 또는 $m=1$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-x$, $y=x$, $y=\frac{1}{2}x+3$

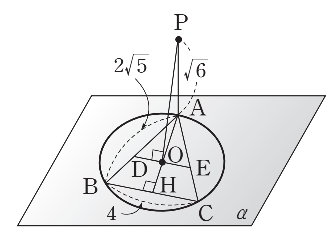
세 직선이 만나는 점의 좌표는

$(0, 0)$, $(-2, 2)$, $(6, 6)$

이고, 세 점을 차례로 O, A, B라 하면 두 직선 OA, OB는 서로 수직이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=12$

30



삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 BC의 중점이다.

$\overline{AH}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{20-4}=\sqrt{16}=4$

이때 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$이므로 점 O는 직선 AH 위에 있다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin(\angle ABC)=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{2\sqrt{5}}{\sin(\angle ABC)}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=5$

$R=\frac{5}{2}$

즉, $\overline{AO}=\frac{5}{2}$이고 직각삼각형 POA에서

$\overline{PO}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AO}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$

$\overline{AO}:\overline{DE}=\overline{AH}:\overline{BC}=4:4=1:1$이므로

$\overline{DE}=\overline{AO}=\frac{5}{2}$

$\overline{AO}\perp\overline{DE}$이고 $\overline{PA}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PO}\perp\overline{DE}$이다.

삼각형 PDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{PO}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{35}{8}$

이므로 $p=8$, $q=35$

따라서 $p+q=8+35=43$

답 43