

수능완성



수학영역 | 수학 I·수학 II·기하

이 책의 구성과 특징

STRUCTURE

이 책의 구성

① 유형편

출제유형에 제시된 유형의 대표기출문제와 유제들로 유형별 학습을 할 수 있도록 하였다.

② 실전편

실전 모의고사 5회 구성으로 수능에 대비할 수 있도록 하였다.

2022학년도 대학수학능력시험 수학영역

① 출제원칙

수학 교과와 특성을 고려하여 개념과 원리를 바탕으로 한 사고력 중심의 문항을 출제한다.

② 출제방향

- 단순 암기에 의해 해결할 수 있는 문항이나 지나치게 복잡한 계산 위주의 문항 출제를 지양하고 계산, 이해, 추론, 문제해결 능력을 평가할 수 있는 문항을 출제한다.
- 2015 개정 수학과 교육과정에 따라 이수한 수학 과목의 개념과 원리 등은 출제범위에 속하는 내용과 통합하여 출제할 수 있다.
- 수학영역은 교육과정에 제시된 수학 교과와 수학 I, 수학 II, 확률과 통계, 미적분, 기하 과목을 바탕으로 출제한다.

③ 출제범위

- ‘공통과목 + 선택과목’ 구조에 따라 공통과목(수학 I, 수학 II)은 공통 응시하고 선택과목(확률과 통계, 미적분, 기하) 중 1개 과목을 선택한다.

영역	구분	문항수	문항유형	배점		시험 시간	출제범위(선택과목)
				문항	전체		
수학		30	5지 선다형, 단답형	2점 3점 4점	100점	100분	• 공통과목: 수학 I, 수학 II • 선택과목(택1): 확률과 통계, 미적분, 기하 • 공통 75%, 선택 25% 내외 • 단답형 30% 포함

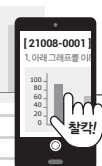
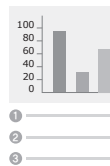


학생 EBS 교재 문제 검색

EBS 단추에서 문항코드나 사진으로 문제를 검색하면 푸러봇이 해설 영상을 제공합니다.

[21054-0001]

1. 아래 그래프를 이해한 내용으로 가장 적절한 것은?



21054-0001



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

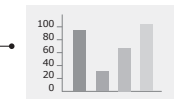


교사 교사지원센터 교재 자료실

교재 문항 한글 문서(HWP)와 교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.

교재 자료실

- 한글다운로드
- 교재이미지 활용
- 강의활용자료



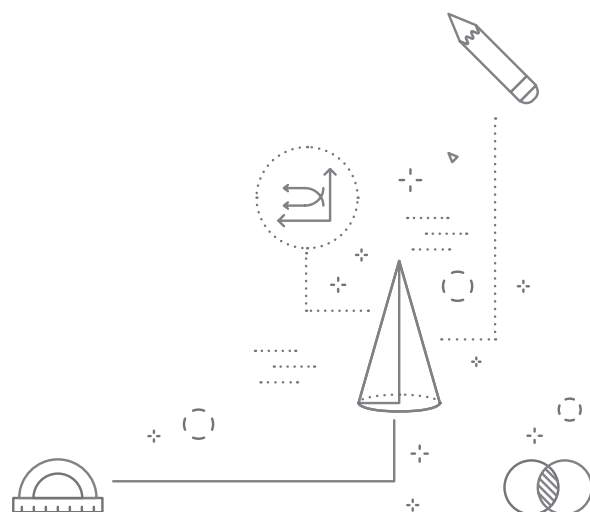
※ 교사지원센터(<http://teacher.ebsi.co.kr>) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

이 책의 차례

CONTENTS

유형편

과목	단원	단원명	페이지
수학 I	01	지수함수와 로그함수	4
	02	삼각함수	18
	03	수열	30
수학 II	04	함수의 극한과 연속	44
	05	다항함수의 미분법	58
	06	다항함수의 적분법	74
기하	07	이차곡선	86
	08	평면벡터	99
	09	공간도형과 공간좌표	112



1 거듭제곱근

(1) a 의 n 제곱근

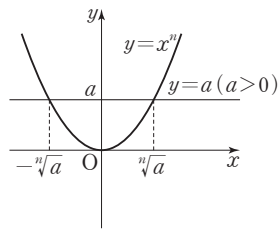
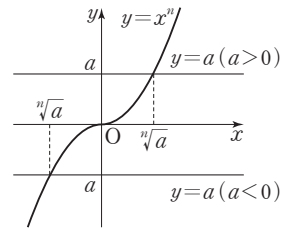
실수 a 와 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 a 가 되는 수, 즉 방정식 $x^n = a$ 를 만족시키는 x 를 a 의 n 제곱근이라고 한다. 이때 a 의 제곱근, a 의 세제곱근, a 의 네제곱근, ... 을 통틀어 a 의 거듭제곱근이라고 한다.

(2) 실수인 거듭제곱근

실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

참고 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것을 x 라 할 때, x 의 개수는 방정식 $x^n = a$ 를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수이므로 함수 $y = x^n$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같다.

[n 이 짝수인 경우][n 이 홀수인 경우]

2 거듭제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 2 이상의 자연수일 때

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

(2) $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(3) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(6) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p 는 자연수)

참고 a 가 실수일 때, $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & (n \text{이 홀수}) \\ |a| & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$

3 지수의 확장(1) - 정수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때

① $a^0 = 1$

② $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a \neq 0, b \neq 0$ 이고 m, n 이 정수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

4 지수의 확장(2) - 유리수

(1) 유리수인 지수

$a > 0$ 이고 m 이 정수, n 이 2 이상의 정수일 때

$$\textcircled{1} a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\textcircled{2} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때

$$\textcircled{1} a^r a^s = a^{r+s}$$

$$\textcircled{2} a^r \div a^s = a^{r-s}$$

$$\textcircled{3} (a^r)^s = a^{rs}$$

$$\textcircled{4} (ab)^r = a^r b^r$$

5 지수의 확장(3) - 실수

(1) 무리수인 지수

$\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$ 이므로 무리수 $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ...을 생각할 수 있다. 이 유리수를 지수로 갖는 수들 $2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, 2^{1.41421}, \dots$ 은 어떤 일정한 수에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이때 그 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$ 으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 $a > 0$ 이고 x 가 무리수일 때, a^x 을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때

$$\textcircled{1} a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\textcircled{2} a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$\textcircled{3} (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\textcircled{4} (ab)^x = a^x b^x$$

6 로그의 뜻

(1) 로그의 정의

$a > 0, a \neq 1, N > 0$ 일 때, $a^x = N$ 을 만족시키는 실수 x 는 오직 하나만 존재한다.

이 x 를 $\log_a N$ 으로 나타내고, 이것을 a 를 밑으로 하는 N 의 로그라고 하며, N 을 $\log_a N$ 의 진수라고 한다. 즉,

$$a > 0, a \neq 1, N > 0 \text{ 일 때, } a^x = N \iff x = \log_a N$$

(2) 로그의 밑과 진수의 조건

$\log_a N$ 이 정의되려면 밑 a 는 $a > 0, a \neq 1$ 이고 진수 N 은 $N > 0$ 이어야 한다.

7 로그의 성질

$a > 0, a \neq 1$ 이고 $M > 0, N > 0$ 일 때

$$\textcircled{1} \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$\textcircled{2} \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\textcircled{3} \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\textcircled{4} \log_a M^k = k \log_a M \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

8 로그의 밑의 변환

(1) 로그의 밑의 변환

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1 \text{ 일 때 } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a > 0, a \neq 1, b > 0$ 일 때

$$\textcircled{1} \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ (단, } b \neq 1)$$

$$\textcircled{2} \log_a b \times \log_b c = \log_a c \text{ (단, } b \neq 1, c > 0)$$

$$\textcircled{3} \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \text{ (단, } m, n \text{은 실수이고, } m \neq 0 \text{이다.)}$$

$$\textcircled{4} a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \text{ (단, } b \neq 1, c > 0)$$

9 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

양수 N 에 대하여 $\log_{10} N$ 과 같이 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$ 과 같이 나타낸다.

(2) 상용로그표

상용로그표는 1.00부터 9.99까지 0.01의 간격의 수에 대한 상용로그의 값을 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

(3) 상용로그표를 보는 법

상용로그표에서 $\log 2.34$ 의 값을 찾으려면 2.3의 행과 표의 맨 윗줄에 있는 4의 열이 만나는 수 .3692를 찾으면 된다.

즉, $\log 2.34 = 0.3692$

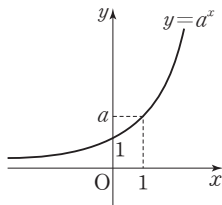
수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0										
⋮										
2.3					.3692					
⋮										
9.9										

10 지수함수의 뜻과 그래프

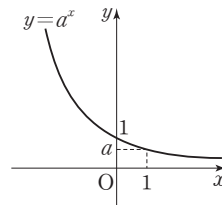
(1) a 가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 실수 x 에 대하여 a^x 의 값이 하나씩 정해지므로 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)은 x 에 대한 함수이다. 이 함수를 a 를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

(2) 지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프는 다음 그림과 같다.

① $a > 1$ 일 때



② $0 < a < 1$ 일 때



11 지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나고, 점근선은 x 축 (직선 $y = 0$)이다.

참고 (1) 함수 $y = a^x$ 의 그래프와 함수 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 서로 대칭이다.

(2) 함수 $y = a^{x-m} + n$ 의 그래프는 함수 $y = a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다.

12 지수함수의 활용

(1) $a > 0, a \neq 1$ 일 때, $a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$

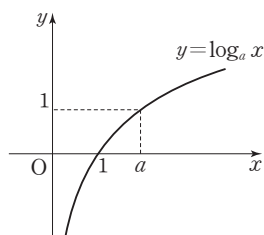
(2) $a > 1$ 일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$

$0 < a < 1$ 일 때, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$

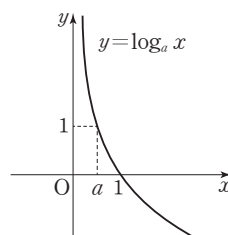
13 로그함수의 뜻과 그래프

- (1) a 가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 양의 실수 x 에 대하여 $\log_a x$ 의 값이 하나씩 정해지므로 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)은 x 에 대한 함수이다. 이 함수를 a 를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.
- (2) 지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 로그의 정의에 의하여 $y = a^x \iff x = \log_a y$ 이고, $x = \log_a y$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $y = a^x$ 의 역함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)을 얻을 수 있다.
- (3) 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프는 다음 그림과 같다.

① $a > 1$ 일 때

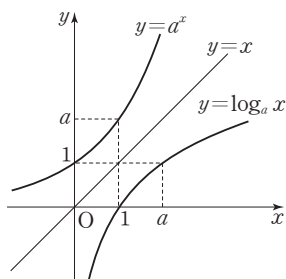


② $0 < a < 1$ 일 때

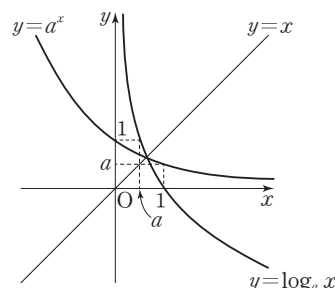


참고 로그함수 $y = \log_a x$ 는 지수함수 $y = a^x$ 의 역함수이고, 그 그래프는 함수 $y = a^x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

① $a > 1$ 일 때



② $0 < a < 1$ 일 때



14 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 성질

- (1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
- (2) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- (3) 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선은 y 축(직선 $x = 0$)이다.

참고 (1) 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프와 함수 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

- (2) 함수 $y = \log_a (x - m) + n$ 의 그래프는 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다.

15 로그함수의 활용

- (1) $a > 0, a \neq 1$ 일 때, $\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x), f(x) > 0, g(x) > 0$
- (2) $a > 1$ 일 때, $\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff 0 < f(x) < g(x)$
 $0 < a < 1$ 일 때, $\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff f(x) > g(x) > 0$

유형 1 거듭제곱근의 뜻과 성질

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

- (1) 실수 a 와 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 a 가 되는 실수, 즉 방정식 $x^n = a$ 를 만족시키는 실수 x 는 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

- (2) $a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 2 이상의 자연수일 때

- ① $(\sqrt[n]{a})^n = a$
 ② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
 ③ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
 ④ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
 ⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
 ⑥ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p 는 자연수)

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n 이 $2 \leq n \leq 11$ 일 때, $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합은? [3점]

- ① 31 ② 33 ③ 35
 ④ 37 ⑤ 39

출제 의도

거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$-n^2 + 9n - 18 = -(n-3)(n-6)$$

이므로 자연수 n 이 $2 \leq n \leq 11$ 일 때 $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

- (i) $-n^2 + 9n - 18 < 0$ 일 때

즉, $2 \leq n < 3$ 또는 $6 < n \leq 11$ 이고 n 이 홀수이어야 하므로 n 은 7, 9, 11이다.

- (ii) $-n^2 + 9n - 18 > 0$ 일 때

즉, $3 < n < 6$ 이고 n 이 짝수이어야 하므로 n 은 4이다.

- (i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은 $4 + 7 + 9 + 11 = 31$

답 ①

01

▶ 21054-0001

$$\frac{(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2 + \sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[3]{2}}$$
의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

02

▶ 21054-0002

실수 a 의 세제곱근 중 실수인 것과 8의 여섯제곱근 중 음의 실수인 것이 서로 같고, 양의 실수 b 의 제곱근 중 양의 실수인 것과 $\sqrt[4]{8}$ 의 세제곱근 중 실수인 것이 서로 같다. $a+b$ 의 값은?

- ① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0
 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

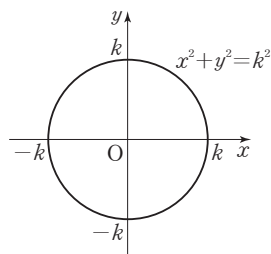
03

▶ 21054-0003

중심이 원점이고 반지름의 길이가 k ($k > 2$)인 원 위의 점 중 y 좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합을 A 라 하고, 집합 A 에 대하여 집합 B 는 다음과 같다.

$$B = \{x | x \text{는 } a \text{의 } n \text{제곱근 중 양의 실수, } (a, n) \in A\}$$

집합 B 의 원소의 개수가 7일 때, k^2 의 최댓값을 구하시오.



유형 2 지수의 확장

출제유형 | 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타내는 문제, 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고 n 은 양의 정수일 때

① $a^0 = 1$

② $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(2) 유리수인 지수

$a > 0$ 이고 m 이 정수, n 이 2 이상의 양의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

(3) 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때

① $a^x a^y = a^{x+y}$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$

④ $(ab)^x = a^x b^x$

필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

16×2^{-3} 의 값은? [2점]

① 1

② 2

③ 4

④ 8

⑤ 16

출제 의도

지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned} 16 \times 2^{-3} &= 2^4 \times 2^{-3} \\ &= 2^{4+(-3)} \\ &= 2^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 ②

04

▶ 21054-0004

$27^{-1} \div \left(\frac{1}{9} \times \sqrt[3]{81} \right)^{\frac{9}{2}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

③ 1

④ $\sqrt[3]{3}$

⑤ $\sqrt[3]{9}$

05

▶ 21054-0005

두 실수 a, b 에 대하여

$$2^{a+\frac{b}{2}} = \frac{1}{3}, 2^{a-\frac{b}{2}} = 27$$

일 때, $\sqrt{2^{3a}} \times \sqrt[3]{2^b}$ 의 값은?

① $3^{\frac{1}{6}}$

② $3^{\frac{1}{5}}$

③ $3^{\frac{1}{4}}$

④ $3^{\frac{1}{3}}$

⑤ $3^{\frac{1}{2}}$

06

▶ 21054-0006

실수 x 와 0이 아닌 정수 n 에 대하여

$$9^x - 3^{x+\frac{10}{n}} = -1$$

을 만족시키도록 x, n 의 값을 정할 때, $9^x + 9^{-x} - 2$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하시오.

유형 3 로그의 뜻과 기본 성질

출제유형 | 로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

- (1) $a > 0, a \neq 1, N > 0$ 일 때, $a^x = N \iff x = \log_a N$
 (2) $\log_a N$ 이 정의되려면 밑 a 는 $a > 0, a \neq 1$ 이고 진수 N 은 $N > 0$ 이어야 한다.
 (3) $a > 0, a \neq 1$ 이고 $M > 0, N > 0$ 일 때
 ① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
 ② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
 ③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
 ④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수)

필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

자연수 n 의 양의 약수의 개수를 $f(n)$ 이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 라 하자.

$\sum_{k=1}^9 \{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\}$ 의 값은? [4점]

- ① $\log 2 + \log 3$ ② $2 \log 2 + \log 3$
 ③ $\log 2 + 2 \log 3$ ④ $2 \log 2 + 2 \log 3$
 ⑤ $3 \log 2 + 2 \log 3$

출제 의도

로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

36의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이고,

$f(1), f(4), f(9), f(36)$ 은 홀수,

$f(2), f(3), f(6), f(12), f(18)$ 은 짝수이다.

따라서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^9 \{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\} \\ &= -\log 1 + \log 2 + \log 3 - \log 4 + \log 6 - \log 9 \\ & \quad + \log 12 + \log 18 - \log 36 \\ &= \log \frac{2 \times 3 \times 6 \times 12 \times 18}{1 \times 4 \times 9 \times 36} \\ &= \log 6 \\ &= \log 2 + \log 3 \end{aligned}$$

답 ①

07

▶ 21054-0007

모든 실수 x 에 대하여 $\log_{|a+3|}(x^2+ax-a+3)$ 의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합은?

- ① -9 ② -7 ③ -5
 ④ -3 ⑤ -1

08

▶ 21054-0008

$\log_2 30 - \log_2 \frac{3}{2} - \log_2 \frac{5}{4}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

09

▶ 21054-0009

두 양수 a, b ($b \neq 1$)에 대하여 $a^2 b^{-3} = 1$ 일 때,
 $\log_b(a^m \times \sqrt{b^n}) = 10$ 을 만족시키는 두 자연수 m, n 의 합 $m+n$ 의 최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

유형 4 로그의 여러 가지 성질

출제유형 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 로그의 밑의 변환

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1 \text{ 일 때, } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$$a > 0, a \neq 1, b > 0 \text{ 일 때}$$

$$\textcircled{1} \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (\text{단, } b \neq 1)$$

$$\textcircled{2} \log_a b \times \log_b c = \log_a c \quad (\text{단, } b \neq 1, c > 0)$$

$$\textcircled{3} \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (\text{단, } m, n \text{ 은 실수이고 } m \neq 0 \text{ 이다.})$$

$$\textcircled{4} a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad (\text{단, } b \neq 1, c > 0)$$

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

두 양수 a, b 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$ 를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$ 의 값은?
(단, $a \neq 1$) [3점]

- $\textcircled{1} \frac{1}{4}$ $\textcircled{2} \frac{1}{2}$ $\textcircled{3} \frac{3}{4}$
 $\textcircled{4} 1$ $\textcircled{5} \frac{5}{4}$

출제 의도

로그의 밑의 변환을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$ 를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 각각 두 점을 잇는 직선의 기울기는 서로 같아야 한다.

$$\text{즉, } \frac{\log_4 a}{2} = \frac{\log_2 b}{3} \text{에서 } \frac{1}{4} \log_2 a = \frac{1}{3} \log_2 b \text{ 이므로}$$

$$\log_2 a = \frac{4}{3} \log_2 b$$

$$\text{따라서 } \log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = \frac{\log_2 b}{\frac{4}{3} \log_2 b} = \frac{3}{4}$$

답 ③

10

▶ 21054-0010

$\left(4^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)^{\log_3 \frac{1}{6}}$ 의 값은?

- $\textcircled{1} 4$ $\textcircled{2} 9$ $\textcircled{3} 16$
 $\textcircled{4} 25$ $\textcircled{5} 36$

11

▶ 21054-0011

등식 $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{\log_{25} a}{\log_5 a} = 1$ 을 만족시키는 양수 a 의 값을 구하시오. (단, $a \neq 1$)

12

▶ 21054-0012

세 양수 a, b, c 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \sqrt{a} = \sqrt[3]{b} = \sqrt[5]{c}$$

$$(나) \log_2 \frac{bc}{a} = 3$$

1보다 큰 두 실수 m, n 이 $\log_2 a \times \log_m b \times \log_n c = 1$ 을 만족시킬 때, $\log_2 mn$ 의 최솟값은?

- $\textcircled{1} 3$ $\textcircled{2} 2\sqrt{3}$ $\textcircled{3} \sqrt{15}$
 $\textcircled{4} 3\sqrt{2}$ $\textcircled{5} \sqrt{21}$

유형 5 지수함수와 그 그래프

출제유형 | 지수함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 밑의 범위에 따른 지수함수의 증가와 감소, 지수함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동을 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $f(x) = -2^{4-3x} + k$ 의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k 의 최댓값은? [3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

(출제 의도)

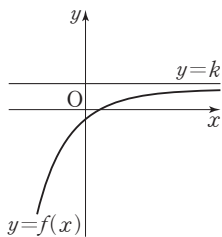
지수함수의 그래프의 대칭이동과 평행이동을 이해하고, 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$f(x) = -2^{4-3x} + k = -\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}} + k \text{ 이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{4}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 $f(0) \leq 0$ 이어야 한다.



$$f(0) = -2^4 + k \leq 0 \text{ 에서 } k \leq 16$$

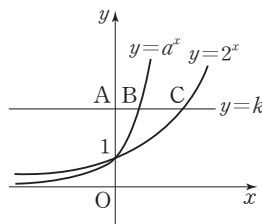
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최댓값은 16이다.

답 ④

13

▶ 21054-0013

직선 $y=k$ ($k>1$)이 y 축 및 두 곡선 $y=a^x$ ($a>2$), $y=2^x$ 과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ 일 때, 실수 a 의 값을 구하시오.



14

▶ 21054-0014

곡선 $y=4^{-x+1}+a$ 가 곡선 $y=3^x+1$ 과 제2사분면에서 만나고 곡선 $y=2^x-4$ 와 제4사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 a 의 개수는?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

15

▶ 21054-0015

함수 $f(x) = 2^{x+3} + k$ 의 그래프가 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AO의 길이가 자연수가 되도록 상수 k 의 값을 정할 때 삼각형 AOB의 넓이는 $k=s$ 에서 최솟값 S 를 갖는다. $S-s$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

유형 6 지수함수의 활용

출제유형 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구할 때는 다음과 같은 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a > 0, a \neq 1$ 일 때

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$$

(2) $a > 1$ 일 때

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$$

$0 < a < 1$ 일 때

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$$

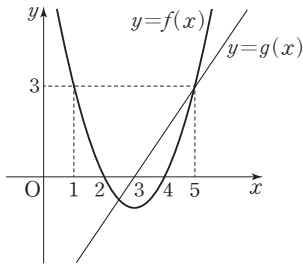
필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은? [4점]



- ① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

(출제 의도)

지수함수의 성질을 이용하여 지수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)} \text{ 에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$$

$$f(x)g(x) \leq 3g(x), g(x)\{f(x)-3\} \leq 0$$

(i) $g(x) < 0$ 인 경우

$$f(x)-3 \geq 0 \text{ 에서 } f(x) \geq 3$$

그림에서 $g(x) < 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는 $x < 3$ 이고, $f(x) \geq 3$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$ 이므로 $x \leq 1$

(ii) $g(x) = 0$ 인 경우

$$g(x)\{f(x)-3\} = 0 \leq 0 \text{ 이므로 } x = 3$$

(iii) $g(x) > 0$ 인 경우

$$f(x)-3 \leq 0 \text{ 에서 } f(x) \leq 3$$

그림에서 $g(x) > 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는 $x > 3$ 이고, $f(x) \leq 3$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는 $1 \leq x \leq 5$ 이므로 $3 < x \leq 5$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는 $x \leq 1$ 또는 $3 < x \leq 5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$1 + 3 + 4 + 5 = 13$$

답 ④

16

▶ 21054-0016

방정식

$$9^{x+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-x} + 24$$

의 해를 a 라 할 때, $6a+5$ 의 값을 구하시오.

17

▶ 21054-0017

부등식

$$2^x \times 4^{x^2 - \frac{5}{2}x} \leq 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{x-3}$$

을 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

18

▶ 21054-0018

10보다 작은 두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = |3^x - a| + b$$

라 하자. x 에 대한 방정식 $4^{f(x)} - 5 \times 2^{f(x)+2} + 64 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

유형 7 로그함수와 그 그래프

출제유형 | 로그함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동, 밑의 범위에 따른 함수의 증가와 감소를 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형

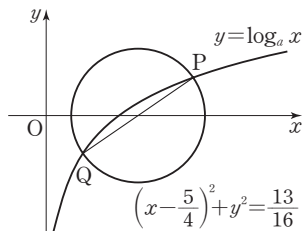
| 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와

원 $C : \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q라 하자.

선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a 의 값은? [4점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



(출제 의도)

로그함수의 그래프 위의 점의 좌표에 대하여 로그의 성질과 원의 성질을 이용하여 a 의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$P(p, \log_a p)$, $Q(q, \log_a q)$ ($p > q$)로 놓으면

선분 PQ의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ 이므로

$$\frac{p+q}{2} = \frac{5}{4} \text{에서 } p+q = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\log_a p + \log_a q}{2} = 0 \text{에서 } \log_a pq = 0, pq = a^0 = 1$$

p, q 를 두 실근으로 갖는 t 에 대한 이차방정식

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \text{에서 } 2t^2 - 5t + 2 = 0, (2t-1)(t-2) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2, \text{ 즉 } p = 2, q = \frac{1}{2}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $P(2, \log_a 2)$, $Q\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$ 이다.

선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$$\overline{PQ}^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \{\log_a 2 - (-\log_a 2)\}^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$$(\log_a 4)^2 = 1$$

이때 $a > 1$ 이므로 $\log_a 4 = 1$ 에서 $a = 4$

답 ③

19

▶ 21054-0019

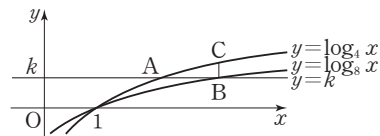
함수 $y = \log_2(2x+a)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프는 원점을 지나고 점근선의 방정식은 $x = -2$ 이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

20

▶ 21054-0020

직선 $y = k$ ($k > 0$)이 두 곡선 $y = \log_4 x$, $y = \log_8 x$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고 점 B를 지나고 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = \log_4 x$ 와 만나는 점을 C라 하자. 세 점 O, A, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k 의 값은? (단, O는 원점이다.)

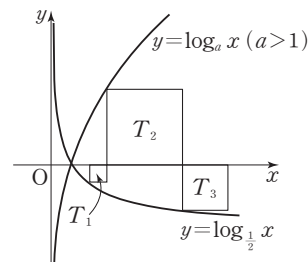


- ① $1 - \frac{1}{2} \log_2 3$ ② $-2 + \frac{3}{2} \log_2 3$
③ $2 - \log_2 3$ ④ $-1 + \log_2 3$
⑤ $\frac{1}{2} \log_2 3$

21

▶ 21054-0021

그림과 같이 세 개의 정사각형 T_1, T_2, T_3 이 한 변은 x 축 위에 있고 T_2 는 T_1, T_3 과 각각 한 꼭짓점만을 공유하며 T_1, T_3 의 한 꼭짓점은 각각 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 위에 있고, T_2 의 한 꼭짓점은 곡선 $y = \log_a x$ ($a > 1$) 위에 있다. T_1, T_3 의 넓이가 각각 1, 9일 때 a^{10} 의 값을 구하시오. (단, T_1, T_3 은 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 와 각각 한 점에서만 만나고, T_2 는 곡선 $y = \log_a x$ 와 한 점에서만 만난다.)



유형 8 로그함수의 활용

출제유형 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구할 때에는 다음과 같은 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a > 0, a \neq 1$ 일 때

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x), f(x) > 0, g(x) > 0$$

(2) $a > 1$ 일 때

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff 0 < f(x) < g(x)$$

$0 < a < 1$ 일 때

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff f(x) > g(x) > 0$$

필수 유형

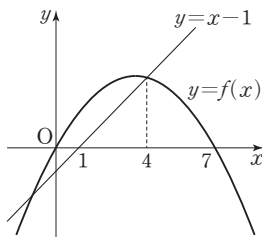
| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-1$ 이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오.

(단, $f(0)=f(7)=0, f(4)=3$) [3점]



출제 의도

로그의 정의와 로그함수의 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_3 f(x) - \log_3(x-1) \leq 0$$

$$\log_3 f(x) \leq \log_3(x-1) \text{이므로}$$

$$f(x) > 0, x-1 > 0, f(x) \leq x-1$$

(i) $f(x) > 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

$$0 < x < 7$$

(ii) $x-1 > 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

$$x > 1$$

(iii) $f(x) \leq x-1$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

$$x > 1 \text{일 때 } x \geq 4$$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

$$4 \leq x < 7$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4+5+6=15$$

답 15

22

▶ 21054-0022

방정식 $\log_3(4x+11)=1+2\log_3(x+1)$ 의 해를 a 라 할 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

23

▶ 21054-0023

x 에 대한 방정식

$$\log_2(x+3) + \log_2(5-x) = a$$

가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a 의 최댓값을 구하시오.

24

▶ 21054-0024

함수

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & (x \leq 2) \\ x-2 & (2 < x \leq 8) \\ -x+14 & (x > 8) \end{cases}$$

에 대하여 부등식

$$\log_{\frac{1}{2}}[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}] \geq -5$$

를 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는?

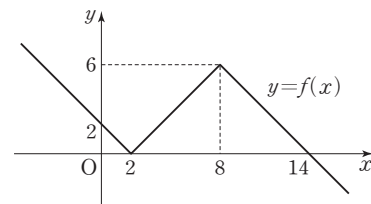
① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12



유형 9 지수함수와 로그함수의 관계

출제유형 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 활용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프, 지수의 성질과 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

함수 $y=2^x+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 m 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

(출제 의도)

지수함수, 로그함수의 그래프와 두 함수의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $y=2^x+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$$y=2^{x-m}+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $y=\log_2 8x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$$y=\log_2 8(x-2) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

함수 $\textcircled{1}$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 함수 $\textcircled{2}$ 의 역함수이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2^{x-m}=y-2$$

$$x-m=\log_2 (y-2)$$

$$x=\log_2 (y-2)+m$$

x, y 를 서로 바꾸면

$$y=\log_2 (x-2)+m$$

$$=\log_2 (x-2)+\log_2 2^m$$

$$=\log_2 2^m (x-2)$$

이 함수가 $\textcircled{2}$ 과 같아야 하므로

$$2^m=8$$

따라서 $m=3$

답 ③

25

▶ 21054-0025

두 함수 $f(x)=\log_9 (x-3)+2$, $g(x)=3^{ax-4}+b$ 가 있다. 3보다 큰 모든 실수 x 에 대하여 $(g \circ f)(x)=x$ 가 성립할 때, $2a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

26

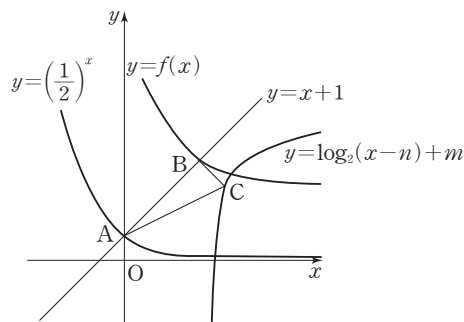
▶ 21054-0026

함수 $f(x)=\begin{cases} 4^x & (x<0) \\ \log_3 (x+1)+1 & (x\geq 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\left|g\left(\frac{1}{16}\right)\right|=|g(a)|$ 를 만족시키는 자연수 a 의 값을 구하시오.

27

▶ 21054-0027

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일치한다. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점 A는 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x+1$ 의 교점 B로 이동된다. 또 점 B를 지나고 기울기가 -1 인 직선과 함수 $y=\log_2 (x-n)+m$ 의 그래프의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 양의 실수이다.)



유형 10 지수함수와 로그함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 주어진 범위에서 지수함수와 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 밑의 범위에 따른 지수함수와 로그함수의 증가와 감소를 이해하여 주어진 구간에서 지수함수 또는 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

$1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 의 최댓값은? [3점]

- ① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

(출제 의도)

주어진 범위에서 지수함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 은 $1 \leq x \leq 3$ 에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값을 갖는다.
 따라서 $1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은
 $f(1) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 2$

답 ②

28

▶ 21054-0028

단한구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x) = \log_2 \left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $(2^M)^m$ 의 값은?

- ① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$
 ④ $\frac{10}{27}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

29

▶ 21054-0029

정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ 인 함수 $f(x) = 2 \times \left(\frac{a}{a+1}\right)^x$ 의 최댓값이 72일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은? (단, a 는 양수이다.)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

30

▶ 21054-0030

정의역이 $\left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 16\right\}$ 인 함수 $f(x) = \log_{(a+1)} x$ 의 최댓값이 2가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은?

(단, $a > -1$, $a \neq 0$)

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
 ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

1 일반각과 호도법

(1) 일반각 : 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 각의 크기 중 하나를 α° 라 할 때, $\theta = 360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (n 은 정수)로 나타내어지는 각 θ 를 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

(2) 육십분법과 호도법

$$\textcircled{1} 1\text{라디안} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\textcircled{2} 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{라디안}$$

(3) 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r 이고 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$\textcircled{1} l = r\theta$$

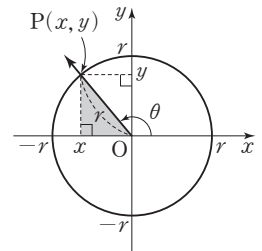
$$\textcircled{2} S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

2 삼각함수

(1) 삼각함수의 정의

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r 인 원 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하고, x 축의 양의 방향을 시초선으로 하는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라고 할 때, θ 에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$



(2) 삼각함수 사이의 관계

$$\textcircled{1} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\textcircled{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

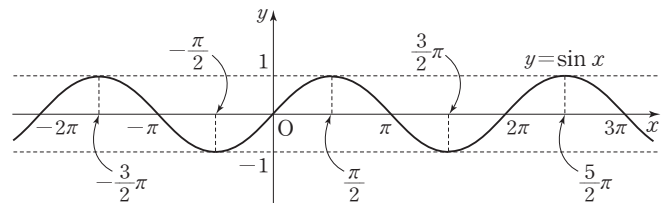
3 삼각함수의 그래프

(1) 사인함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $\sin(-x) = -\sin x$ 이다.

③ 주기가 2π 인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$ (n 은 정수)이다.

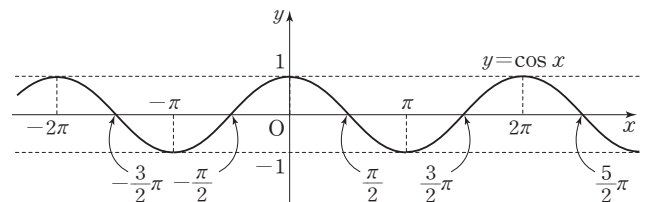


(2) 코사인함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.

② 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $\cos(-x) = \cos x$ 이다.

③ 주기가 2π 인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$ (n 은 정수)이다.



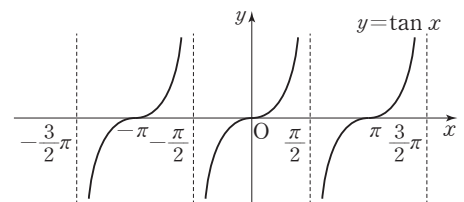
(3) 탄젠트함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 성질

① 정의역은 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)인 모든 실수 x 에 대하여 $\tan(-x) = -\tan x$ 이다.

③ 주기가 π 인 주기함수이다. 즉, $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)인 모든 실수 x 에 대하여 $\tan(n\pi + x) = \tan x$ (n 은 정수)이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.



4 삼각함수의 성질

(1) $\pi \pm x$ 의 삼각함수

$$\textcircled{1} \sin(\pi+x)=-\sin x, \sin(\pi-x)=\sin x$$

$$\textcircled{2} \cos(\pi+x)=-\cos x, \cos(\pi-x)=-\cos x$$

$$\textcircled{3} \tan(\pi+x)=\tan x, \tan(\pi-x)=-\tan x$$

(2) $\frac{\pi}{2} \pm x$ 의 삼각함수

$$\textcircled{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x, \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\textcircled{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x, \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

$$\textcircled{3} \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}, \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$$

5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

(1) 방정식의 활용 : 방정식 $2\sin x=1$, $-2\sin x=1$ 과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ (k 는 실수)의 꼴로 변형한다.

② 주어진 범위에서 함수 $y=\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 를 그린다.

③ 두 그래프의 교점의 x 좌표를 구한다.

(삼각함수 $\cos x$, $\tan x$ 에 대한 방정식도 $\sin x$ 에 대한 방정식과 같은 방법으로 해결한다.)

(2) 부등식의 활용 : 부등식 $2\sin x>1$, $2\sin x<-1$ 과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 부등식을 $\sin x>k$ ($\sin x<k$, k 는 실수)의 꼴로 변형한다.

② 주어진 범위에서 함수 $y=\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 를 그린다.

③ 두 그래프의 교점의 x 좌표를 구한다.

④ $\sin x>k$ ($\sin x<k$)의 해는 함수 $y=\sin x$ 의 그래프가 직선 $y=k$ 보다 위쪽(아래쪽)에 있는 x 의 값의 범위를 구한다.

(삼각함수 $\cos x$, $\tan x$ 에 대한 부등식도 $\sin x$ 에 대한 부등식과 같은 방법으로 해결한다.)

6 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

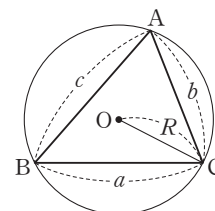
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

참고 사인법칙을 변형하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(1) a=2R \sin A, b=2R \sin B, c=2R \sin C$$

$$(2) \sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$$

$$(3) a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$



7 코사인법칙

삼각형 ABC에서

$$(1) a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$$

$$(2) b^2=c^2+a^2-2ca \cos B$$

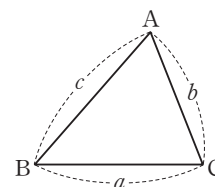
$$(3) c^2=a^2+b^2-2ab \cos C$$

참고 코사인법칙을 변형하면 다음과 같다.

$$(1) \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$(2) \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

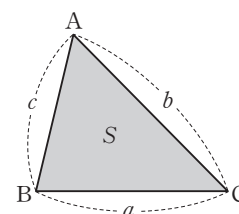
$$(3) \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$



8 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ab \sin C=\frac{1}{2}bc \sin A=\frac{1}{2}ca \sin B$$



유형 1 부채꼴의 호의 길이와 넓이

출제유형 | 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

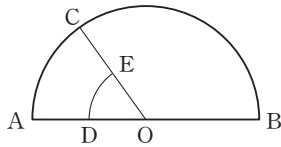
출제유형잡기 | 부채꼴의 반지름의 길이 r 와 중심각의 크기 θ 를 알 때 부채꼴의 호의 길이 l 과 넓이 S 는 다음 공식을 이용하여 구한다.

(1) $l = r\theta$

(2) $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

필수 유형

그림과 같이 중심이 O인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 호 BC의 길이는 호 AC의 길이의 2배이고 두 선분 OA, OC의 중점을 각각 D, E라 하자. 부채꼴 OCB의 넓이가 12π 일 때, 부채꼴 ODE의 호 DE의 길이는?



- ① $\frac{2}{3}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$
 ④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

출제 의도

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\widehat{AC} : \widehat{BC} = 1 : 2$ 이므로 두 부채꼴 OCB, ODE의 중심각의 크기는 각각 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{\pi}{3}$ 이다.

부채꼴 OCB의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$$

$$r^2 = 36 \text{에서 } r = 6$$

따라서 호 DE의 길이는

$$\frac{6}{2} \times \frac{\pi}{3} = \pi$$

답 ②

01

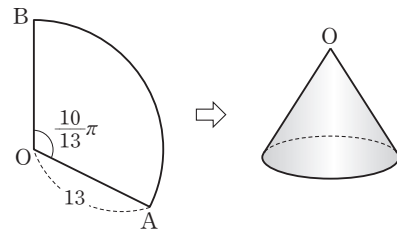
▶ 21054-0031

호의 길이가 2π , 넓이가 10π 인 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라 할 때, $\frac{r\pi}{\theta}$ 의 값을 구하시오.

02

▶ 21054-0032

그림과 같이 반지름의 길이가 13, 중심각의 크기가 $\frac{10}{13}\pi$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 이 부채꼴을 선분 OA와 선분 OB가 맞닿아 만든 원뿔 모양의 용기의 부피는?

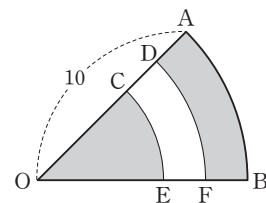


- ① 80π ② 90π ③ 100π
 ④ 110π ⑤ 120π

03

▶ 21054-0033

그림과 같이 반지름의 길이가 10인 부채꼴 모양의 텃밭이 있다. 선분 OA, OB 위에 각각 두 점 C, D와 E, F를 잡아 두 부채꼴 OCE, ODF의 호 CE, DF를 양 끝으로 하는 통로를 만들려고 한다. 두 선분 OC, DA의 길이는 각각 자연수이고 색칠한 두 영역의 넓이는 서로 같다. 세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π 일 때, 통로 CEFD의 넓이는? (단, $\overline{OC} = \overline{OE}$, $\overline{OD} = \overline{OF}$)



- ① $\frac{5}{2}\pi$ ② $\frac{11}{4}\pi$ ③ 3π
 ④ $\frac{13}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

유형 2 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계

출제유형 | 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

- (1) 각 θ 를 나타내는 동경과 반지름의 길이가 r 인 원의 교점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

- (2) 삼각함수 사이의 관계

① $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

② $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

필수 유형

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값은?

- ① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$
 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

출제 의도

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로 } 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

따라서

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

답 ①

04

▶ 21054-0034

좌표평면에서 시초선을 원점에서 x 축의 양의 방향으로 잡을 때, 각 θ 를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원이 만나는 점의 좌표가 (a, b) 이다.

$\sin \theta \times \tan \theta = \frac{5}{6}$ 일 때, $a + b^2$ 의 값을 구하시오.

05

▶ 21054-0035

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이고 $\frac{\tan \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\tan \theta}{1 + \cos \theta} = -8$ 일 때,

$(2 \sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta + 2 \cos \theta)^2$ 의 값은?

- ① $5 - \sqrt{15}$ ② $5 - \frac{\sqrt{15}}{2}$ ③ 5
 ④ $5 + \frac{\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $5 + \sqrt{15}$

06

▶ 21054-0036

양수 θ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin \theta \tan \theta < 0$, $\cos \theta \tan \theta > 0$

(나) 좌표평면에서 각 θ 를 나타내는 동경과 3θ 를 나타내는 동경이 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

θ 의 최솟값을 α 라 할 때, $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\tan \alpha}$ 의 값은? (단, 좌표평면에서 시초선은 원점에서 x 축의 양의 방향으로 정한다.)

- ① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0
 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

유형 3 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질

출제유형 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구하는 문제나 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수의 그래프에서 주기, 최댓값과 최솟값, 그래프가 지나는 점을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구하거나 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(1) $\pi \pm x$ 의 삼각함수

- ① $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$
- ② $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$
- ③ $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$

(2) $\frac{\pi}{2} \pm x$ 의 삼각함수

- ① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
- ② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
- ③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

$\sin \frac{7}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

출제 의도

사인함수의 주기를 이해하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\sin \frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ⑤

07

▶ 21054-0037

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 일 때,

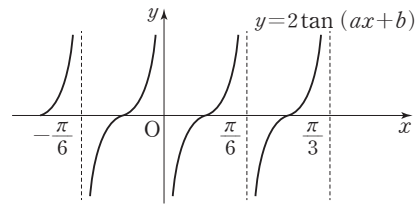
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi-\theta)} \text{의 값은?}$$

- ① -7 ② -5 ③ -3
- ④ 5 ⑤ 7

08

▶ 21054-0038

다음 그림은 함수 $y=2\tan(ax+b)$ 의 그래프의 일부분이다. ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이고 $a>0$, $0<b<\pi$ 이다.)

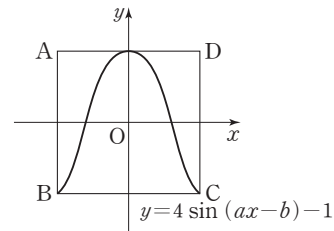


- ① π ② 2π ③ 3π
- ④ 4π ⑤ 5π

09

▶ 21054-0039

그림과 같이 좌표평면에 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 모든 변이 x 축 또는 y 축과 평행하고 두 대각선의 교점이 원점 O가 되도록 놓여 있다. 함수 $y=4\sin(ax-b)-1$ 의 그래프가 선분 AD의 중점에서만 선분 AD에 접하고 두 꼭짓점 B, C를 지나도록 하는 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{\pi}$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{11}{9}$ ② $\frac{25}{18}$ ③ $\frac{14}{9}$
- ④ $\frac{31}{18}$ ⑤ $\frac{17}{9}$

유형 4 삼각함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 성질 그리고 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 의 그래프의 성질을 이용하여 삼각함수 또는 삼각함수를 포함한 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

실수 k 에 대하여 함수

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m 이다. $k+m$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
 ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

출제 의도

사인함수의 치역을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k \text{에서}$$

$$x - \frac{3}{4}\pi = \theta \text{라 하면 } x = \theta + \frac{3}{4}\pi, x - \frac{\pi}{4} = \theta + \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) &= \cos^2 \theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + k \\ &= \cos^2 \theta + \sin \theta + k \\ &= 1 - \sin^2 \theta + \sin \theta + k \\ &= -\left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

모든 실수 θ 에 대하여 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로

함수 $f\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right)$ 는 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $k + \frac{5}{4}$ 를 갖는다.

이때 최댓값이 3이므로 $k + \frac{5}{4} = 3$ 에서 $k = \frac{7}{4}$

또 함수 $f\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right)$ 는 $\sin \theta = -1$ 일 때 최솟값 $k - 1$ 을 가지므로

$$m = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } k+m = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

답 ③

10

▶ 21054-0040

함수 $f(x) = a \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + b$ 에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이고 $a > 0$ 이다.)

11

▶ 21054-0041

실수 k 에 대하여 함수 $f(x) = \left|3 \sin \frac{x}{2} + k\right| - 2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m = 5$ 가 되도록 하는 모든 실수 k 의 집합의 합을 구하시오.

12

▶ 21054-0042

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 5 \cos^2 x + 4 \sin x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

유형 5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

출제유형 | 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식을 푸는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 의 그래프와 직선의 교점이나 위치 관계를 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

$0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 이차방정식

$$6x^2 + (4 \cos \theta)x + \sin \theta = 0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ 의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$ 이다. $3\alpha + \beta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$
 ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

출제 의도

이차방정식의 판별식을 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이차방정식 $6x^2 + (4 \cos \theta)x + \sin \theta = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 \cos^2 \theta - 6 \sin \theta < 0$$

$$2(1 - \sin^2 \theta) - 3 \sin \theta < 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 > 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) > 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{이므로}$$

$$\sin \theta + 2 > 0$$

$$\text{즉, } 2 \sin \theta - 1 > 0 \text{에서 } \sin \theta > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \text{이므로 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{따라서 } 3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

답 ④

13

▶ 21054-0043

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식

$$1 - 2 \sin^2 x = \cos x$$

의 서로 다른 실근의 개수를 n , 가장 큰 실근을 α 라 할 때, $n\alpha$ 의 값은?

- ① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π
 ④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

14

▶ 21054-0044

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \tan 2x = 0$$

의 모든 실근의 합은?

- ① 2π ② 3π ③ 4π
 ④ 5π ⑤ 6π

15

▶ 21054-0045

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식

$$2 \sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right) < 0 \text{의 해가 } \alpha < x < \beta \text{일 때,}$$

$4\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π
 ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

유형 6 사인법칙

출제유형 | 삼각함수의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기, 외접원의 반지름의 길이 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

가 성립함을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서

$\sin B = \frac{7}{10}$ 일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

- ① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

출제 의도

사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \times 15$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= 2 \times 15 \times \sin B \\ &= 2 \times 15 \times \frac{7}{10} \\ &= 21\end{aligned}$$

답 ③

16

▶ 21054-0046

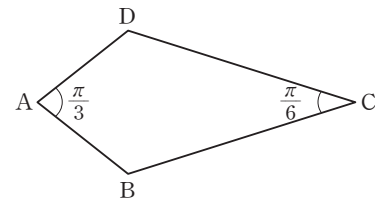
반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서
 $4 \sin(A+C) \sin B = 3$ 일 때, 선분 AC의 길이는?

- ① $2\sqrt{5}$ ② 5 ③ $\sqrt{30}$
④ $\sqrt{35}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

17

▶ 21054-0047

그림과 같이 $A = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{6}$ 인 사각형 ABCD에서 세 점 A, B, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_1 , 세 점 B, C, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_2 라 할 때, $\frac{R_2}{R_1}$ 의 값은?



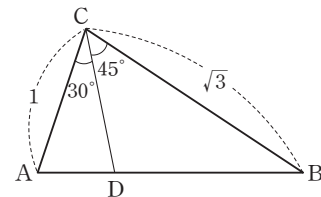
- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

18

▶ 21054-0048

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$ 이다. 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle ACD = 30^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$ 일 때,

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$ 의 값은?



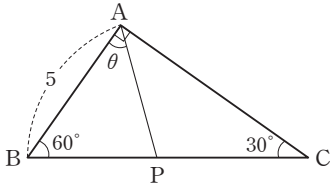
- ① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

19

▶ 21054-0049

그림과 같이 $A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$ 이고 $\overline{AB}=5$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$ 라 할 때, $\frac{\overline{BP}}{\sin \theta}$ 의 최솟값을 구하시오.

(단, $0^\circ < \theta < 90^\circ$)

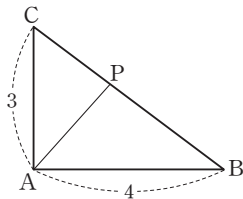


20

▶ 21054-0050

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$ 인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 외접원의 넓이를 S_1 , 삼각형 APC의 외접원의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 : S_2$ 는?

(단, $\overline{PB} > 0$, $\overline{PC} > 0$)



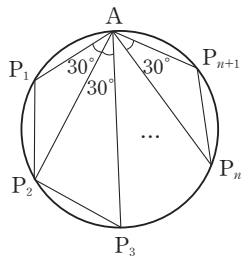
- ① 3 : 2 ② 4 : 3 ③ 9 : 4
④ 16 : 9 ⑤ 36 : 25

21

▶ 21054-0051

그림과 같이 반지름의 길이가 R 인 원이 있다. 원 위의 한 점 A를 꼭짓점으로 하고, 점 A에서의 내각이 30° 인 삼각형을 원에 내접하여 한 변 또는 두 변이 서로 겹치도록 최대한 붙였을 때, 삼각형들의 꼭짓점들을 점 A로부터 시계바늘이 도는 반대 방향으로 차례대로 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, P_{n+1}$ 이라 하자.

$\sum_{k=1}^n \overline{P_k P_{k+1}} = 6(2 + \sqrt{3})$ 일 때, 원의 반지름의 길이 R 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

유형 7 코사인법칙

출제유형 | 삼각함수의 성질과 코사인법칙을 이용하여 삼각함수의 값이나 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 일 때

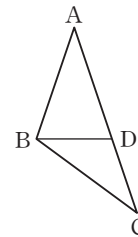
- (1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$
(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

필수 유형

| 2021학년도 대수능 9월 모의평가 |

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$ 일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

- ① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$



출제 의도

코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 6^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{57}{72} = \frac{19}{24}$$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{19}{24} \\ &= 36 + 100 - 95 \\ &= 41 \end{aligned}$$

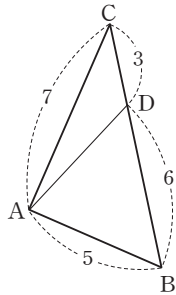
따라서 $\overline{BC} = \sqrt{41}$

답 ⑤

22

▶ 21054-0052

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=7$ 이다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=6$, $\overline{CD}=3$ 일 때, 선분 AD의 길이는?

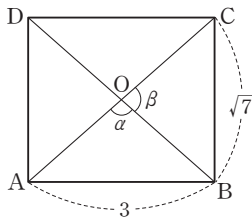


- ① $\sqrt{19}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{23}$
 ④ 5 ⑤ $3\sqrt{3}$

23

▶ 21054-0053

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{7}$ 인 직사각형 ABCD에 대하여 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O라 하자. $\angle AOB=\alpha$, $\angle BOC=\beta$ 라 할 때, $\cos \alpha + \sin \beta$ 의 값은?

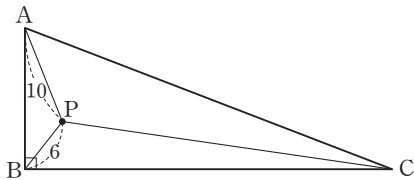


- ① $\frac{\sqrt{7}-1}{8}$ ② $\frac{2\sqrt{7}-1}{8}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}-1}{8}$
 ④ $\frac{4\sqrt{5}-1}{8}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{5}-1}{8}$

24

▶ 21054-0054

그림과 같이 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ 이고 $\overline{PA}=10$, $\overline{PB}=6$ 일 때, 선분 PC의 길이를 구하시오.

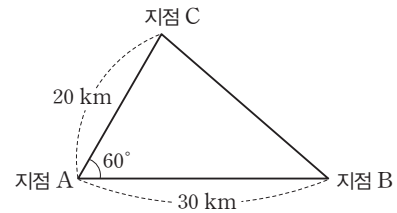


25

▶ 21054-0055

그림과 같이 $\overline{AB}=30$ km, $\overline{AC}=20$ km인 세 지점 A, B, C에 대하여 $\angle CAB=60^\circ$ 이다. 여객선 P는 지점 A에서 출발하여 지점 B를 향하여 일정한 속력으로 일직선으로 움직이고 여객선 Q는 지점 C에서 출발하여 지점 A를 향하여 여객선 P의 속력의 두 배의 속력으로 일직선으로 움직인다. 두 여객선 P, Q가 동시에 출발했을 때 두 여객선 P와 Q를 잇는 선분이 두 지점 B와 C를 잇는 선분과 평행이 되는 순간 두 여객선 사이의 거리는 $\frac{q}{p}\sqrt{7}$ km이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

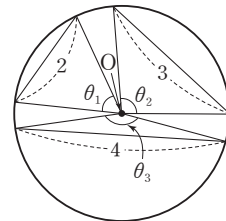


26

▶ 21054-0056

그림과 같이 원에 길이가 각각 2, 3, 4인 세 개의 현이 있다. 이 세 개의 현 각각에 대응하는 중심각의 크기를 각각 θ_1 , θ_2 , θ_3 이라 할 때, $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ 가 성립한다. $\cos \theta_1$ 의 값은?

(단, $\theta_3 < 180^\circ$ 이고 점 O는 원의 중심이다.)



- ① $\frac{15}{32}$ ② $\frac{17}{32}$ ③ $\frac{19}{32}$
 ④ $\frac{21}{32}$ ⑤ $\frac{23}{32}$

유형 8 사인법칙과 코사인법칙의 활용

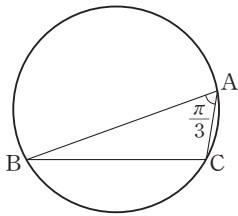
출제유형 | 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 해결하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형에서 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기 등을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2021학년도 대수능 |

$\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k 라 하자. k^2 의 값을 구하시오. [4점]



출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 7, \overline{BC} = \sin \frac{\pi}{3} \times 2 \times 7 = 7\sqrt{3} \quad \cdots \cdots ㉠$$

한편, $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 이므로

$\overline{AC} = k$ ($k > 0$)에서 $\overline{AB} = 3k$ 이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 9k^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \frac{1}{2} \\ &= 7k^2 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \overline{BC} = \sqrt{7}k \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서

$$7\sqrt{3} = \sqrt{7}k$$

$$k = \sqrt{21}$$

$$\text{이므로 } k^2 = 21$$

답 21

27

▶ 21054-0057

원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = 3$ 이고

$\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{5}$ 일 때, 이 원의 넓이는?

- ① 2π ② 3π ③ 4π
④ 5π ⑤ 6π

28

▶ 21054-0058

삼각형 ABC의 각 A, B, C가

$$\sin(B+C) \cos A = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + B\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + B\right)$$

를 만족시킬 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

(단, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ 이고 $a \neq b$ 이다.)

- ① $A = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형
② $B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형
③ $C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형
④ $a = c$ 인 이등변삼각형
⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

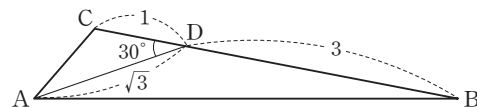
29

▶ 21054-0059

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 D에 대하여

$\overline{CD} = 1$, $\overline{BD} = 3$, $\overline{AD} = \sqrt{3}$, $\angle ADC = 30^\circ$ 일 때, 삼각형

ABC의 외접원의 반지름의 길이는?



- ① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

유형 9 삼각형의 넓이

출제유형 | 삼각함수의 성질, 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

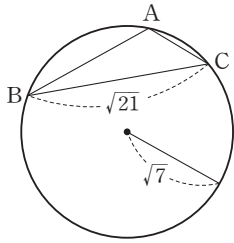
출제유형잡기 | 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 일 때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{BC}=\sqrt{21}$, $\overline{AB}=2\overline{AC}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, $A > 90^\circ$)



- ① $\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 ④ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

(출제 의도)

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{21}}{\sin A} = 2 \times \sqrt{7}, \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$A > 90^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

$\overline{AB}=2x$, $\overline{AC}=x$ ($x > 0$)으로 놓으면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{21})^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \times 2x \times x \times \cos 120^\circ$$

$$21 = 7x^2, x^2 = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2x \times x \times \sin A = x^2 \sin A$$

㉠, ㉡에서

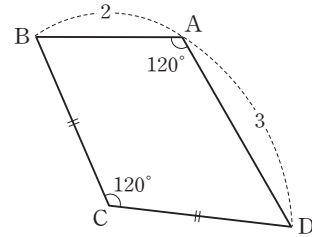
$$x^2 \sin A = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

30

▶ 21054-0060

그림과 같이 사각형 ABCD에서 $A=C=120^\circ$, $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$ 이고 $\overline{BC}=\overline{CD}$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



31

▶ 21054-0061

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $C=135^\circ$, $\overline{AB}=2\sqrt{26}$ 이고 $\overline{BC}+\overline{AC}=8+2\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

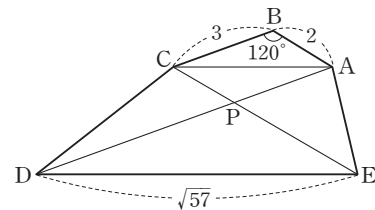


- ① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$
 ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

32

▶ 21054-0062

그림과 같이 오각형 ABCDE에서 $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$, $\angle ABC=120^\circ$ 이고 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\overline{DE}=\sqrt{57}$ 이다. 두 대각선 AD와 CE가 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PDE의 넓이는?



- ① $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

1 등차수열

(1) 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등차중항이라고 한다.

$$\text{이때 } b-a=c-b \text{이므로 } b=\frac{a+c}{2}$$

참고 일반항 a_n 이 n 에 대한 일차식 $a_n = An + B$ (A, B 는 상수, $n=1, 2, 3, \dots$)인 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $A+B$, 공차가 A 인 등차수열이다.

2 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$(1) \text{ 첫째항이 } a, \text{ 제 } n \text{항이 } l \text{일 때, } S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

$$(2) \text{ 첫째항이 } a, \text{ 공차가 } d \text{일 때, } S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

참고 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 n 에 대한 이차식 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 는 상수, $n=1, 2, 3, \dots$)인 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $A+B$, 공차가 $2A$ 인 등차수열이다.

3 등비수열

(1) 첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = ar^{n-1} \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등비중항이라고 한다.

$$\text{이때 } \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \text{이므로 } b^2 = ac$$

4 등비수열의 합

첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$(1) r=1 \text{일 때, } S_n = na$$

$$(2) r \neq 1 \text{일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

5 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} \quad (\text{단, } n=2, 3, 4, \dots)$$

6 합의 기호 Σ 의 뜻

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 을 기호 Σ 를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$\xleftarrow{\text{제 } n \text{항까지}}$
 $\xleftarrow{\text{일반항}}$
 $\xleftarrow{\text{첫째항부터}}$

7 합의 기호 Σ 의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$(1) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$(3) \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

$$(4) \sum_{k=1}^n c = cn \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

8 자연수의 거듭제곱의 합

$$(1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

9 여러 가지 수열의 합

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어져 있을 때, 두 개의 분수로 분해하는 방법, 즉

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \quad (A \neq B) \text{를 이용하여 계산한다.}$$

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} \right) \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) \quad (\text{단, } a \neq b)$$

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합으로 나타내어져 있을 때, 분모를 유리화하는 방법을 이용하여 계산한다.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+a} + \sqrt{k}} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+a} - \sqrt{k}) \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+a} + \sqrt{k+b}} = \frac{1}{a-b} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+a} - \sqrt{k+b}) \quad (\text{단, } a \neq b)$$

10 수열의 귀납적 정의

처음 몇 개의 항의 값과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 수열 $\{a_n\}$ 을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

예를 들면 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_2=2a_1=2 \times 1=2, \quad a_3=2a_2=2 \times 2=4, \quad a_4=2a_3=2 \times 4=8, \quad \dots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 4, 8, ...이다.

11 수학적 귀납법

자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

이와 같은 방법으로 모든 자연수 n 에 대하여 명제 $p(n)$ 이 참임을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

유형 1 등차수열의 뜻과 일반항

출제유형 | 등차수열의 일반항을 이용하여 공차 또는 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 첫째항과 공차를 구한 후 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = a + (n-1)d \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) 두 자연수 m, n 에 대하여

$$a_m - a_n = (m-n)d$$

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_{10} - a_7 = 6$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

(출제 의도)

등차수열의 일반항을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} a_{10} - a_7 &= (a_1 + 9d) - (a_1 + 6d) \\ &= 3d \end{aligned}$$

이므로 $3d = 6, d = 2$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + 3d \\ &= 4 + 3 \times 2 \\ &= 4 + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

답 ①

01

▶ 21054-0063

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 a_9 = -60, a_4 a_6 = 0$$

일 때, $a_3 a_7$ 의 값은?

- ① -18 ② -16 ③ -14
④ -12 ⑤ -10

02

▶ 21054-0064

2 이상의 자연수 n 에 대하여 집합

$$\{x \mid x \text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\}$$

의 서로 다른 두 원소를 더하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 A_n 이라 하고 집합 A_n 의 원소의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $A_3 = \{3, 4, 5\}$ 이므로 $a_3 = 3$ 이다. $a_n = 99$ 를 만족시키는 n 의 값은?

- ① 50 ② 51 ③ 52
④ 53 ⑤ 54

03

▶ 21054-0065

자연수 d 에 대하여 모든 항이 정수이고, 공차가 $2d$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 $|a_4| > |a_5|$ 를 만족시킬 때, $a_4 a_5$ 가 최솟값을 갖도록 하는 a_1 의 값을 $f(d)$ 라 하자. $f(2) + f(3)$ 의 값은?

- ① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

유형 2 등차수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제, 등차수열의 합을 이용하여 첫째항, 공차, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공차를 구하고 등차수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 첫째항이 a , 제 n 항이 l 일 때

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a , 공차가 d 일 때

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_5 + a_{13} = 3a_9, \sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{9}{2}$$

를 만족시킬 때, a_{13} 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

출제 의도

등차수열의 일반항과 합을 이용하여 등차수열의 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 + a_{13} = 3a_9 \text{에서}$$

$$(a + 4d) + (a + 12d) = 3(a + 8d)$$

$$a + 8d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또 } \sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{18}{2} \times (a_1 + a_{18}) = 9(2a + 17d) \text{이므로}$$

$$9(2a + 17d) = \frac{9}{2} \text{에서}$$

$$2a + 17d = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -4, d = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a_{13} = a + 12d = -4 + 12 \times \frac{1}{2} = 2$$

답 ①

04

▶ 21054-0066

두 수 $\log_3 \frac{1}{2}$ 과 $\log_3 18$ 사이에 10개의 수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 을 넣어 만든 수열이 등차수열일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

05

▶ 21054-0067

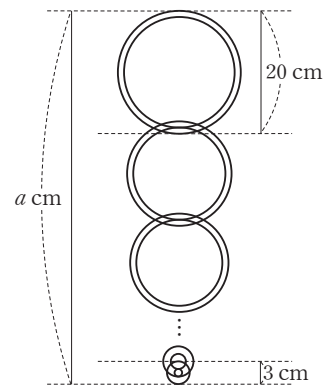
자연수 n 에 대하여 3^n 이하의 자연수 중에서 3과 서로소인 모든 자연수의 합을 a_n 이라 하자. 예를 들어, $n=2$ 일 때, $a_2=27$ 이다. $\log_3 a_{50}$ 의 값은?

- ① 95 ② 97 ③ 99
④ 101 ⑤ 103

06

▶ 21054-0068

그림과 같이 폭이 1 cm인 원형의 고리들이 연결되어 하나의 뭉치에 걸려 있다. 가장 위에 위치한 고리의 바깥 지름의 길이는 20 cm이고 각각의 고리는 바로 위의 고리보다 바깥 지름의 길이가 1 cm씩 작으며 가장 아래에 위치한 고리의 바깥 지름의 길이는 3 cm이다. 이때 가장 위에 있는 고리의 위 끝에서 가장 아래에 있는 고리의 아래 끝까지의 길이는 a cm이다. 상수 a 의 값은?



- ① 171 ② 173 ③ 175
④ 177 ⑤ 179

유형 3 등비수열의 뜻과 일반항

출제유형 | 등비수열의 일반항을 이용하여 공비나 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = ar^{n-1} \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) 두 자연수 m, n 에 대하여

$$\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n} \quad (\text{단, } a_n \neq 0, r \neq 0)$$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_6}{a_4} = \frac{1}{4}$$

일 때, $a_5 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도

등비수열의 일반항을 이용하여 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_3}{a_2} = r, \quad \frac{a_6}{a_4} = r^2 \text{이므로}$$

$$r - r^2 = \frac{1}{4}, \quad 4r - 4r^2 = 1, \quad 4r^2 - 4r + 1 = 0, \quad (2r - 1)^2 = 0$$

$$\text{즉, } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a_5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16} \text{이므로}$$

$$p+q = 16+3 = 19$$

답 19

07

▶ 21054-0069

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_3 = -\frac{5}{2}, \quad a_2 a_4 = 4$$

일 때, a_7 의 값은?

- ① -8 ② -16 ③ -32
④ -64 ⑤ -128

08

▶ 21054-0070

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을

$b_n = \log_2 a_n$ 으로 정의하자. 수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, b_{15} 의 값은?

$$(가) \quad b_3 + b_5 + b_7 = 15$$

$$(나) \quad b_4 + b_6 + b_8 = 21$$

- ① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

09

▶ 21054-0071

첫째항이 $\frac{1}{64}$ 이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n > 128$$

을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

유형 4 등비수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 합을 구하는 문제, 등비수열의 합을 이용하여 첫째항, 공비, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공비를 구하고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

첫째항이 a 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) $r=1$ 일 때, $S_n=na$

(2) $r \neq 1$ 일 때, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_1=1, \frac{S_6}{S_3}=2a_4-7$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

(i) $r=1$ 이면 $a_n=1$ 이므로

$$S_3=3 \times 1=3, S_6=6 \times 1=6 \text{에서}$$

$$\frac{S_6}{S_3}=2$$

$$2a_4-7=2 \times 1-7=-5$$

$$\text{따라서 } \frac{S_6}{S_3} \neq 2a_4-7$$

(ii) $r \neq 1$ 이면 $a_n=1 \times r^{n-1}=r^{n-1}$

이때

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{r^6-1}{r-1}}{\frac{r^3-1}{r-1}} = \frac{r^6-1}{r^3-1} = \frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}$$

$$=r^3+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또

$$2a_4-7=2r^3-7 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 이 같아야 하므로

$$r^3+1=2r^3-7$$

$$r^3=8$$

r 가 실수이므로 $r=2$

(i), (ii)에서 $a_n=2^{n-1}$ 이므로

$$a_7=2^6=64$$

10

▶ 21054-0072

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1=3, \frac{3a_3}{a_2} + \frac{a_6}{a_4} = 10$$

일 때, $a_1+a_2+a_3+\dots+a_7$ 의 값은?

- ① 376 ② 381 ③ 386
④ 391 ⑤ 396

11

▶ 21054-0073

함수 $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\dots+x+\sqrt{2}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=(f \circ f)(x)$ 라 할 때, $g(0)$ 의 값은?

- ① $58+30\sqrt{2}$ ② $60+31\sqrt{2}$ ③ $62+32\sqrt{2}$
④ $64+33\sqrt{2}$ ⑤ $66+34\sqrt{2}$

12

▶ 21054-0074

첫째항이 1이고 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 k 는 다음 조건을 만족시킨다. 이때 $r+k$ 의 값은?

$$(가) \ a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2k-1}=85$$

$$(나) \ a_2+a_4+a_6+\dots+a_{2k}=170$$

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

유형 5 등차중항과 등비중항

출제유형 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제에서는 등차중항 또는 등비중항의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$$2b = a + c$$

가 성립한다.

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이루면

$$b^2 = ac$$

가 성립한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0$$

이 서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha < \beta$)를 갖고, 세 수 $1, \alpha, \beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

출제 의도

등차중항의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0 \text{에서 } (x-4)(x-n+4) = 0$$

$$x=4 \text{ 또는 } x=n-4$$

한편, 세 수 $1, \alpha, \beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\alpha = \beta + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $\alpha=4, \beta=n-4$ 인 경우

$$\alpha < \beta \text{이므로 } 4 < n-4 \text{에서 } n > 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 8 = (n-4) + 1$$

$$\text{즉, } n = 11$$

(ii) $\alpha=n-4, \beta=4$ 인 경우

$$\alpha < \beta \text{이므로 } n-4 < 4 \text{에서 } n < 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2(n-4) = 4 + 1$$

$$\text{즉, } n = \frac{13}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n 의 값은 11이다.

답 ③

13

▶ 21054-0075

두 양수 a, b 에 대하여 세 수 $16, 16^a, 32^b$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $\log 5, \log 2a, \log b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $a+b$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{11}{5}$
④ $\frac{13}{5}$ ⑤ 3

14

▶ 21054-0076

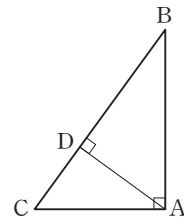
두 자연수 a, b ($a > b$)에 대하여 세 수 $a, b, a-b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $a^2, 12, (a-b)^2$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $a+b$ 의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

15

▶ 21054-0077

그림과 같이 $\angle A$ 가 직각인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\sin C$ 의 값은?



- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

유형 6 수열의 합과 일반항 사이의 관계

출제유형 | 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구하거나 일반항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 수열의 합과 일반항 사이의 관계

$$a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} \quad (\text{단, } n=2, 3, 4, \dots)$$

를 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = 3$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

(출제 의도)

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} S_6 - S_2 &= a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 7r^2 + 7r^3 + 7r^4 + 7r^5 \\ &= 7r^2(1 + r + r^2 + r^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_9 - S_5 &= a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ &= 7r^5 + 7r^6 + 7r^7 + 7r^8 \\ &= 7r^5(1 + r + r^2 + r^3) \end{aligned}$$

이때

$$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = \frac{7r^5(1 + r + r^2 + r^3)}{7r^2(1 + r + r^2 + r^3)} = r^3$$

이므로

$$r^3 = 3$$

$$\text{따라서 } a_7 = 7r^6 = 7 \times (r^3)^2 = 7 \times 3^2 = 63$$

답 63

16

▶ 21054-0078

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\log_2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = n + 2$$

를 만족시킬 때, a_6 의 값은?

- ① 125 ② 128 ③ 131
④ 134 ⑤ 137

17

▶ 21054-0079

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$a_1 + a_4 = 14$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n = 2n^2 + k$ 를 만족시키는 상수 k 가 존재한다. k 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

18

▶ 21054-0080

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = na_n$ 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$

의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일

때, $a_1 + a_{2021}$ 의 값은?

- ① 2021 ② 2022 ③ 2023
④ 2024 ⑤ 2025

유형 7 합의 기호 Σ 의 뜻과 성질

출제유형 | 합의 기호 Σ 의 뜻과 성질을 이용하여 수열의 합을 구하거나 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$ 에서 합의 기호 Σ 가 포함된 문제는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) Σ 의 뜻

$$\textcircled{1} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \quad (\text{단, } 2 \leq m \leq n)$$

(2) Σ 의 성질

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^n c = cn \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = 28, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k (a_k + 1) = 16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

합의 기호 Σ 의 뜻과 성질을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = 28 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = \sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 + 2a_k + 1\} = \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 10$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 10 = 28$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \sum_{k=1}^{10} a_k (a_k + 1) = 16 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k (a_k + 1) = \sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 + a_k\} = \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}$ 을 하면

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 = 14$$

19

▶ 21054-0081

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 수열 $\{c_n\}$ 을 $c_n = 3a_n + b_n + 8$ 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합이 40이고 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합이 60일 때, 수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합을 구하시오.

20

▶ 21054-0082

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_{16} = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{15} k(a_k - a_{k+1}) = 100$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$ 의 값은?

- ① 101 ② 103 ③ 105
④ 107 ⑤ 109

21

▶ 21054-0083

다음 조건을 만족시키는 두 정수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

임의의 두 자연수 m, n ($m < n$)에 대하여 m 과 n 사이에 있는 유리수 중 분모가 8인 모든 기약분수의 합은 $am^2 + bn^2$ 이다.

- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

유형 8 자연수의 거듭제곱의 합

출제유형 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 Σ 의 공식을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 Σ 의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

필수 유형

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = \sum_{k=1}^n 2k(n+1-k)$$

일 때, a_8 의 값은?

- ① 240 ② 250 ③ 260
④ 270 ⑤ 280

출제 의도

자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 Σ 의 공식을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned} a_8 &= \sum_{k=1}^8 2k(8+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^8 (18k - 2k^2) \\ &= 18 \times \frac{8 \times 9}{2} - 2 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \\ &= 648 - 408 = 240 \end{aligned}$$

답 ①

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n 2k(n+1-k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \{(n+1)k - k^2\} \\ &= 2(n+1) \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 2(n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{3} \{3(n+1) - (2n+1)\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

따라서

$$a_8 = \frac{8 \times 9 \times 10}{3} = 240$$

22

▶ 21054-0084

$\sum_{k=1}^{22} |10-k| + \sum_{k=1}^{22} (k-10)$ 의 값은?

- ① 144 ② 148 ③ 152
④ 156 ⑤ 160

23

▶ 21054-0085

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = (-1)^{n+1}n^2$ 이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^6 S_{2k}$ 의 값은?

- ① -201 ② -203 ③ -205
④ -207 ⑤ -209

24

▶ 21054-0086

삼차방정식 $x^3 + x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 세 근 중 무리수인 것을 α, β 라 할 때,

$$\begin{aligned} &(\alpha-1)(\beta-1) + (\alpha-2)(\beta-2) + (\alpha-3)(\beta-3) \\ &\quad + \cdots + (\alpha-10)(\beta-10) \end{aligned}$$

의 값은?

- ① 435 ② 445 ③ 455
④ 465 ⑤ 475

유형 9 여러 가지 수열의 합

출제유형 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형하여 수열의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형할 때에는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} \right) \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) \quad (\text{단, } a \neq b)$$

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+a} + \sqrt{k}} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+a} - \sqrt{k}) \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+a} + \sqrt{k+b}} = \frac{1}{a-b} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+a} - \sqrt{k+b}) \quad (\text{단, } a \neq b)$$

필수 유형

| 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

n 이 자연수일 때, x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-1) = 0$$

의 두 근을 α_n, β_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n}}$ 의 값을 구하시오.

[4점]

출제 의도

합의 기호 Σ 를 포함하고 있는 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이차방정식 $x^2 - (2n-1)x + n(n-1) = 0$ 에서

$$(x-n)(x-n+1) = 0$$

$$x = n \text{ 또는 } x = n-1$$

$$\text{즉, } \alpha_n = n, \beta_n = n-1 \text{ 또는 } \alpha_n = n-1, \beta_n = n$$

$$\sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n}} = \sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{81} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= (\sqrt{1} - 0) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{80})$$

$$= \sqrt{81} - 0 = 9$$

답 9

25

▶ 21054-0087

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_1 = 5$

이고 $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{6}$ 일 때, S_{11} 의 값은?

(단, 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n \neq 0$ 이다.)

① 30

② 32

③ 34

④ 36

⑤ 38

26

▶ 21054-0088

공차가 2이고 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^8 \frac{1}{a_{2k-1} a_{2k+1}} = \frac{1}{18}$ 일 때, a_{20} 의 값은?

① 40

② 42

③ 44

④ 46

⑤ 48

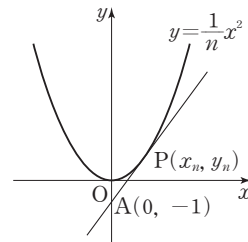
27

▶ 21054-0089

그림과 같이 자연수 n 에 대하여 점 $A(0, -1)$ 에서 함수

$y = \frac{1}{n}x^2$ 의 그래프에 그은 기울기가 양수인 접선의 접점을

$P(x_n, y_n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} \frac{y_n}{x_n + x_{n+1}}$ 의 값은?



① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

유형 10 수열의 귀납적 정의

출제유형 | 주어진 항의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 첫째항 a_1 의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식에서 n 대신에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하여 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$ 에서 $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때

(1) 등차수열

$$\textcircled{1} a_{n+1} - a_n = d \text{ (일정)} \Rightarrow \text{공차가 } d \text{인 등차수열}$$

$$\textcircled{2} a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \text{ 또는 } 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

(2) 등비수열

$$\textcircled{1} a_{n+1} \div a_n = r \text{ (일정)} \Rightarrow \text{공비가 } r \text{인 등비수열 (단, } a_n \neq 0 \text{)}$$

$$\textcircled{2} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ 또는 } (a_{n+1})^2 = a_n \times a_{n+2} \text{ (단, } a_n a_{n+1} \neq 0 \text{)}$$

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1} = 2a_n + 1 \\ a_{3n} = -a_n + 2 \\ a_{3n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

(출제 의도)

귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$a_1=1 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_1 + 1 = 2$$

$$a_4=2 \text{이므로}$$

$$a_{11} = 2a_4 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_{12} = -a_4 + 2 = -2 + 2 = 0$$

$$a_{13} = a_4 + 1 = 2 + 1 = 3$$

따라서

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 + 0 + 3 = 8$$

답 ③

28

▶ 21054-0090

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=6$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n \geq 0) \\ a_n + 9 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{50} a_k$ 의 값은?

- ① 79 ② 81 ③ 83
④ 85 ⑤ 87

29

▶ 21054-0091

$a_1=b_1=2$ 인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 2a_n, b_{n+1} = b_n + 2$$

를 만족시킨다. 부등식 $\frac{a_n}{2^{b_n}} > \frac{1}{1024}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

30

▶ 21054-0092

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 \neq 5$, $a_7 = a_8 = 8$ 이고 다음 조건을 만족시키는 자연수 p 가 존재한다.

$$\text{모든 자연수 } n \text{에 대하여 } a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = p \text{이다.}$$

$\sum_{k=1}^6 a_k$ 의 값은?

- ① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

유형 11 다양한 수열의 규칙 찾기

출제유형 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 나열하여 수열의 규칙을 찾는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 구하여 규칙을 찾아 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=9$, $a_2=3$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$ 을 만족시키는 100 이하의 자연수 k 의 개수를 구하시오. [3점]

(출제 의도)

주어진 조건에 따라 나열되는 수의 규칙을 찾아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$a_1=9$, $a_2=3$ 이고

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ 에서 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$n=1$ 일 때, $a_3=a_2-a_1=-6$

$n=2$ 일 때, $a_4=a_3-a_2=-9$

$n=3$ 일 때, $a_5=a_4-a_3=-3$

$n=4$ 일 때, $a_6=a_5-a_4=6$

$n=5$ 일 때, $a_7=a_6-a_5=9$

$n=6$ 일 때, $a_8=a_7-a_6=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6이 반복되므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=a_{n+6}$ 이 성립한다.

이때 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$ 을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6 \times 16 + 4$ 이므로

구하는 100 이하의 자연수 k 의 개수는

$$16 \times 2 + 1 = 33$$

답 33

31

▶ 21054-0093

자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 을

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ -n^2 & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

라 하고 $a_n=f(n)+f(n+1)$ 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{50} a_k$ 의 값은?

① 40

② 45

③ 50

④ 55

⑤ 60

32

▶ 21054-0094

수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $S_{40}=25$ 이고 $S_{65}=19$ 이다. a_1+a_2 의 값은?

① -5

② -7

③ -9

④ -11

⑤ -13

33

▶ 21054-0095

자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1 의 좌표는 (12, 6)이다.

(나) 점 A_n 이 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점일 때, 점 A_n 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 만나는 점을 B_n 이라 한다.

(다) 점 B_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{x}{2}$ 와 만나는 점을 A_{n+1} 이라 한다.

점 A_n 의 x 좌표와 y 좌표의 합을 a_n 이라 하자. $a_7+a_8=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

유형 12 수학적 귀납법

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 앞 뒤 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구한다.

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = (2^{2n} - 1) \times 2^{n(n-1)} + (n-1) \times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n} \quad \dots\dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)=3, (우변)=3이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2} - 1) \times \boxed{(가)} + m \times 2^{-m-1} \\ &= \boxed{(가)} \times \boxed{(나)} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때,

$\frac{g(7)}{f(3)}$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

(출제 의도)

수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 들어갈 알맞은 식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + \{2^{2(m+1)} - 1\} \times 2^{(m+1)m} + m \times 2^{-(m+1)} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2} - 1) \times \boxed{2^{m(m+1)}} + m \times 2^{-m-1} \\ &= \boxed{2^{m(m+1)}} \times \boxed{2^{2m+2}} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n} \text{이다.}$$

따라서 $f(m) = 2^{m(m+1)}$, $g(m) = 2^{2m+2}$ 이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$$

답 ④

34

▶ 21054-0096

다음은 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 \\ = \frac{n(2n^2+1)}{3} \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=2$ 일 때, (좌변)=6, (우변)=6이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2 \\ + (m-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 \\ = \frac{m(2m^2+1)}{3} \end{aligned}$$

이다.

위 등식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하여 정리하면

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2 \\ + \boxed{(가)} + (m-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 \\ = \frac{m(2m^2+1)}{3} + \boxed{(가)} \\ = \frac{m(2m+1)(m+1)}{3} + \boxed{(나)} \\ = \frac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $f(3)+g(4)$ 의 값을 구하시오.

1 함수의 수렴과 발산

- (1) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 가 아니면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 a 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 a 에 수렴한다고 한다. 이때 a 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 극한값 또는 극한이라 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow a$$

- (2) ① 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 a 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 a 에 수렴한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \text{ 또는 } x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow a$$

- ② 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 a 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 a 에 수렴한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \text{ 또는 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow a$$

- (3) ① 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 가 아니면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$ 는 양의 무한대로 발산한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

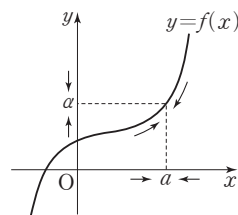
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow \infty$$

- ② 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 가 아니면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$ 는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow -\infty$$

- ③ 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



2 함수의 좌극한과 우극한

- (1) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 작은 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 a 에 한없이 가까워지면 a 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한이라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = a \text{ 또는 } x \rightarrow a- \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow a$$

또, 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 큰 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 β 에 한없이 가까워지면 β 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 우극한이라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \beta \text{ 또는 } x \rightarrow a+ \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow \beta$$

- (2) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서의 좌극한 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 와 우극한 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 가 모두 존재하고, 그 값이 서로 같으면 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다. 또한 그 역도 성립한다. 즉 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = p \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$ (단, p 는 실수)

3 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β 는 실수)일 때

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} \{kf(x)\} = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k\alpha$ (단, k 는 상수)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha + \beta$
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha - \beta$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha\beta$
- (5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

유형 1 함수의 극한값

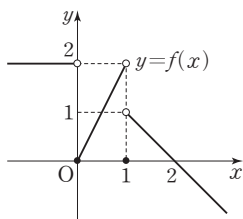
출제유형 | 함수의 식과 그래프에서 좌극한과 우극한, 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정의역의 범위에 따라 다르게 정의된 함수 또는 그래프에서 좌극한과 우극한, 극한값을 구하는 과정을 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

(출제 의도)

그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0 - 2 = -2$$

답 ①

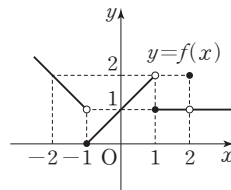
01

▶ 21054-0097

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + kf(2)$$

이다. 실수 k 의 값은?



- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

02

▶ 21054-0098

$x > -7$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+7} & (-7 < x < 1) \\ x+2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대

하여 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하고 $\lim_{x \rightarrow b+} f(x) = \infty$ 이다.

$a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

03

▶ 21054-0099

함수 $f(x) = \frac{|x-3||x-2|(x+a)}{(x-3)(x-2)}$ 에 대하여

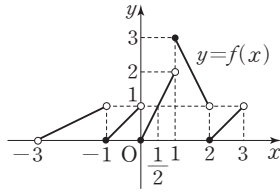
$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 10$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04

▶ 21054-0100

집합 $X = \{x \mid -3 < x < 3 \text{인 실수}\}$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



세 집합

$$A = \{a \mid \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) - 1, a \in X\},$$

$$B = \{a \mid \lim_{x \rightarrow a+} f(x) > \lim_{x \rightarrow a-} f(x), a \in X\},$$

$$C = \{a \mid \lim_{x \rightarrow a+} f(x) < \lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2, a \in X\}$$

에 대하여 집합 $C - (A \cup B)$ 는?

- ① $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\}$
 ② $\{x \mid 0 < x < 1\} \cup \{x \mid 1 < x < \frac{3}{2}\}$
 ③ $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\} \cup \{x \mid 1 < x < 2\}$
 ④ $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\} \cup \{x \mid 1 < x < \frac{5}{2}\}$
 ⑤ $\{x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}\}$

05

▶ 21054-0101

실수 전체의 집합에서 정의되어 있는 함수 $f(x)$ 가 임의의 정수 a 에 대하여 $a-1 \leq x < a$ 일 때,

$$f(x) = ax$$

이다. $\lim_{x \rightarrow (p+2)-} f(x) - \lim_{x \rightarrow p+} f(x) = 157$ 일 때, 정수 p 의 값은?

- ① 51 ② 52 ③ 53
 ④ 54 ⑤ 55

유형 2 함수의 극한에 대한 성질

출제유형 | 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수의 합, 차, 곱, 몫의 극한값을 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) = 1$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x) = a$ 이다. $20a$ 의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$g(x) = (x+1)f(x) \text{로 놓으면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

$$x \neq -1 \text{일 때, } f(x) = \frac{g(x)}{x+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ (2x^2+1) \times \frac{g(x)}{x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$$

답 30

06

▶ 21054-0102

두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x} = k$$

일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - (x+2)g(x)}{f(x)g(x) + 2g(x)} = \frac{1}{3}$ 이다. 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{17}{5}$ ③ $\frac{18}{5}$
 ④ $\frac{19}{5}$ ⑤ 4

07

▶ 21054-0103

최고차항의 계수가 1인 두 이차함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 x 축 위의 한 점 $(a, 0)$ ($a \neq 2$ 인 상수)에서만 만난다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 2g(x)\} = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$$

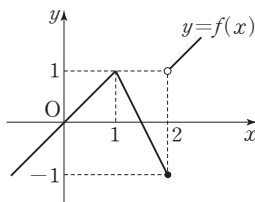
일 때, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 의 값은?

- ① 6 ② 8 ③ 10
 ④ 12 ⑤ 14

08

▶ 21054-0104

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x+1)g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x+1)$ 의 값이 모두 존재할 때, $g(5)$ 의 값을 구하시오.



유형 3 $\frac{0}{0}$ 꼴과 $0 \times \infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값을 구하는 문제와 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값은 분수 꼴의 식은 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분하고 무리식은 분모 또는 분자를 유리화하여 약분하여 해결한다.

(2) $0 \times \infty$ 꼴의 극한값은 분수 꼴의 식은 통분하여 인수분해하고 무리식은 유리화하여 해결한다.

필수 유형

| 2016학년도 대수능 |

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}$ 의 값은? [2점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

출제 의도

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2+5) \\ &= (-2)^2 + 5 = 9 \end{aligned}$$

답 ③

09

▶ 21054-0105

 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+4)+x^4-16}{x-2}$ 의 값은?

- ① 32 ② 34 ③ 36
 ④ 38 ⑤ 40

10

▶ 21054-0106

 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3+x} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{2}{x^3+x^2+x+1} \right)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

11

▶ 21054-0107

 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $g(x) = \sqrt{x+b} - 1$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 5} f(x)g(x) = \frac{1}{3}$$

 이다. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



유형 4

 $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값을 구하는 문제와 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\}$ 의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 해결하고 $\infty - \infty$ 꼴의 무리식의 극한값은 분모 또는 분자의 무리식을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

상수항과 계수가 모두 정수인 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 최댓값은? [4점]

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$$

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

출제 의도

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차 함수이고 조건 (나)에서 다항함수 $f(x)g(x)$ 는 x^2 을 인수로 가져야 하므로

$$f(x)g(x) = x^2(2x+a) \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a = -4$ 이므로

$$f(x)g(x) = 2x^2(x-2)$$

이때 $f(2)$ 가 최대가 되는 $f(x)$ 는

$$f(x) = 2x^2$$

이므로 구하는 최댓값은

$$f(2) = 2 \times 2^2 = 8$$

답 ③

12

▶ 21054-0108

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 2x^4 + 4x^3} - x^3 - x)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13

▶ 21054-0109

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 부등식

$$\frac{5}{x^2 + 10} \leq x^2 f(x) \leq \frac{5}{x^2 + 1}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 5)f(x)$ 의 값을 구하시오.

14

▶ 21054-0110

함수 $f(x) = \sum_{k=1}^{200} x^k$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3n^2}(x^{4n} + x^{3n})}{f(x)}$ 이 수렴하도록 하는 모든 자연수 n 의 개수를 구하시오.

유형 5 미정계수의 결정

출제유형 | 함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때, 미정계수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = p \quad (p \text{는 실수}) \text{일 때}$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\textcircled{2} p \neq 0 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

필수 유형

| 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$$

를 만족시킨다. $f(1) \leq 12$ 일 때, $f(2)$ 의 최댓값은? [4점]

- ① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

출제 의도

극한의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ 이므로 다항함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. ㉠

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $f(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + ax + b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + b) \\ &= 1 - a + b = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } b = a + 1$$

$$\text{이때 } f(1) = 2(1+a+b) = 2(2a+2) = 4(a+1) \leq 12, \quad a \leq 2$$

따라서

$$f(2) = 3(4+2a+b) = 3(3a+5) \leq 3(3 \times 2 + 5) = 33$$

(단, 등호는 $a=2$ 일 때 성립한다.)

이므로 $f(2)$ 의 최댓값은 33이다.

답 ③

15

▶ 21054-0111

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + ax^2 - 3x}{(x-3)(x+b)} = 12$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.)

- ① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

16

▶ 21054-0112

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2ax + a+b} = -\frac{1}{2}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.)

- ① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

17

▶ 21054-0113

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a} + \sqrt{1+a})}{\sqrt{x+b} - 2} = 16$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.)

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

18

▶ 21054-0114

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

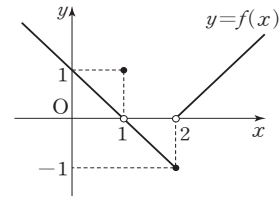
$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)f(x)}{x+2} = 0$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

- ① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

19

▶ 21054-0115

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{f(x+1)}$ 와 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x+1)}{f(x)}$ 의 값이 모두 존재할 때, $g(6)$ 의 값을 구하시오.

20

▶ 21054-0116

최고차항의 계수가 소수인 자연수 a 인 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 8$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$ 의 근이 음이 아닌 서로 다른 세 정수일 때, $a+f(5)$ 의 값은?

- ① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

유형 6 함수의 극한의 활용

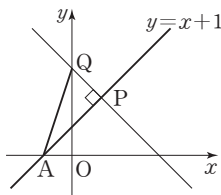
출제유형 | 좌표평면에서의 여러 도형의 선분의 길이, 도형의 넓이에 대한 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 도형에서 구하는 극한값에 관련된 선분의 길이, 도형의 넓이를 한 문자에 대한 식으로 나타내어 극한값을 구한다.

필수 유형

| 2012학년도 대수능 |

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $A(-1, 0)$ 과 $P(t, t+1)$ 이 있다. 점 P 를 지나고 직선 $y=x+1$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$ 의 값은? [3점]



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

그래프에서 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

직선 $y=x+1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로
점 $P(t, t+1)$ 을 지나고 직선 PQ 의 방정식은
 $y-(t+1) = -(x-t)$, 즉 $y = -x+2t+1$
이때 직선 PQ 가 y 축과 만나는 점이 Q 이므로 점 Q 의 좌표는
 $(0, 2t+1)$

따라서

$$\overline{AP}^2 = (t+1)^2 + (t+1)^2 = 2t^2 + 4t + 2,$$

$$\overline{AQ}^2 = 1^2 + (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 2$$

이므로

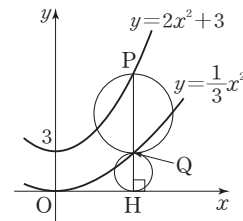
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t + 2}{2t^2 + 4t + 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}}{2 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}} = 2 \end{aligned}$$

답 ③

21

▶ 21054-0117

그림과 같이 곡선 $y=2x^2+3$ 위의 점 $P(t, 2t^2+3)$ 에서 x 축에 내린 수선이 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$ 과 만나는 점을 Q , x 축과 만나는 점을 H 라 하자. 선분 PQ 를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이를 $A(t)$, 선분 QH 를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이를 $B(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{B(t)}$ 의 값은? (단, $t > 0$)



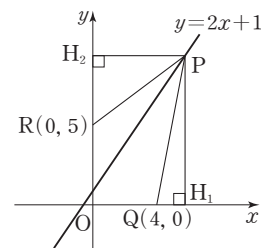
- ① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$
④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

22

▶ 21054-0118

좌표평면에 직선 $y=2x+1$ 위의 점 $P(t, 2t+1)$ 과 두 점 $Q(4, 0)$, $R(0, 5)$ 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 H_1 , H_2 라 할 때, 삼각형 PQH_1 과 삼각형 PH_2R 의 넓이를 각각 $A(t)$, $B(t)$ 라 하자.

$\lim_{t \rightarrow 4+} \frac{tA(t)}{(t-4)B(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{B(t)}$ 의 값은? (단, $t > 4$)



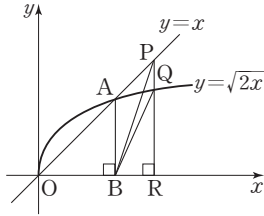
- ① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$
④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

23

▶ 21054-0119

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 와 직선 $y=x$ 가 만나는 원점이 아닌 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 $y=x$ 위의 점 $P(t, t)$ ($t>2$)에 대하여 점 P를 지나고, x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$, x 축과 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 2+} \frac{\overline{PB} - \overline{QB}}{\overline{BR} \times \overline{OR}}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)



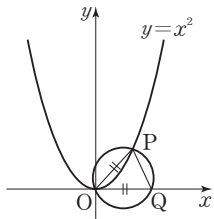
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

24

▶ 21054-0120

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(t, t^2)$ ($t>0$)에 대하여 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ 가 되도록 점 Q를 x 축의 양의 방향에 잡는다. 삼각형 POQ의 외접원의 지름의 길이를 $A(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\{A(t)\}^2}{t^4}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

유형 7 함수의 연속

출제유형 | 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이기 위한 조건을 이용하여 함수의 미정계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 정의되어 있고

(ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하며

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + a}{x - 3} & (x \neq 3) \\ b & (x = 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은?

(단, a 와 b 는 상수이다.) [4점]

- ① 1 ② 3 ③ 5
 ④ 7 ⑤ 9

(출제 의도)

함수가 연속이 될 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 을 만족시키면 된다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + a}{x - 3} = b$ 가 성립해야 하고 $x \rightarrow 3$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + a) = 9 - 15 + a = 0$ 에서 $a = 6$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1 \end{aligned}$$

따라서 $a+b=6+1=7$

답 ④

25

▶ 21054-0121

함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+a}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}} & (x \neq 0) \\ b & (x = 0) \end{cases}$$

이 $x=0$ 에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

26

▶ 21054-0122

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(x-1)f(x) = x^2 + 4x - 5 + 2g(x)$$

를 만족시킨다. $f(1) = -6$ 일 때, $f(10)$ 의 값은?

- ① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

27

▶ 21054-0123

함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+15}(1+x^{2n+1})}{x^{2n+1}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오.

28

▶ 21054-0124

함수

$$f(x) = \begin{cases} \left| -\frac{2}{x} - 2 \right| & (x < -1) \\ -x^2 + k_1 & (-1 \leq x < 1) \\ \left| \frac{2}{x} + k_2 \right| & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 연속이다.
(나) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(a)$ 라 할 때, 함수 $g(a)$ 는 $a=t$ 에서 불연속이다.

모든 실수 t 의 값의 합은? (단, k_1, k_2, a 는 실수이다.)

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

29

▶ 21054-0125

자연수 n 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & (x < 0) \\ \frac{3}{8}\left(b-\frac{3}{4}n\right)x & \left(0 \leq x < \frac{8}{3}\right) \\ 3x-8 & \left(x \geq \frac{8}{3}\right) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 p , 모든 실수 b 의 값의 합을 q 라 할 때, $q-p$ 의 값은?

- (가) 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 두 실수 a, b 에 대하여 $0 < a+b < 10$ 이다.

- ① $\frac{221}{4}$ ② $\frac{111}{2}$ ③ $\frac{223}{4}$
④ 56 ⑤ $\frac{225}{4}$

유형 8 연속함수의 성질

출제유형 | 연속함수의 합, 차, 곱, 몫의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$ 에서 연속이다.

- ① $cf(x)$ (단, c 는 상수) ② $f(x) \pm g(x)$
 ③ $f(x)g(x)$ ④ $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

필수 유형

| 2017학년도 대수능 |

두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & (x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$g(x) = ax + 1$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$
 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

출제 의도

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$x < 2 \text{ 일 때, } f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 > 0$$

$$x \geq 2 \text{ 일 때, } f(x) = 1 > 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서만 연속이 아니므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$ 에서 연속이면 된다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax+1}{x^2-4x+6} = \frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1}{1} = 2a+1$$

$$\frac{g(2)}{f(2)} = 2a+1$$

$$\text{에서 } \frac{2a+1}{2} = 2a+1 \text{ 이므로}$$

$$2a+1 = 4a+2, \quad 2a = -1$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2}$$

답 ④

30

▶ 21054-0126

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f(2) > 0, \quad g(2) = 1$$

$$(나) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)\}^2 - g(x)}{x^2 + 2f(x) + g(x)} = 3$$

$f(2) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 의 값은?

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

31

▶ 21054-0127

두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & (x \leq -1, x \geq 1) \\ x + b & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

$$g(x) = 2x + 1$$

에 대하여 함수 $f(x) + g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $3a + 2b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

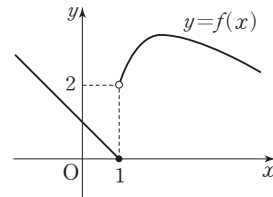
- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

32

▶ 21054-0128

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 함수

$g(x) = (x^2 + a)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이기 위한 상수 a 의 값은?

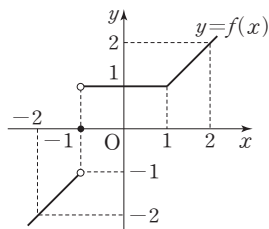


- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

33

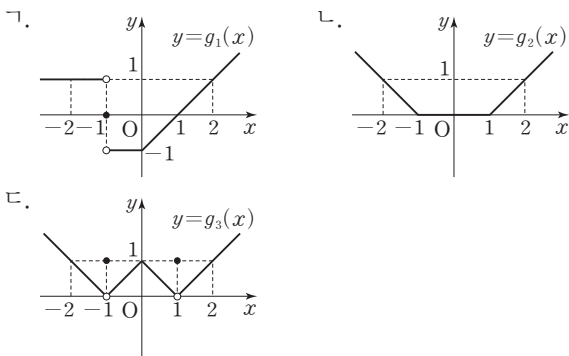
▶ 21054-0129

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



보기에 주어진 세 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ 중 함수 $y=f(x)g_k(x)$ ($k=1, 2, 3$)이 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기



- ① 가 ② 나 ③ 가, 나
④ 나, 다 ⑤ 가, 나, 다

34

▶ 21054-0130

두 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & (x < 1) \\ x^2+ax+4 & (x \geq 1) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x+2a & (x < 1) \\ -x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

- ① $-\frac{9}{2}$ ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

35

▶ 21054-0131

모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+2)$ 를 만족시키는 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (-1 \leq x < 0) \\ x^2+3 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

과 $g(x)=f(x)+(k+1)f(x+1)$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-\frac{1}{3})$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

- (가) $f(-1) > 0$
(나) 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

36

▶ 21054-0132

실수 a 에 대하여 이차함수 $y=3x^2-2ax+a$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수를 $f(a)$ 라 할 때, a 에 대한 함수 $g(a)$ 에 대하여 다음 명제가 성립한다.

- 함수 $\frac{1}{2}g(a)-8$ 이 $a=3$ 에서 연속이면
함수 $f(a)\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}$ 이 $a=3$ 에서 연속이다.

함수 $\frac{1}{2}g(a)-8$ 이 $a=3$ 에서 연속일 때, $g(3)$ 의 값을 구하시오.

유형 9 최대, 최소 정리와 사잇값의 정리

출제유형 | 최대, 최소 정리 또는 사잇값의 정리를 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,
 (1) 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
 (2) $f(a)f(b) < 0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (a, b) 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

필수 유형

사차함수 $f(x)=x^4-10x^2+a$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 a 의 최댓값을 구하시오.

방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 양의 근 1개와 음의 근 1개를 갖는다.

(출제 의도)

사잇값의 정리를 이용하여 함수의 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$f'(x)=4x^3-20x=4x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$$

열린구간 $(-\sqrt{5}, 0)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

함수 $f(x)=x^4-10x^2+a$ 에서 $f(0) > 0$ 이므로 $f(-2) < 0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, 0)$ 에서 음의 근 1개를 갖는다.

$$f(-2)f(0)=a(a-24) < 0 \text{에서}$$

$$0 < a < 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또한 열린구간 $(0, \sqrt{5})$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다. $f(0) > 0$ 이고 $f(2) < 0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 양의 근 1개를 갖는다.

$$f(2)f(0)=a(a-24) < 0 \text{에서}$$

$$0 < a < 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 에서 $0 < a < 24$

따라서 구하는 자연수 a 의 최댓값은 23이다.

답 23

37

▶ 21054-0133

삼차방정식 $x^3+ax+1=0$ 이 세 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 실근을 가지도록 하는 정수 a 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3

④ -4 ⑤ -5

38

▶ 21054-0134

$-12 \leq x \leq 12$ 에서 정의되고 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)=3$ 과 $f(x)=-3$ 을 만족시키는 x 의 값은 각각 오직 한 개씩 있다.

(나) $-12 \leq x \leq 8$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+4)$ 이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(-2)=f(2)$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 적어도 12이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

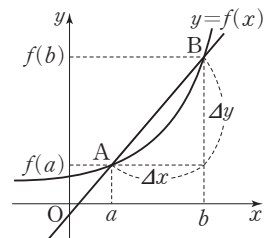
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1 평균변화율

- (1) 함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

- (2) 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.

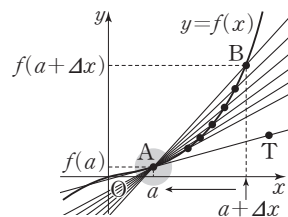


2 미분계수

- (1) 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- (2) 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기를 나타낸다.



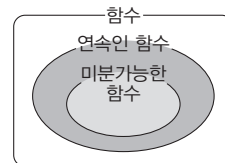
참고 (1) $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 에서 Δx 대신에 h 를 이용하여 간단히 나타낼 수 있다. 즉,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- (2) $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 점 B의 x 좌표가 a 에 한없이 가까워지므로 점 B는 곡선 $y=f(x)$ 를 따라 점 A에 한없이 가까워진다. 이때 직선 AB는 점 A를 지나는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워지는데 이 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라고 하고, 점 A는 접점이라고 한다.

3 미분가능성과 연속성

- (1) 함수 $f(x)$ 에 대하여 $x=a$ 에서 미분계수 $f'(a)$ 가 존재할 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.
 (2) 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 x 의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$ 를 미분가능한 함수라고 한다.
 (3) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.



그러나 위 명제의 역인 '함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다.'는 반드시 성립하는 것은 아니다.

참고 미분계수 $f'(a)$ 가 존재한다는 뜻은 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 가 존재한다는 것이고, 극한값

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 가 존재한다는 것은 좌극한값 $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 와 우극한값 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 가 모두 존재하고 서로 같아야 한다는 뜻이다.

4 도함수

- (1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 각각의 미분계수 $f'(x)$ 를 대응시키는 함수를 함수 $y=f(x)$ 의 도함수라 하고, 이것을 기호로 $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ 와 같이 나타낸다.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- (2) 함수 $y=f(x)$ 에서 그 도함수 $f'(x)$ 를 구하는 것을 함수 $y=f(x)$ 를 x 에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

5 미분법의 공식

(1) 함수 $y=x^n$ (n 은 양의 정수)와 상수함수의 도함수

$$① y=x^n \ (n \geq 2 \text{인 정수}) \text{이면 } y'=nx^{n-1}$$

$$② y=x \text{이면 } y'=1$$

$$③ y=c \ (c \text{는 상수}) \text{이면 } y'=0$$

(2) 함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때

$$① \{cf(x)\}'=cf'(x) \ (\text{단, } c \text{는 상수})$$

$$② \{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$

$$③ \{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$$

(3) 함수의 곱의 미분법

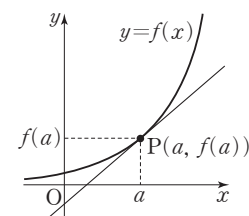
두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

6 접선의 방정식

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 와 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



7 평균값 정리

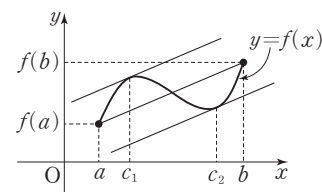
(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$ 이면 $f'(c)=0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{인 } c \text{가 } a \text{와 } b \text{ 사이에 적어도 하나 존재한다.}$$



8 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소: 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

① $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다고 한다.

(2) 함수의 증가와 감소의 판정: 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

① $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

참고 위의 명제의 역이 반드시 성립하는 것은 아니다. 함수 $f(x)=x^3$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하지만 $f'(0)=0$ 이다.

9 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소: 함수 $f(x)$ 에서

① $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대라 하고, $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다.

② $x=b$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq f(b)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극소라 하고, $f(b)$ 를 극솟값이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

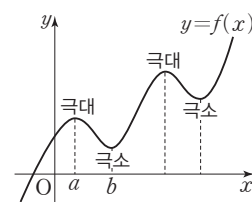
(2) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

(3) 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

① 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이다.

② 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이다.



10 함수의 그래프

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음과 같은 단계를 따르면 편리하다.

- ① 도함수 $f'(x)$ 를 구하고 $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구한다.
- ② $f'(x)$ 의 부호 변화를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고 극값을 구한다.
- ③ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 좌표축과의 교점의 좌표 등을 조사하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그린다.

11 함수의 최대와 최소

- (1) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 반드시 최댓값과 최솟값을 가지므로 다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 찾는다.
 - ① 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.
 - ② 닫힌구간 $[a, b]$ 에서의 양 끝의 함수값 $f(a)$ 와 $f(b)$ 를 구한다.
 - ③ ①, ②에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.
- (2) 함수의 최대와 최소의 활용
도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.
 - ① 주어진 조건에 따라 적당한 변수를 정하여 미지수 x 로 놓고 x 의 값의 범위를 구한다.
 - ② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 x 에 대한 함수 $f(x)$ 로 나타낸다.
 - ③ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 ①에서 구한 x 의 값의 범위에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

12 방정식의 활용

- (1) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표이다.
- (2) 방정식 $f(x)=k$ (k 는 상수)의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 점의 x 좌표이다.
- (3) 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

참고 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수는 다음과 같다.

- ① (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
- ② (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- ③ (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이면 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

13 부등식의 활용

- (1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 것을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 최솟값을 구하여 (최솟값) ≥ 0 임을 보이면 된다.
- (2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하는 것을 증명할 때에는 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하고, 주어진 구간에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값을 구하여 (최솟값) ≥ 0 임을 보이면 된다.

14 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x=f(t)$ 일 때, 점 P의 시각 t 에서의 속도 v 와 가속도 a 는

$$(1) v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$(2) a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

유형 1 미분계수의 정의

출제유형 | 주어진 극한값의 식을 변형하여 미분계수를 구하거나 미분계수의 기하적 의미가 접선의 기울기임을 이해하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 미분계수의 정의를 여러 가지 방식으로 변형할 수 있어야 하고 미분계수가 곡선에 접하는 접선의 기울기임을 이해하고 활용할 줄 알아야 한다.

(1) 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+kh) - f(a)}{kh} \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수}) \end{aligned}$$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 p 이면

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p$$

필수 유형

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x) = x^3 f(x) - 7$

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2} = 2$

$f(2) + g(2) + f'(2) - g'(2)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

(출제 의도)

미분계수의 정의와 변형을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

또한 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다항함수이므로 $x=2$ 에서 연속이다.

그러므로 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 에서

$$f(2) = g(2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 (가)의 식에 $x=2$ 를 대입하면

$$g(2) = 8f(2) - 7 \text{이고 } \textcircled{1} \text{에 의하여}$$

$$g(2) = 8g(2) - 7 \text{에서 } g(2) = 1$$

$$f(2) = g(2) = 1$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x) - f(2)\} - \{g(x) - g(2)\}}{x - 2} = f'(2) - g'(2) = 2$$

$$\text{따라서 } f(2) + g(2) + f'(2) - g'(2) = 1 + 1 + 2 = 4$$

답 ④

01

▶ 21054-0135

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(1)=3$ 일 때,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h} \text{의 값은?}$$

- ① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

02

▶ 21054-0136

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - 5}{h} = 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x^2 - 16} \text{의 값은?}$$

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

03

▶ 21054-0137

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

(나) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)g(2+3h) - f(2)g'(2)}{h} = 6$

$g'(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

유형 2 미분가능과 연속

출제유형 | 함수가 특정한 x 의 값에서 미분가능한지, 즉 미분계수가 존재하는지에 대하여 묻는 문제. 구간에 따라 주어진 함수가 다르고 미정계수를 포함한 함수가 미분가능함을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 이면 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하고, 미분가능하면 연속임을 이용한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & (x \leq -2) \\ 2x & (x > -2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 값은?
(단, a 와 b 는 상수이다.) [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 의도

미분가능하면 연속임을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = -2$ 에서 미분가능하다.

또한 $x = -2$ 에서 미분가능하면 $x = -2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b, \quad \lim_{x \rightarrow -2+} 2x = -4$$

$$f(-2) = 4 - 2a + b$$

$$\text{에서 } 4 - 2a + b = -4, \quad b = 2a - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{(-2+h)^2 + a(-2+h) + (2a-8)\} + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2 + (a-4)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (h + a - 4) = a - 4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2(-2+h) + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h}{h} = 2$$

이므로 $a - 4 = 2$ 에서 $a = 6$

①에서 $b = 4$ 이므로

$$a + b = 10$$

답 ⑤

04

▶ 21054-0138

함수

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2(x-2) & (x < 2) \\ x^2 + ax + b & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 $x=2$ 에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.)

- ① -12 ② -14 ③ -16
④ -18 ⑤ -20

05

▶ 21054-0139

함수

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x) + b & (x < 2) \\ x^3 + ax & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 $x=2$ 에서 미분가능할 때, $a-b$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06

▶ 21054-0140

함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 와 $k > 1$ 인 상수 k 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} 4 & (x \leq 1) \\ f(x) & (1 < x \leq k) \\ c & (x > k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a-b+c-k$ 의 값은?
(단, a, b, c 는 상수이다.)

- ① -14 ② -16 ③ -18
④ -20 ⑤ -22

유형 3 도함수와 미분법

출제유형 | 미분법을 이용하여 미분계수를 구하거나 조건을 만족시키는 함수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 도함수를 구하고 이 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있어야 하며 여러 변형된 식에서도 활용할 수 있어야 한다.

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때

(1) $y=x^n$ ($n \geq 2$ 인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(2) $y=x$ 이면 $y'=1$

(3) $y=c$ (c 는 상수)이면 $y'=0$

(4) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c 는 상수)

(5) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(6) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(7) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$ 에서 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$ 의 값과 같게 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

평균변화율과 미분계수를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{a^3-3a^2+5a}{a} = a^2-3a+5$$

또 $f'(x)=3x^2-6x+5$ 이므로

$$f'(2)=12-12+5=5$$

따라서 $a^2-3a+5=5$ 에서

$$a(a-3)=0$$

$$a=0 \text{ 또는 } a=3$$

$$a>0 \text{ 이므로 } a=3$$

답 3

07

▶ 21054-0141

함수 $f(x)=(x^3+2x)(x^2-x+1)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

08

▶ 21054-0142

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+a^2x+b$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{2}$ 을 만족시킬 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

09

▶ 21054-0143

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=g(1), f'(1)=g'(1)$

(나) $f'(-1)=8, g'(1)=-g'(3)=4$

$f(2)-g(2)$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

유형 4 접선의 방정식

출제유형 | 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기와 미분계수가 같음을 이용하여 접점의 좌표, 접선의 기울기, 접선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(t)$ 임을 이해하고 이를 이용하여 여러 형태로 제시된 문제를 해결할 수 있어야 한다. 특히 접선의 방정식은 직선의 방정식임을 이해하고 여러 가지 도형의 성질을 함께 활용할 수 있어야 한다.

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

곡선 $y=x^3-6x^2+6$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선이 점 $(0, a)$ 를 지날 때, a 의 값을 구하시오. [3점]

(출제 의도)

미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$y=x^3-6x^2+6$ 에서
 $y'=3x^2-12x$ 이므로 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는
 $3 \times 1^2 - 12 \times 1 = -9$
 따라서 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-1=-9(x-1)$
 $y=-9x+10$
 이 접선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로
 $a=-9 \times 0 + 10 = 10$

답 10

10

▶ 21054-0144

곡선 $y=x^3+3x-1$ 위의 점 $(1, 3)$ 을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지날 때, a 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

11

▶ 21054-0145

함수 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선이 점 $(3, f(3))$ 을 지날 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

12

▶ 21054-0146

두 함수 $f(x)=x^3+3x-2$, $g(x)=x^2+ax+b$ 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 점 $A(1, 2)$ 에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A 에서의 접선과 일치할 때, $g(-1)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① -5 ② -6 ③ -7
 ④ -8 ⑤ -9

13

▶ 21054-0147

직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점 $(a, \frac{1}{2}a)$ 에서 곡선 $y = x^2 + 2x + 2$ 에 그은 서로 다른 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB는 a 의 값에 관계없이 항상 점 (p, q) 를 지난다. $p+q$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$
 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

14

▶ 21054-0148

함수 $f(x) = x^3 + 3x$ 에 대하여 두 점 $A(0, f(0))$, $B(3, f(3))$ 을 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $C(c, f(c))$ ($0 < c < 3$)에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 C에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 l 이 곡선 $y = -x^2 + 6x + k$ 와 서로 다른 두 점 D, E에서 만나고 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 일 때, $k = p + q\sqrt{3}$ 이다. $p - q$ 의 값은?

(단, k 는 상수이고, p, q 는 유리수이다.)

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$
 ④ -1 ⑤ $-\frac{5}{4}$



유형 5 함수의 증가와 감소

출제유형 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 증가와 감소를 판단하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수가 증가하거나 감소할 조건을 구할 수 있어야 한다.

함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

필수 유형

| 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 3$ 이 열린구간 $(-a, a)$ 에서 감소할 때, 양수 a 의 최댓값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 증가와 감소를 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 3$ 에서

$$f'(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 3$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	21	↘	-15	↗

$-3 < x < 3$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 열린구간 $(-a, a)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소하기 위한 양수 a 의 최댓값은 3이다.

답 3

15

▶ 21054-0149

함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + ax + 1$ 이 역함수를 갖도록 하는 실수 a 의 최솟값은?

- ① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

16

▶ 21054-0150

함수 $f(x) = x^3 + kx^2 + 3$ 이 열린구간 $(1, 4)$ 에서 감소할 때, 실수 k 의 최댓값은?

- ① -6 ② -7 ③ -8
④ -9 ⑤ -10

17

▶ 21054-0151

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 최댓값은?

- (가) $f(0) = f'(1)$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq f'(1)$
(다) 열린구간 $(-1, 2)$ 에 속하는 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $(x_1 - x_2)\{f(x_1) - f(x_2)\} \leq 0$ 이다.

- ① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

유형 6 함수의 극대와 극소

출제유형 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극대, 극소를 판단하거나 함수의 극댓값, 극솟값을 구하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있어야 한다.

- (1) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.
(2) 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가
① 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이다.
② 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이다.

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ 이 $x=3$ 에서 극대일 때, 상수 m 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

(출제 의도)

미분을 이용하여 함수가 극대일 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^2 + 4x + m$$

이때 함수 $f(x)$ 가 미분가능한 함수이고 $x=3$ 에서 극대이므로 $f'(3)=0$ 이다.

$$f'(3) = -9 + 12 + m = 0$$

따라서 $m = -3$

답 ①

18

▶ 21054-0152

함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a$ 의 극솟값이 -2 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

19

▶ 21054-0153

함수 $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + a$ 의 모든 극값의 합이 $\frac{2}{3}$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

20

▶ 21054-0154

함수 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 3a)x + 1$ 이 극값을 갖도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21

▶ 21054-0155

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = -f'(-x)$ 이다.
(나) $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$ 가 $x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 극값을 가질 때 세 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(2, f(2))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는? (단, $\alpha \neq 2$, $\beta \neq 2$)

- ① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

22

▶ 21054-0156

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- (가) $f(1) = f'(1) = 0$
(나) 0이 아닌 실수 k 에 대하여 함수 $|g(x) - 3|$ 은 $x=k$, $x=-k$ 에서만 미분가능하지 않다.
(다) 열린구간 $(0, 1)$ 에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2) > 0$ 이다.

보기

- ㄱ. $f(0) > 0$ 이면 함수 $|g(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 항상 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(2)$ 의 최댓값은 19이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 7 함수의 그래프와 최대, 최소

출제유형 | 다양하게 주어진 조건을 이용하여 그래프를 추론하고 닫힌 구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제와 도형의 길이, 넓이, 부피의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제 등이 출제된다.

출제유형잡기 | 그래프를 추론하고 닫힌구간에서 극댓값, 극솟값을 구하고 닫힌구간의 양 끝 값에서의 함수값과 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다. 도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 주어진 조건에 따라 미지수 x 를 정하고 구하고자 하는 값을 x 에 대한 함수 $f(x)$ 로 나타내어 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

필수 유형

| 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 2$ 가 닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 최댓값 M , 최솟값 $\frac{14}{27}$ 를 갖는다. $a + M$ 의 값을 구하시오. [4점]

(출제 의도)

함수의 그래프에서 극대와 극소를 활용하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는 지를 묻는 문제이다.

풀이

$$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 = (x+a)(3x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -a \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\dots$	$\frac{a}{3}$	$\dots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{a}{3}$ 에서 극소이면서 최소이다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a \times \left(\frac{a}{3}\right)^2 - a^2 \times \frac{a}{3} + 2 \\ = -\frac{5}{27}a^3 + 2$$

$$-\frac{5}{27}a^3 + 2 = \frac{14}{27} \text{에서 } a^3 = 8, a = 2$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \text{에서}$$

$$f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 10$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 2 = 10$$

이므로 $M = 10$

$$\text{따라서 } a + M = 2 + 10 = 12$$

12

23

▶ 21054-0157

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M + m = 12$ 일 때, 상수 a 의 값은?

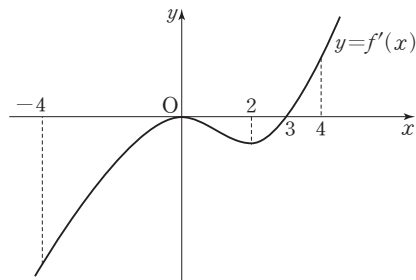
- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

24

▶ 21054-0158

사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은?

(단, 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 $x = 0$ 에서 x 축에 접하고, $x = 2$ 에서 극솟값을 가지며 $f'(3) = 0$ 이다.)



- ① $f(-4)$ ② $f(0)$ ③ $f(2)$
④ $f(3)$ ⑤ $f(4)$

25

▶ 21054-0159

양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 1$ 이 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 최댓값 M , 최솟값 -5 를 가질 때, M 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

26

▶ 21054-0160

단현구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $y=8^x-3\times 2^x+5$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 52 ② 54 ③ 56
④ 58 ⑤ 60

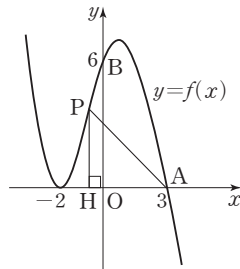
27

▶ 21054-0161

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 $x=-2$ 에서 x 축에 접하고, 두 점 $A(3, 0)$, $B(0, 6)$ 을 지난다.

점 $P(t, f(t))$ ($-2 < t < 3$)에서 x 축에 내린 수선의 발 H 에 대하여 삼각형 APH 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. $-2 < t < 3$ 에서 함수 $S(t)$ 의 최댓값이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



28

▶ 21054-0162

단현구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)=2x^3-ax$ 의 최솟값이 $-\frac{32}{27}$ 가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

29

▶ 21054-0163

실수 a 에 대하여 단현구간 $[-2, 2]$ 에서 함수

$$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+16a^2$$

의 최댓값을 $g(a)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. $g(1)=23$
ㄴ. 함수 $g(a)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄷ. 함수 $g(a)$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 8 방정식에의 활용

출제유형 | 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 파악하여 방정식의 실근의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소, 극대, 극소를 조사하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그리고, x 축, 직선 $y=k$ 와 만나는 점 등을 이용하여 방정식의 실근의 개수 등을 구한다.

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$ 이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a 의 개수는? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

(출제 의도)

다항함수의 미분법을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$f(x)=2x^3+6x^2+a \text{라 하면 } f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$f(-2)=-16+24+a=a+8$$

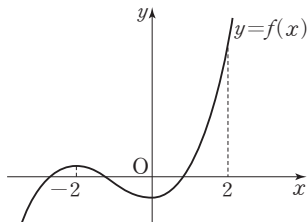
$$f(0)=a$$

$$f(2)=16+24+a=a+40$$

$$\text{이므로 } f(-2) < f(2)$$

그러므로 방정식 $f(x)=0$ 이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, $f(-2) \geq 0$ 이고 $f(0) < 0$ 이어야 한다.



$$f(-2) \geq 0 \text{에서 } a+8 \geq 0, a \geq -8 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(0) < 0 \text{에서 } a < 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -8 \leq a < 0$$

$$\text{따라서 구하는 정수 } a \text{의 개수는 } 0 - (-8) = 8$$

답 ③

30

▶ 21054-0164

삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+a=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a 의 개수는?

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

31

▶ 21054-0165

삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x-k=0$ 의 세 실근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha < 1 < \beta < \gamma$ 일 때, 모든 정수 k 의 개수는?

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

32

▶ 21054-0166

점 $(0, k)$ 에서 곡선 $y=x^3-6x^2+9x-3$ 에 그을 수 있는 모든 접선의 개수를 $f(k)$ 라 할 때, 함수 $f(k)$ 는 $k=p, k=q$ 에서 불연속이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $p \neq q$ 이다.)

33

▶ 21054-0167

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=2x+1$ 이다.
 (나) 방정식 $f(x)-2x=3$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\{f(0)\}^3$ 의 값은?

- ① $\frac{21}{2}$ ② $\frac{23}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$
 ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

34

▶ 21054-0168

최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값 M 을 갖는 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k 는 상수이다.)

- (가) 방정식 $f(x)+k=0$ 은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
 (나) 방정식 $|f(x)|=k$ 은 서로 다른 7개의 실근을 갖는다.
 (다) 방정식 $|f(x)|=M$ 은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.

보기

- ㄱ. 방정식 $f(x)-k=0$ 은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.
 ㄴ. 방정식 $f(x)+M=0$ 은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.
 ㄷ. 방정식 $|f(x)|=2M$ 은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35

▶ 21054-0169

삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax$ 에 대하여 함수 $g(x)=f(x)-f(1)$ 이라 하자. 실수 k 에 대하여 방정식 $|g(x)|=g(k)$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, $h(7)=4$ 이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a 는 상수이다.)

보기

- ㄱ. 함수 $g(x)$ 의 극댓값을 M , 극솟값을 m 이라 할 때 $M+m=0$ 이다.
 ㄴ. 집합 $\{h(k) \mid k \text{는 실수}\}$ 의 원소의 개수는 5이다.
 ㄷ. $g'(0)=-24$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 9 부등식에의 활용

출제유형 | 부등식 $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$ 의 해를 구하는 문제와 부등식이 항상 성립하기 위한 조건을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 이용하여 부등식이 성립할 조건을 구한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

두 함수

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - k, g(x) = 2x^2 + 3x - 10$$

에 대하여 부등식

$$f(x) \geq 3g(x)$$

가 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하시오. [4점]

(출제 의도)

도함수를 이용하여 부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$h(x) = f(x) - 3g(x)$ 라 하면

$h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30 - k$ 이고, 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서

$f(x) \geq 3g(x)$ 가 항상 성립하려면 $h(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$h'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	3	...	4
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

$$h(3) = 27 - 27 - 27 + 30 - k = 3 - k$$

즉, 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이면서 최소이다. 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 $h(x) \geq 0$ 하려면 $h(3) = 3 - k \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \leq 3$ 이므로 실수 k 의 최댓값은 3이다.

답 3

36

▶ 21054-0170

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $2x^3 + 3x^2 - 12x + a > 0$ 이 성립할 때, 정수 a 의 최솟값은?

- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

37

▶ 21054-0171

두 실수 a, b 와 두 함수

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + a, g(x) = x^3 - 8x^2 + 16x + b$$

가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립할 때, $a - b$ 의 최솟값은?

- ① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

38

▶ 21054-0172

사차함수 $f(x) = (x-1)^3(x-3)$ 과 이차함수

$g(x) = (x-k)^2 + m$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $(f \circ g)(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(f \circ g)(x) \geq (f \circ g)(2)$ 가 성립한다.

모든 실수 k 의 값의 곱은? (단, m 은 상수이다.)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

유형 10 속도와 가속도

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점에 대한 함수식이나 그래프에서 점의 위치, 속도, 가속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x=f(t)$ 일 때, 점 P의 시각 t 에서의 속도 v 와 가속도 a 는

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x_1, x_2 가

$$x_1 = t^3 - 2t^2 + 3t, \quad x_2 = t^2 + 12t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. [4점]

(출제 의도)

수직선 위를 움직이는 점의 속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = 3t^2 - 4t + 3, \quad v_2 = 2t + 12$$

이므로

$$3t^2 - 4t + 3 = 2t + 12 \text{에서}$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 0$$

$$3(t+1)(t-3) = 0$$

$$t \geq 0 \text{이므로 } t = 3$$

이때 점 P의 위치는

$$27 - 18 + 9 = 18$$

점 Q의 위치는

$$9 + 36 = 45$$

이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$45 - 18 = 27$$

답 27

39

▶ 21054-0173

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가 $x = t^3 - at^2 + 3$ 이다. 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 속도가 2일 때 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는? (단, a 는 상수이다.)

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

40

▶ 21054-0174

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가 $x = t^3 - 4t^2 - 3t + 1$ 일 때, 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸는 순간의 가속도는?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

41

▶ 21054-0175

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x_1, x_2 가

$$x_1 = 3t^3 - 3t^2 + 7t, \quad x_2 = 2t^3 + 4t^2 - 3t$$

이다. 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 처음으로 만나는 순간 두 점 P, Q의 속도의 차를 구하시오.

1 부정적분

- (1) 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $F'(x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수 $F(x)$ 를 $f(x)$ 의 부정적분이라 하고 $f(x)$ 의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$ 를 적분한다고 한다.
- (2) 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 상수)}$$

로 나타내며, C 를 적분상수라고 한다.

참고 $F(x)$, $G(x)$ 를 함수 $f(x)$ 의 부정적분이라 하면 $F'(x)=G'(x)=f(x)$ 이므로 $\{G(x)-F(x)\}'=f(x)-f(x)=0$ 에서 $G(x)-F(x)=C$ (단, C 는 상수), $G(x)=F(x)+C$ 즉, 함수 $f(x)$ 의 임의의 부정적분은 $F(x)+C$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

2 다항함수 $y=x^n$ (n 은 양의 정수)의 부정적분과 함수 $y=1$ 의 부정적분

- (1) n 이 양의 정수일 때,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

- (2) $\int 1 dx = x + C$ (단, C 는 적분상수)

3 부정적분의 성질

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 부정적분이 각각 존재할 때,

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수}) \\ (2) \quad & \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ (3) \quad & \int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx \end{aligned}$$

4 정적분의 정의

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

이때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$ 를 a 에서 b 까지 적분한다고 한다.

참고 ① $\int_a^a f(x)dx=0$

$$\textcircled{2} \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

5 정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

6 정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$(1) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

$$(2) \int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$(3) \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

(4) 함수 $f(x)$ 가 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7 정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\textcircled{1} f(-x) = f(x) \text{이면 } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

$$\textcircled{2} f(-x) = -f(x) \text{이면 } \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

8 정적분으로 나타내어진 함수의 극한

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = f(a) \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

9 곡선과 좌표축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

10 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

11 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 거리

점 P 가 수직선 위를 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 움직일 때, 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$ 에서의 점 P 의 위치를 $f(a)$ 라 하면

$$(1) \text{ 점 } P \text{의 시각 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지의 위치의 변화량은 } \int_a^b v(t)dt$$

$$(2) \text{ 점 } P \text{의 시각 } t=b \text{에서의 위치 } f(b) \text{는 } f(b) = f(a) + \int_a^b v(t)dt$$

$$(3) \text{ 점 } P \text{의 시각 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지 움직인 거리는 } \int_a^b |v(t)|dt$$

유형 1 부정적분의 정의와 성질

출제유형 | $y=x^n$ (n 은 양의 정수)의 부정적분과 부정적분의 성질을 이용하여 부정적분을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $n \neq 0$ 인 양의 정수일 때

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

(2) 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 부정적분이 각각 존재할 때

$$\textcircled{1} \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

$$\textcircled{2} \int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\textcircled{3} \int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = x^3 + x, \quad f(0) = 3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

(출제 의도)

부정적분을 이용하여 함수값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (x^3 + x) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 3$ 이므로

$$f(2) = 4 + 2 + 3 = 9$$

답 9

01

▶ 21054-0176

함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \int (x^3 + 2x^2 + 1) dx - \int (x^3 - x^2) dx$ 이

고 $f(0) = 1$ 일 때, $f(1)$ 의 값은?

$$\textcircled{1} \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{2} 3$$

$$\textcircled{3} \frac{7}{2}$$

$$\textcircled{4} 4$$

$$\textcircled{5} \frac{9}{2}$$

02

▶ 21054-0177

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 6x^2 + 2x$ 이고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선이 점 $(0, -2)$ 를 지날 때, $f(2)$ 의 값은?

$$\textcircled{1} 21$$

$$\textcircled{2} 22$$

$$\textcircled{3} 23$$

$$\textcircled{4} 24$$

$$\textcircled{5} 25$$

03

▶ 21054-0178

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int \{2xf(x) + (x^2 - 4)f'(x)\} dx = x^4 - 2x^3 + 8x - 10$$

을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은?

$$\textcircled{1} 1$$

$$\textcircled{2} 3$$

$$\textcircled{3} 5$$

$$\textcircled{4} 7$$

$$\textcircled{5} 9$$

유형 2 정적분의 성질과 계산

출제유형 | 정적분의 성질을 이용한 계산 문제와 활용 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (단, k 는 상수)

② $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(2) 함수 $f(x)$ 가 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

 $\int_1^4 (x + |x-3|)dx$ 의 값을 구하시오. [3점]**(출제 의도)**

정적분의 성질을 이해하고 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned}
 & \int_1^4 (x + |x-3|)dx \\
 &= \int_1^3 (x + |x-3|)dx + \int_3^4 (x + |x-3|)dx \\
 &= \int_1^3 \{x - (x-3)\}dx + \int_3^4 \{x + (x-3)\}dx \\
 &= \int_1^3 3dx + \int_3^4 (2x-3)dx \\
 &= \left[3x \right]_1^3 + \left[x^2 - 3x \right]_3^4 \\
 &= (9-3) + \{(16-12) - (9-9)\} \\
 &= 6+4 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

답 10

04

▶ 21054-0179

함수 $f(x) = 3x^2 + 12x - 4$ 에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$ 의 값은?

① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 25

05

▶ 21054-0180

함수 $f(x) = |x+1| + 2|x|$ 에 대하여 $\int_{-1}^3 xf(x)dx = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)**06**

▶ 21054-0181

함수 $f(x) = (x+1)(x-2)$ 에 대하여 $-1 \leq a \leq 0$ 에서 정의된 함수 $g(a)$ 가 다음과 같다.

$$g(a) = \int_a^{a+3} |f(x)|dx$$

함수 $g(a)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

유형 3 함수의 성질을 이용한 정적분

출제유형 | 함수의 그래프가 y 축 또는 원점에 대하여 대칭임을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

(2) 연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

필수 유형

| 2016학년도 대수능 |

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x)=-f(x), g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx = 10$$

일 때, $h(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

조건으로부터 함수의 그래프의 대칭성을 발견하고 이를 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$$

이므로 다항함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0)=0$ 이다.

$$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$$

(n 은 0 또는 자연수, $a_{2n+1}, a_{2n-1}, \dots, a_1$ 은 상수)

로 놓으면

$$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$ 를 만족시킨다.

또한 $(-x)h'(-x)=-\{xh'(x)\}$ 이므로

$$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx = \int_{-3}^3 \{xh'(x)+5h'(x)\}dx$$

$$= 0 + 2 \int_0^3 5h'(x)dx$$

$$= 10 \left[h(x) \right]_0^3$$

$$= 10 \{h(3)-h(0)\}$$

$$10 \{h(3)-h(0)\}=10 \text{에서}$$

$$h(3)-h(0)=1$$

$$\text{따라서 } h(3)=h(0)+1=0+1=1$$

답 ①

07

▶ 21054-0182

$\int_{-3}^3 (4x^3+6x^2+7x)dx$ 의 값을 구하시오.

08

▶ 21054-0183

삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이다.

(나) $f(1)=6$

(다) $\int_{-2}^2 f'(x)dx=12$

$f(3)$ 의 값은?

- ① -2 ② -4 ③ -6
④ -8 ⑤ -10

09

▶ 21054-0184

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

(나) $\int_{-1}^1 x^2 f'(x)dx=0$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가질 때, a 의 값은?

- ① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$
④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ -1

유형 4 정적분으로 나타내어진 함수

출제유형 | 정적분으로 나타내어진 함수의 합숫값을 구하는 문제, 정적분으로 나타내어진 함수의 미분을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

a, b 가 상수일 때 $\int_a^b f(t)dt$ 는 상수임을 이용한다.

(2) 함수 $f(t)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

필수 유형

| 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = 4x^3 + x \int_0^1 f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

(출제 의도)

정적분으로 나타내어진 함수를 이용하여 합숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = 4x^3 + kx$$

이때

$$k = \int_0^1 (4t^3 + kt) dt$$

$$= \left[t^4 + \frac{k}{2} t^2 \right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{k}{2}$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로

$$f(1) = 4 + 2 = 6$$

답 ①

10

▶ 21054-0185

함수 $f(x) = \int_0^x (3t^2 + 5t - 2) dt$ 의 극댓값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

11

▶ 21054-0186

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x (t^3 - 2t) dt = 2x^3 + x - f(x)$$

를 만족시킬 때, $f(1) + f'(1)$ 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

12

▶ 21054-0187

두 연속함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_0^x f(t) dt = g(x)(x-1) + a(x^2-1) + b$$

$$(나) g(x) = x^2 - x \int_0^1 f(t) dt$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 1일 때, $f(1) + g(-1)$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.)

- ① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

유형 5 정적분으로 나타내어진 함수의 극한

출제유형 | 정적분으로 나타내어진 함수의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 상수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = f(a)$$

필수 유형

함수 $f(x) = 2x^3 - 6x + 12$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x f(t) dt$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

(출제 의도)

정적분으로 나타내어진 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} F'(2) \\ &= \frac{1}{4} f(2) \\ &= \frac{1}{4} (16 - 12 + 12) \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 ④

13

▶ 21054-0188

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (3t^2 + at - 4a) dt = 12$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -3
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -4

14

▶ 21054-0189

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = 4x^3 + 2x + \int_{-1}^2 f(t) dt$$

를 만족시킨다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = -15$$

일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15

▶ 21054-0190

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = 2x^3 - 3x^2 \int_0^1 f'(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$
를 만족시킬 때,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-1}^{-1+7h} f(t) dt$$
의 값은?

- ① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

유형 6 곡선과 좌표축 사이의 넓이

출제유형 | 곡선이 주어지고 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 주로 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 곡선이 x 축과 만나는 점을 구하고 정적분을 이용하여 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

곡선 $y = x^3 - 2x^2$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

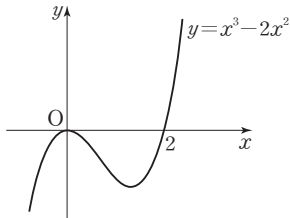
출제 의도

주어진 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분을 이해하고 그 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 2x^2 \\ &= x^2(x - 2) \end{aligned}$$

곡선 $y = x^3 - 2x^2$ 은 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^3 - 2x^2| dx \\ &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= -4 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ②

16

▶ 21054-0191

곡선 $y = (x+1)(x-2)^2$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
 ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

17

▶ 21054-0192

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x = -3$, $x = 1$ 에서 극값을 가질 때, 곡선 $y = f'(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 24이다. 삼차함수 $f(x)$ 에서 x 의 계수는?

- ① -6 ② $-\frac{25}{4}$ ③ $-\frac{13}{2}$
 ④ $-\frac{27}{4}$ ⑤ -7

18

▶ 21054-0193

곡선 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + k$ 가 x 축과 서로 다른 두 점에서 접할 때, 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k 는 상수이다.)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$
 ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

유형 7 두 곡선 사이의 넓이

출제유형 | 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 곡선이 만나는 점을 구할 필요가 있을 때는 방정식을 이용하여 만나는 점을 구하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

두 함수

$$f(x) = \frac{1}{3}x(4-x), g(x) = |x-1| - 1$$

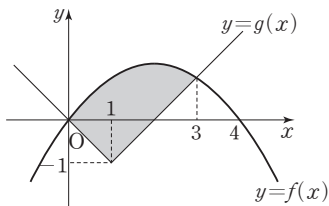
의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값을 구하시오. [4점]

(출제 의도)

두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x) = |x-1| - 1$ 의 그래프는 다음과 같다.



$x < 1$ 일 때, $g(x) = -x$ 이므로 $\frac{1}{3}x(4-x) = -x$ 에서 $x=0$

$x \geq 1$ 일 때, $g(x) = x-2$ 이므로 $\frac{1}{3}x(4-x) = x-2$ 에서

$4x-x^2=3x-6$, $x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$ 이므로 $x=3$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_1^3 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x\right) dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{6}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{1}{9} + \frac{7}{6}\right) + \left\{\left(-3 + \frac{3}{2} + 6\right) - \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + 2\right)\right\} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

이므로 $4S=14$

답 14

19

▶ 21054-0194

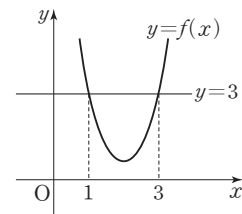
두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{14}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

20

▶ 21054-0195

그림과 같이 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 은 x 좌표가 1, 3인 서로 다른 두 점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



- ① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

21

▶ 21054-0196

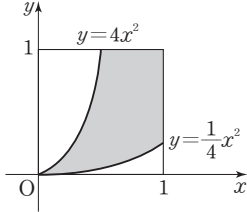
두 곡선 $y=x(x+1)(x-3)$, $y=-x(x-3)$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① $\frac{245}{12}$ ② $\frac{247}{12}$ ③ $\frac{83}{4}$
④ $\frac{251}{12}$ ⑤ $\frac{253}{12}$

22

▶ 21054-0197

그림과 같이 두 곡선 $y=4x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 두 직선 $x=1$, $y=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$
 ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

23

▶ 21054-0198

함수 $f(x)=x^3-4x^2+5x$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 곡선을 A 라 하자. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 곡선 A 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 곡선 A 및 직선 $y=-x+9$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 할 때, S_1+S_2 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

유형 8 여러 형태의 조건이 주어진 넓이

출제유형 | 함수의 성질, 정적분의 정의와 성질, 미분의 활용 등을 이용하여 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수의 도함수, 여러 형태의 그래프, 함수의 성질과 특징, 정적분의 정의와 넓이의 관계, 미분의 활용 등을 이용하여 넓이를 구한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$ 이다.

(나) $\int_0^6 f(x) dx=0$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① 9 ② 12 ③ 15
 ④ 18 ⑤ 21

출제 의도

조건을 해석하고 정적분의 성질을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 일치해야 한다.

또 조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x) dx=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 \{f(x-3)+4\} dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 \{f(x)+4\} dx \\ &= 2 \int_0^3 f(x) dx + 12 \end{aligned}$$

에서

$$2 \int_0^3 f(x) dx + 12 = 0, \quad \int_0^3 f(x) dx = -6$$

따라서 $\int_3^6 f(x) dx = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_6^9 f(x) dx &= \int_6^9 \{f(x-3)+4\} dx = 12 + \int_3^6 f(x) dx \\ &= 12 + 6 = 18 \end{aligned}$$

답 ④

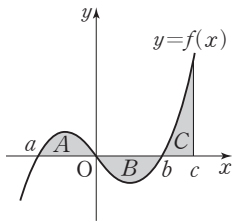
24

▶ 21054-0199

그림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점 $(a, 0)$, $(0, 0)$, $(b, 0)$ 에서 만나는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=c$ 에 의해 만들어지는 세 부분의 넓이를 각각 A, B, C 라 할 때, 삼차함수 $f(x)$ 와 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B, C 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) $3 \int_a^c |f(x)| dx - 4 \int_a^c f(x) dx = 10$



$\int_a^c |f(x)| dx$ 의 값을 구하시오. (단, $a < 0 < b < c$)

25

▶ 21054-0200

$-1 \leq x \leq a$ ($a > 1$)에서

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+a+1)$ 이다.

(나) $\int_{-1}^a f(x) dx = \frac{9}{4}$

$-1 \leq x \leq 2a+1$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $6S$ 의 값을 구하시오.

26

▶ 21054-0201

함수 $f(x) = x^3 + (1-a)x^2 - ax$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근의 부호가 서로 다르다.

(나) 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분 중에서 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 넓이가 $\frac{11}{12}$ 이다.

상수 a 의 값을 구하시오.

27

▶ 21054-0202

삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ 의 그래프 위의 점 $(1, 27)$ 에서의 접선과 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{13}{2}$

② $\frac{27}{4}$

③ 7

④ $\frac{29}{4}$

⑤ $\frac{15}{2}$

28

▶ 21054-0203

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=2x^2-8x+3$ 이 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, 곡선 $y=4x^3+3x^2$ 과 두 직선 $x=\alpha, x=\beta$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $m\sqrt{6}$ 이다. 자연수 m 의 값을 구하시오.

유형 9 수직선 위의 속도와 거리

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점의 시각 t 에서의 속도에 대한 식이나 그래프가 주어질 때, 점 또는 물체의 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치와 위치의 변화량, 움직인 거리의 차이점을 이해하고 이를 이용하여 구한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + t, \quad v_2(t) = 2t^2 + 3t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a 라 할 때, $9a$ 의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

수직선 위를 움직이는 점의 속도에 대한 식에서 위치를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_1(t) = v_2(t)$ 일 때이므로

$$3t^2 + t = 2t^2 + 3t$$

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = 2$$

$t=2$ 일 때 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^2 v_1(t) dt &= \int_0^2 (3t^2 + t) dt \\ &= \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = 10 \end{aligned}$$

$t=2$ 일 때 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^2 v_2(t) dt &= \int_0^2 (2t^2 + 3t) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} + 6 = \frac{34}{3} \end{aligned}$$

따라서 두 점 사이의 거리 a 는

$$a = \left| \frac{34}{3} - 10 \right| = \frac{4}{3}$$

이므로

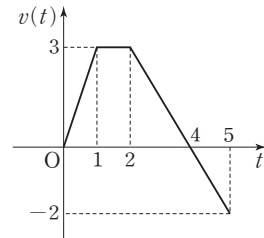
$$9a = 9 \times \frac{4}{3} = 12$$

답 12

29

▶ 21054-0204

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($0 \leq t \leq 5$)에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



$t=1$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

- ① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$
④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

30

▶ 21054-0205

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각 $v_1(t) = t^2 - 2t + 9$,

$v_2(t) = 2t + \frac{19}{3}$ 이다. 두 점 P, Q가 출발 후 첫 번째 만날 때부터 두 번째 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

- ① 24 ② $\frac{73}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$
④ 25 ⑤ $\frac{76}{3}$

31

▶ 21054-0206

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 라 할 때,

$$v_1(t) = t(2-t)(4-t), \quad v_2(t) = a - 2t \quad (a \geq 0)$$

이다. 두 점 A, B가 출발 후 세 번 만나기 위한 모든 실수 a 의 값의 범위는 $\frac{q}{p} < a < 4$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

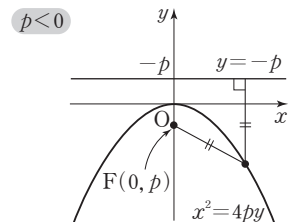
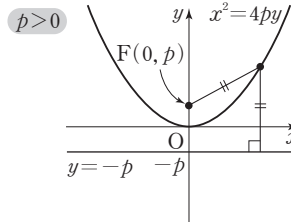
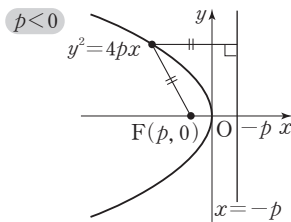
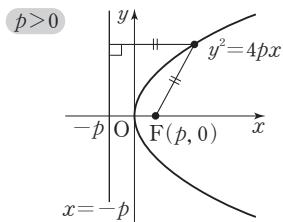
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

1 포물선

(1) 포물선의 정의: 평면 위의 한 점 F 와 점 F 를 지나지 않는 한 직선 l 에 대하여 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라고 한다. 이때 점 F 를 포물선의 초점, 직선 l 을 포물선의 준선, 포물선의 초점 F 를 지나고 준선 l 에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.

(2) 포물선의 방정식

- ① 초점의 좌표가 $F(p, 0)$ 이고, 준선의 방정식이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ (단, $p \neq 0$)
- ② 초점의 좌표가 $F(0, p)$ 이고, 준선의 방정식이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$ (단, $p \neq 0$)



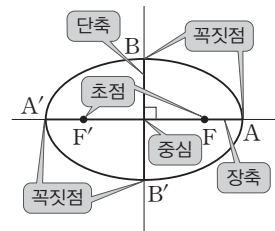
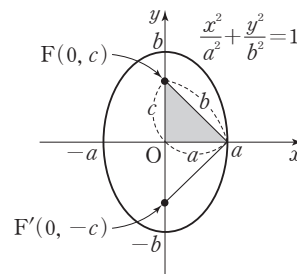
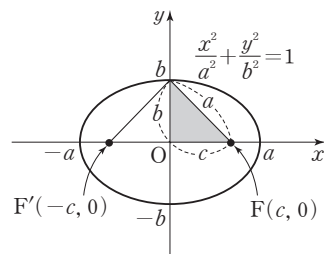
(3) 포물선의 평행이동: 포물선 $y^2 = 4px$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(y-n)^2 = 4p(x-m)$

2 타원

(1) 타원의 정의: 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F' 에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 두 점 F, F' 을 타원의 초점이라고 한다. 두 초점 F, F' 을 지나고 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A' 이라 하고, 선분 FF' 의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B' 이라 하고 할 때, 네 점 A, A', B, B' 을 타원의 꼭짓점, 선분 AA' 을 타원의 장축, 선분 BB' 을 타원의 단축이라 하고, 장축과 단축이 만나는 점을 타원의 중심이라고 한다.

(2) 타원의 방정식

- ① 두 초점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 에서의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > c > 0, b^2 = a^2 - c^2$)
- ② 두 초점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 에서의 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $b > c > 0, a^2 = b^2 - c^2$)

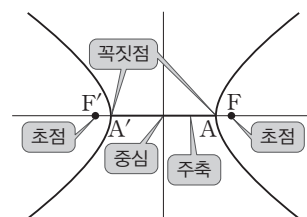


(3) 타원의 평행이동: 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

3 쌍곡선

- (1) 쌍곡선의 정의: 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F' 에서의 거리의 차이가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 하고, 두 점 F, F' 을 쌍곡선의 초점이라고 한다. 쌍곡선이 선분 FF' 과 만나는 점을 각각 A, A' 이라고 할 때, 두 점 A, A' 을 쌍곡선의 꼭짓점, 선분 AA' 을 쌍곡선의 주축, 선분 AA' 의 중점을 쌍곡선의 중심이라고 한다.

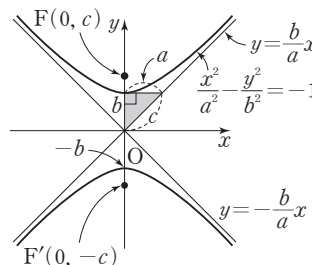
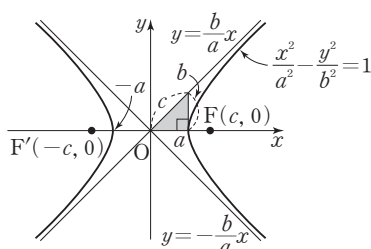


- (2) 쌍곡선의 방정식

① 두 초점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 에서의 거리의 차이가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $c > a > 0, b^2 = c^2 - a^2$)

② 두 초점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 에서의 거리의 차이가 $2b$ 인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (단, $c > b > 0, a^2 = c^2 - b^2$)

- (3) 쌍곡선의 점근선: 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)의 두 점근선의 방정식은 $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$ 이다.



- (4) 쌍곡선의 평행이동: 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

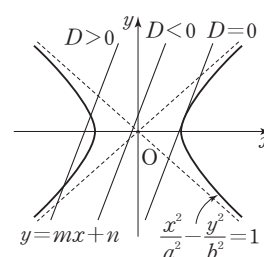
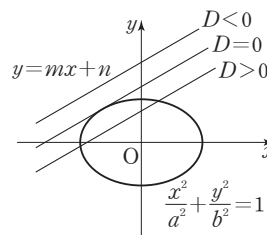
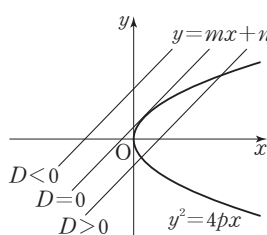
4 이차곡선의 접선의 방정식

- (1) 이차곡선과 직선의 위치 관계: 이차곡선을 나타내는 방정식과 직선 $y = mx + n$ 에서 y 를 소거하여 얻은 x 에 대한 방정식을

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

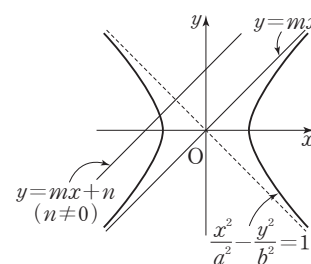
이라고 하자. $A \neq 0$ 일 때, 이차곡선과 직선의 교점의 개수는 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이때 이차곡선과 직선의 위치 관계는 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식 D 의 부호에 따라 다음과 같다.

- ① $D > 0$: 서로 다른 두 점에서 만난다.
- ② $D = 0$: 한 점에서 접한다.
- ③ $D < 0$: 만나지 않는다.



참고 직선 $y = mx + n$ 의 기울기가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 기울기와 같은 경우

- ① $n = 0$ 이면 점근선과 일치하므로 쌍곡선과 만나지 않는다.
- ② $n \neq 0$ 이면 쌍곡선과 한 점에서 만난다.



(2) 포물선의 접선의 방정식

① 기울기가 m 인 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 에 접하고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

포물선 $x^2=4py$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx-m^2p$$

② 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

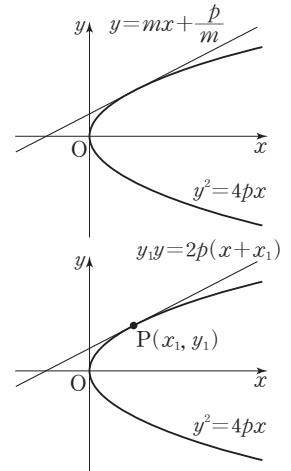
$$y_1y=2p(x+x_1)$$

포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

③ 포물선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식

포물선 밖의 한 점 (α, β) 에서 포물선에 그은 접선의 방정식을 구할 때는 ① 또는 ②의 접선 위에 점 (α, β) 가 있음을 이용한다.



(3) 타원의 접선의 방정식

① 기울기가 m 인 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

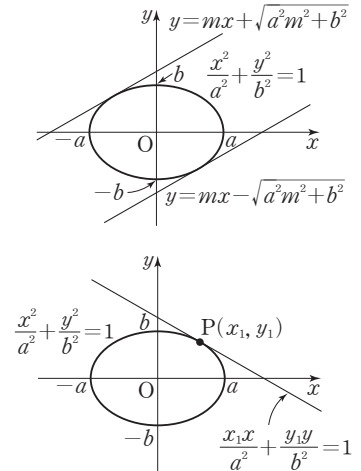
② 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

③ 타원 밖의 점에서 그은 접선의 방정식

타원 밖의 한 점 (α, β) 에서 타원에 그은 접선의 방정식을 구할 때는 ① 또는 ②의 접선 위에 점 (α, β) 가 있음을 이용한다.



(4) 쌍곡선의 접선의 방정식

① 기울기가 m 인 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad (\text{단, } a^2m^2 - b^2 > 0)$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx \pm \sqrt{b^2 - a^2m^2} \quad (\text{단, } b^2 - a^2m^2 > 0)$$

② 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

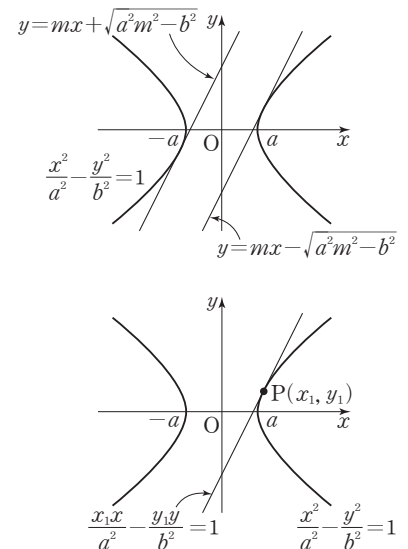
$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = -1$$

③ 쌍곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식

쌍곡선 밖의 한 점 (α, β) 에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 때는 ① 또는 ②의 접선 위에 점 (α, β) 가 있음을 이용한다.



유형 1 포물선의 정의와 활용

출제유형 | 포물선의 초점의 좌표, 준선의 방정식, 꼭짓점의 좌표를 구하는 문제와 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이, 도형의 둘레의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

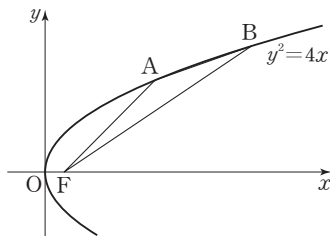
출제유형잡기 | 포물선의 방정식으로부터 초점의 좌표를 구하고, 포물선 위의 점에서 초점과 준선까지의 거리가 서로 같음을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B의 x 좌표는 1보다 큰 자연수이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x 좌표가 6일 때, $\overline{AF} \times \overline{BF}$ 의 최댓값을 구하시오.

[4점]



출제 의도

포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a , b 라 하자.

포물선 $y^2=4x$ 의 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$ 이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x 좌표가 6이므로

$$\frac{a+b+1}{3}=6 \text{에서 } a+b=17$$

한편, 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 포물선의 준선까지의 거리와 같고, 포물선 $y^2=4x$ 의 준선의 방정식은 $x=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= a+1, \overline{BF} = b+1 \text{에서} \\ \overline{AF} \times \overline{BF} &= (a+1)(b+1) \\ &= ab+a+b+1 \\ &= ab+18 \end{aligned}$$

이때 a , b 는 $a+b=17$ 을 만족시키는 자연수이므로 ab 는 $a=8$, $b=9$ 또는 $a=9$, $b=8$ 일 때 최댓값 72를 갖는다.

따라서 구하는 $\overline{AF} \times \overline{BF}$ 의 최댓값은

$$72+18=90$$

답 90

01

▶ 21056-0207

초점이 F인 포물선 $y^2=3x$ 위의 점 A와 x 축 위의 점 B에 대하여 $\overline{AF}=\overline{AB}$, $\overline{BF}=3$ 일 때, 삼각형 AFB의 둘레의 길이는?
(단, 점 B의 x 좌표는 양수이다.)

- ① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9
④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

02

▶ 21056-0208

포물선 $y^2=8x+16$ 위의 점 A에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 OA의 길이가 10일 때, 삼각형 OAH의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

- ① 30 ② 40 ③ 50
④ 60 ⑤ 70

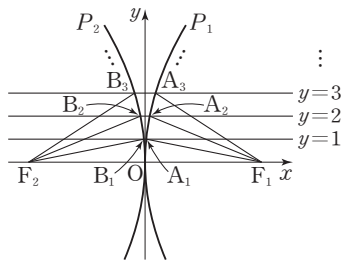
03

▶ 21056-0209

그림과 같이 두 포물선 $P_1: y^2=20x$, $P_2: y^2=-20x$ 의 초점을 각각 F_1 , F_2 라 하고, 자연수 n 에 대하여 두 포물선 P_1 , P_2 가 직선 $y=n$ 과 만나는 점을 각각 A_n , B_n 이라 하자. 사다리꼴 $F_1A_nB_nF_2$ 에서

$$S(n) = \overline{F_1A_n} + \overline{A_nB_n} + \overline{B_nF_2} + \overline{F_2F_1}$$

이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} S(n)$ 의 값은?

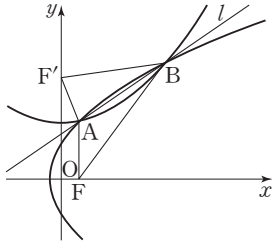


- ① 271 ② 273 ③ 275
④ 277 ⑤ 279

04

▶ 21056-0210

그림과 같이 x 축 위의 점 F , y 축 위의 점 F' 을 각각 초점으로 하는 두 포물선이 만나는 두 점을 A , B 라 하자. 두 점 A , B 를 지나는 직선 l 의 기울기가 $\frac{2}{3}$, $\overline{BF} = \overline{AF} + 12$ 일 때, $\overline{BF} - \overline{AF}$ 의 값은? (단, 두 포물선의 축은 원점에서 만난다.)



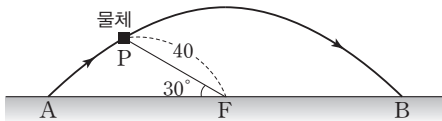
- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

05

▶ 21056-0211

그림과 같이 A 지점을 출발한 물체가 F 지점을 초점으로 하는 포물선 위를 움직이다가 B 지점에서 이동을 멈추었다. 물체가 P 지점을 통과하는 순간 $\angle PFA = 30^\circ$ 이고, F 지점과 P 지점 사이의 거리는 40이었다. 세 지점 A , F , B 가 한 직선 위에 있을 때, A 지점과 B 지점 사이의 거리는?

(단, 두 지점 A , F 사이의 거리와 두 지점 B , F 사이의 거리는 같고, 물체의 크기는 무시한다.)



- ① 104 ② 108 ③ 112
④ 116 ⑤ 120

유형 2 타원의 정의와 활용

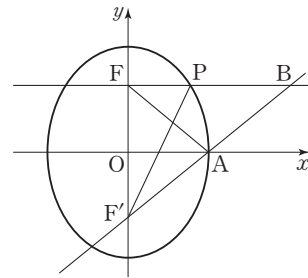
출제유형 | 타원의 초점의 좌표, 두 초점 사이의 거리, 장축의 길이, 단축의 길이를 구하는 문제와 타원의 정의를 이용하여 선분의 길이의 합, 도형의 둘레의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 타원의 방정식으로부터 초점의 좌표, 장축의 길이, 단축의 길이 등을 구하고 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합이 장축의 길이와 같음을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

그림과 같이 두 점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 를 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ 이 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 양수인 점을 A 라 하자. 직선 $y=c$ 과 직선 AF' 과 만나는 점을 B , 직선 $y=c$ 가 타원과 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점을 P 라 하자. 삼각형 BPF' 의 둘레의 길이와 삼각형 BFA 의 둘레의 길이의 차가 4일 때, 삼각형 $AF'F$ 의 넓이는? (단, $0 < a < 5$, $c > 0$) [3점]



- ① $5\sqrt{6}$ ② $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ ③ $4\sqrt{6}$
④ $\frac{7\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

출제 의도

타원의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 BPF' 의 둘레의 길이와 삼각형 BFA 의 둘레의 길이의 차가 4이고, $\overline{AF} = \overline{AF'}$ 이므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \overline{PF'} = 7, \overline{PF} = 3$$

한편, 직각삼각형 PFF' 에서 $\overline{FF'}^2 = \overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2$ 이므로

$$(2c)^2 = 7^2 - 3^2 = 40, \quad c = \sqrt{10}$$

$$a^2 = 25 - c^2 = 25 - 10 = 15 \text{에서 } a = \overline{OA} = \sqrt{15}$$

따라서 삼각형 $AF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times \overline{OA} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{15} = 5\sqrt{6}$$

06

▶ 21056-0212

두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 y축 위의 두 꼭짓점을 A, B라 할 때, 사각형 AF'BF의 넓이는?
(단, 점 A의 y좌표와 점 F의 x좌표는 양수이다.)

- ① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

07

▶ 21056-0213

두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점 P에 대하여 $\cos(\angle PF'F) = \frac{7}{9}$ 일 때, $\overline{PF'} - \overline{PF}$ 의 값은?

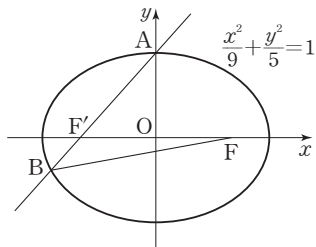
- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

08

▶ 21056-0214

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 꼭짓점에서 y좌표가 양수인 점을 A라 하자. 직선 AF'이 타원과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 B라 할 때, 선분 BF의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

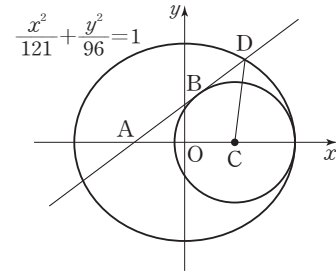
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



09

▶ 21056-0215

그림과 같이 점 A(-5, 0)에서 원 $(x-5)^2 + y^2 = 36$ 에 그은 접선의 접점을 B라 하자. 원의 중심을 C라 하고 직선 AB가 타원 $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{96} = 1$ 과 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 D라 할 때, $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ 의 값은?

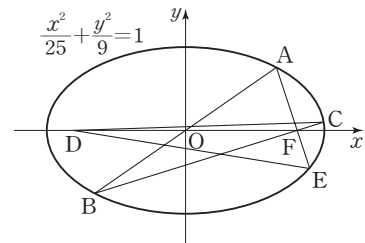


- ① $\frac{20}{29}$ ② $\frac{41}{58}$ ③ $\frac{21}{29}$
④ $\frac{43}{58}$ ⑤ $\frac{22}{29}$

10

▶ 21056-0216

그림과 같이 두 초점이 D, F인 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 제1사분면에 있는 점 A에 대하여 직선 OA가 타원과 제3사분면에서 만나는 점을 B, 직선 AF가 타원과 제4사분면에서 만나는 점을 E, 직선 BF가 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 C라 하자. $\overline{OA} = 4$ 일 때, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$ 의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)



유형 3 쌍곡선의 정의와 활용

출제유형 | 쌍곡선의 초점의 좌표, 두 초점 사이의 거리, 주축의 길이를 구하는 문제와 쌍곡선의 정의를 이용하여 선분의 길이의 차, 도형의 둘레의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다. 또한 쌍곡선의 점근선을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

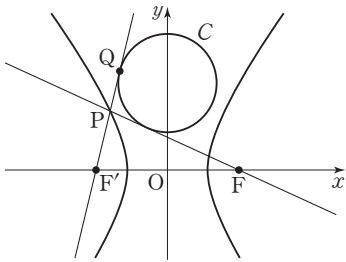
출제유형잡기 | 쌍곡선의 방정식으로부터 초점의 좌표, 주축의 길이 등을 구하고 쌍곡선 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 차가 주축의 길이와 같음을 이용하여 문제를 해결한다. 또한 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{17} = 1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F'P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F'P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{F'Q} = 5\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2$ 의 값을 구하시오.

(단, $\overline{F'P} < \overline{FP}$) [4점]



(출제 의도)

쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

원의 중심을 A(0, a)라 하고, 원과 직선 PF의 접점을 R라 하자. $\overline{PF'} = p$, $\overline{PQ} = \overline{PR} = q$, $\overline{RF} = r$ 라 하자.

$$\overline{F'Q} = 5\sqrt{2} \text{이므로 } p + q = 5\sqrt{2} \quad \cdots \text{㉠}$$

쌍곡선의 주축의 길이가 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = q + r - p = 4\sqrt{2} \quad \cdots \text{㉡}$$

$\overline{AQ} = \overline{AR}$, $\overline{AF'} = \overline{AF}$ 이고 $\angle AQP' = \angle ARF = 90^\circ$ 이므로 두 직각삼각형 AQF'과 직각삼각형 ARF는 서로 합동이다.

$$\text{따라서 } \overline{RF} = \overline{QF'} \text{이므로 } r = 5\sqrt{2} \quad \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면 } p - q = \sqrt{2} \quad \cdots \text{㉣}$$

$$\text{㉠, ㉣을 연립하여 풀면 } p = 3\sqrt{2}, q = 2\sqrt{2}$$

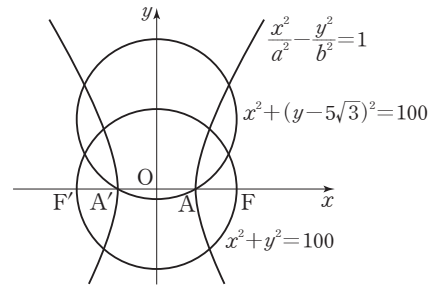
따라서

$$\begin{aligned} \overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2 &= (q + r)^2 + p^2 = (7\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 \\ &= 98 + 18 = 116 \end{aligned}$$

11

▶ 21056-0217

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 100$ 이 쌍곡선의 두 초점 F, F'을 지나고, 원 $x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 = 100$ 이 쌍곡선의 두 꼭짓점 A, A'을 지난다. $\frac{b^2}{a^2}$ 의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)



- ① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

12

▶ 21056-0218

쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 초점 중 x좌표가 양수인 초점 F에서 쌍곡선의 두 점근선에 내린 수선의 발을 H₁, H₂라 할 때, 네 점 O, F, H₁, H₂를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이는?
(단, O는 원점이다.)

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

13

▶ 21056-0219

두 점 (0, 0), (0, 10)에서의 거리의 차이가 8인 쌍곡선의 방정식이

$$16x^2 - 9y^2 + py + q = 0$$

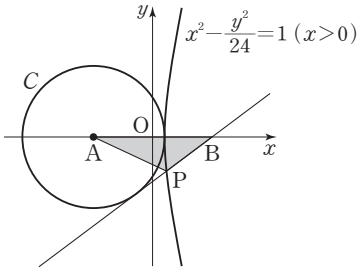
일 때, p - q의 값은? (단, p, q는 상수이다.)

- ① 165 ② 167 ③ 169
④ 171 ⑤ 173

14

▶ 21056-0220

그림과 같이 중심이 $A(-5, 0)$ 이고 곡선 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ ($x > 0$)과 한 점에서 만나는 원을 C 라 하자. 점 $B(5, 0)$ 과 곡선 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ ($x > 0$) 위를 움직이는 점 P 에 대하여 직선 BP 가 원 C 와 제3사분면에서 접할 때, 삼각형 APB 의 넓이는?



- ① $\frac{71}{5}$
④ $\frac{29}{2}$

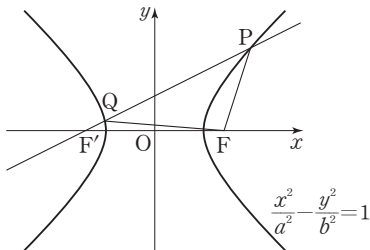
- ② $\frac{143}{10}$
⑤ $\frac{73}{5}$

- ③ $\frac{72}{5}$

15

▶ 21056-0221

그림과 같이 두 초점이 $F(6, 0)$, $F'(-6, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P 에 대하여 직선 PF' 이 쌍곡선과 만나는 점 중에서 점 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. $\overline{PF} = 4\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $\overline{PQ} + \overline{QF} = 11\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ 일 때, ab 의 값을 구하시오.
(단, $a > 0$, $b > 0$ 이고 $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 이다.)



유형 4 포물선의 접선

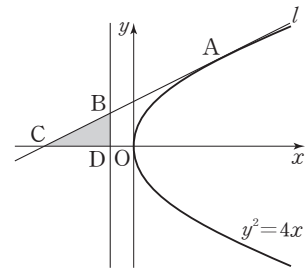
출제유형 | 접점이나 기울기가 주어졌을 때 포물선의 접선의 방정식을 구하는 문제 또는 포물선 밖의 점에서 포물선에 그은 접선에 대한 활용 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에 따라 적당한 공식을 이용하여 접선의 방정식을 구하고, 기울기 또는 접점이 주어지지 않은 경우에는 기울기 또는 접점을 임의로 정한 후 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2016학년도 대수능 |

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $A(4, 4)$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 l 과 포물선의 준선이 만나는 점을 B , 직선 l 과 x 축이 만나는 점을 C , 포물선의 준선과 x 축이 만나는 점을 D 라 하자. 삼각형 BCD 의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{7}{4}$

- ② 2

- ③ $\frac{9}{4}$

- ④ $\frac{5}{2}$

- ⑤ $\frac{11}{4}$

출제 의도

포물선의 접선의 방정식을 구하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $A(4, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4y = 2(x + 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 포물선의 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 $D(-1, 0)$

$$\textcircled{1} \text{에 } x = -1 \text{을 대입하면 } y = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } B\left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

$$\textcircled{1} \text{에 } y = 0 \text{을 대입하면 } 0 = \frac{1}{2}x + 2, x = -4$$

$$\text{즉, } C(-4, 0)$$

따라서 삼각형 BCD 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

16

▶ 21056-0222

포물선 $y^2=4x$ 의 초점 F와 점 A(4, 4)에 대하여 직선 AF에 평행하면서 포물선에 접하는 직선을 l 이라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

17

▶ 21056-0223

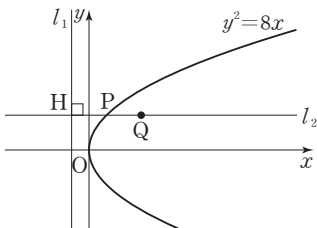
초점이 F인 포물선 $y^2=6x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{PF} : \overline{PH} = 5 : 4$ 일 때, 포물선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

18

▶ 21056-0224

그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 의 준선 l_1 에 대하여 포물선 위를 움직이는 점 P를 지나고 준선 l_1 에 수직인 직선 l_2 가 준선 l_1 과 만나는 점을 H라 하자. $\overline{PQ} = \overline{PH}$ 를 만족시키는 직선 l_2 위의 점 Q가 나타내는 도형을 K라 할 때, 도형 K 위의 점 (6, 4)에서의 접선의 기울기는? (단, $\overline{PH} < \overline{QH}$)

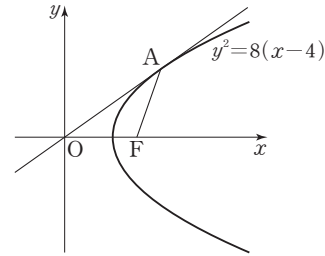


- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

19

▶ 21056-0225

그림과 같이 원점 O에서 포물선 $y^2=8(x-4)$ 에 그은 접선의 접점을 A라 하자. 이 포물선의 초점을 F라 할 때, $\cos(\angle OFA)$ 의 값은?

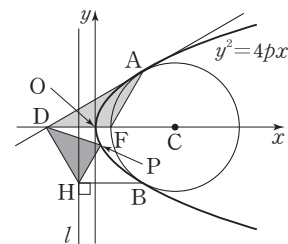


- ① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

20

▶ 21056-0226

그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ ($p>0$)의 초점 F를 지나고 중심이 x 축 위의 점 C인 원이 포물선과 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중에서 제1사분면에 있는 점을 A라 하고 나머지 한 점을 B라 하자. 포물선 위의 점 A에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 D라 하고, 점 B에서 포물선의 준선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ADF의 넓이가 $32\sqrt{3}$ 일 때, 포물선 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 PDH의 넓이의 최솟값을 k 라 하자. $\sqrt{3}k$ 의 값을 구하시오. (단, 점 C의 x 좌표는 p 보다 크다.)



유형 5 타원의 접선

출제유형 | 접점이나 기울기가 주어졌을 때 타원의 접선의 방정식을 구하는 문제 또는 타원 밖의 점에서 타원에 그은 접선에 대한 활용 문제가 출제된다.

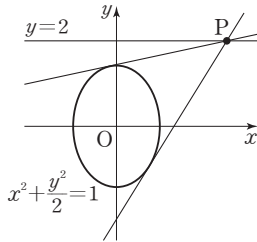
출제유형잡기 | 주어진 조건에 따라 적당한 공식을 이용하여 접선의 방정식을 구하고, 기울기 또는 접점이 주어지지 않은 경우에는 기울기 또는 접점을 임의로 정한 후 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2014학년도 대수능 6월 모의평가 |

직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$ 이다. 점 P의 x 좌표를 k 라 할 때, k^2 의 값은?

[4점]



- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

(출제 의도)

타원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

타원의 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{m^2 + 2}$$

이 접선이 점 $P(k, 2)$ 를 지나므로

$$2 = mk \pm \sqrt{m^2 + 2}$$

$$(2 - mk)^2 = (\pm \sqrt{m^2 + 2})^2$$

$$m^2 k^2 - 4mk + 4 = m^2 + 2$$

$$(k^2 - 1)m^2 - 4km + 2 = 0$$

두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2}{k^2 - 1} = \frac{1}{3}$$

따라서 $k^2 = 7$

답 ②

21

▶ 21056-0227

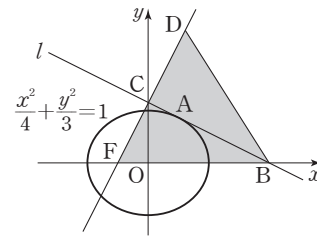
두 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 에 동시에 접하는 접선의 기울기를 m 이라 할 때, m^2 의 값은?

- ① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{25}{16}$
④ $\frac{36}{25}$ ⑤ $\frac{49}{36}$

22

▶ 21056-0228

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $A(1, \frac{3}{2})$ 에서의 접선 l 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. x 좌표가 음수인 타원의 초점 F에 대하여 직선 CF 위의 점 D가 $\overline{DF} = \overline{BF}$ 를 만족시킬 때, 삼각형 DFB의 넓이는? (단, $\overline{DF} > \overline{DC}$)

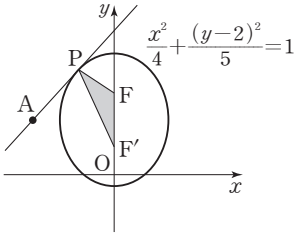


- ① $4\sqrt{5}$ ② $\frac{17\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{9\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{19\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

23

▶ 21056-0229

그림과 같이 점 $A(-3, 2)$ 에서 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ 에 그은 접선의 접점을 P 라 하자. 이 타원의 두 초점을 F, F' 이라 할 때, 삼각형 $PF'F$ 의 넓이는?

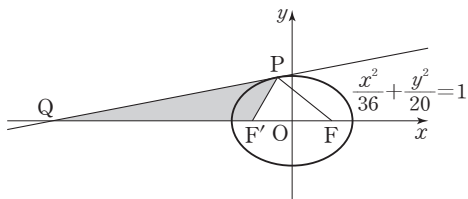


- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

24

▶ 21056-0230

그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 이 있다. 제2사분면에 있는 타원 위의 점 P 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. $\cos(\angle FPF') = \frac{1}{7}$ 일 때, 삼각형 PQF' 의 넓이는?
 (단, $\overline{PF'} < \overline{PF}$)

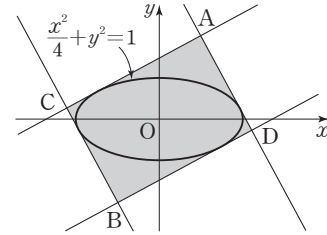


- ① $21\sqrt{3}$ ② $22\sqrt{3}$ ③ $23\sqrt{3}$
 ④ $24\sqrt{3}$ ⑤ $25\sqrt{3}$

25

▶ 21056-0231

그림과 같이 점 $A(1, 2)$ 에서 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선과 점 $B(-1, -2)$ 에서 타원에 그은 두 접선이 만나는 점을 C, D 라 할 때, 사각형 $ACBD$ 의 넓이는?



- ① $\frac{33\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{34\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{35\sqrt{13}}{13}$
 ④ $\frac{36\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{37\sqrt{13}}{13}$

유형 6 쌍곡선의 접선

출제유형 | 접점이나 기울기가 주어졌을 때 쌍곡선의 접선의 방정식을 구하는 문제 또는 쌍곡선 밖의 점에서 쌍곡선에 그은 접선에 대한 활용 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에 따라 적당한 공식을 이용하여 접선의 방정식을 구하고, 기울기 또는 접점이 주어지지 않은 경우에는 기울기 또는 접점을 임의로 정한 후 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결한다.

필수 유형

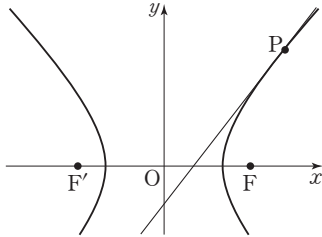
| 2014학년도 대수능 9월 모의평가 |

그림과 같이 두 초점이 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ 인 쌍곡선

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선과 x 축과의 교점이

선분 $F'F$ 를 2 : 1로 내분할 때, k^2 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.) [4점]



출제 의도

쌍곡선의 방정식과 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

쌍곡선의 두 초점이 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 9 \quad \cdots \text{㉠}$$

또 쌍곡선 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1 \quad \cdots \text{㉡}$$

이때 접선 ㉡과 x 축이 만나는 점의 x 좌표는

$$\frac{4x}{a^2} = 1, x = \frac{a^2}{4}$$

한편, 접선과 x 축의 교점이 선분 $F'F$ 를 2 : 1로 내분하므로 이 점의 x 좌표는 1이다.

$$\text{즉, } \frac{a^2}{4} = 1 \text{ 이므로 } a^2 = 4 \quad \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉠, ㉢에서 } b^2 = 5$$

$$\text{그러므로 쌍곡선의 방정식은 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

이때 점 $P(4, k)$ 가 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{4^2}{4} - \frac{k^2}{5} = 1$$

$$\text{따라서 } k^2 = 15$$

26

▶ 21056-0232

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 3$ 위의 점 $P(2, 1)$ 에서의 접선이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 점을 A, B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이는?

(단, O는 원점이다.)

① $\frac{14}{5}$

② 3

③ $\frac{16}{5}$

④ $\frac{17}{5}$

⑤ $\frac{18}{5}$

27

▶ 21056-0233

제1사분면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 과 접하는 직선을 l 이라 하자.

원점과 직선 l 사이의 거리가 $\frac{9}{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ $\frac{7}{6}$

⑤ $\frac{4}{3}$

28

▶ 21056-0234

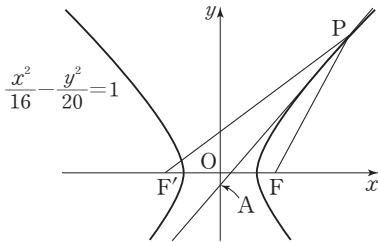
점 $P(0, n)$ 에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{20} = 1$ 에 그은 두 접선의 접점을 A, B라 하자. 세 점 A, B, P를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 자연수 n 의 개수는?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

29

▶ 21056-0235

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 의 두 초점이 F, F'이고 점 $A(0, -\frac{4}{3})$ 에서 쌍곡선에 그은 접선의 접점을 P라 하자. 삼각형 PF'F의 둘레의 길이는?

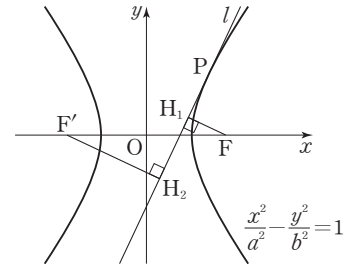


- ① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

30

▶ 21056-0236

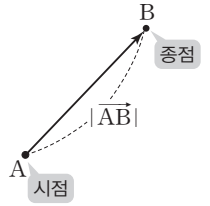
그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 에서의 접선을 l 이라 할 때, 원점 O와 직선 l 사이의 거리는 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 이다. 쌍곡선의 두 초점 F, F'에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 할 때, $\overline{H_1F} + \overline{H_2F'}$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이고, 직선 l 의 기울기는 1보다 크다.)



- ① $\frac{8\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{15}}{5}$ ③ $2\sqrt{15}$
④ $\frac{11\sqrt{15}}{5}$ ⑤ $\frac{12\sqrt{15}}{5}$

1 벡터의 뜻

- (1) 길이, 질량과 같이 크기만 갖는 양을 스칼라(scalar)라 하고 속도나 힘과 같이 크기와 방향을 동시에 갖는 양을 벡터(vector)라고 한다. 특히, 평면에서의 벡터를 평면벡터라고 한다.
- (2) 점 A에서 점 B로 향하는 방향이 주어진 선분 AB를 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 라 하고 기호로 $\overrightarrow{AB}$ 와 같이 나타낸다. 이때 점 A를 이 벡터의 시점, 점 B를 이 벡터의 종점이라고 한다.
- (3) 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 의 크기는 선분 AB의 길이를 뜻하며 기호로 $|\overrightarrow{AB}|$ 와 같이 나타낸다. 즉,
 $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$
- (4) 벡터를 한 문자로 나타낼 때는 간단히 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ 와 같이 나타내고 벡터 $\vec{a}$ 의 크기는 기호로 $|\vec{a}|$ 와 같이 나타낸다.
- (5) 크기가 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.
- (6) 시점과 종점이 일치하는 벡터를 영벡터라 하고 기호로 $\vec{0}$ 와 같이 나타낸다. 영벡터의 크기는 0이고 방향은 생각하지 않는다.
- (7) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 의 크기와 방향이 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고 기호로 $\vec{a} = \vec{b}$ 와 같이 나타낸다.
 두 벡터의 시점과 종점이 달라도 평행이동하여 겹칠 수 있는 벡터는 서로 같은 벡터이다.
- (8) 벡터 $\vec{a}$ 와 크기가 같고, 방향이 반대인 벡터를 기호로 $-\vec{a}$ 와 같이 나타낸다. 즉, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ 이다.



2 벡터의 연산

(1) 벡터의 덧셈

두 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ 에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AC}$ 로 나타낸 벡터 $\vec{c}$ 를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 의 합이라 하고 기호로 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 또는 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 와 같이 나타낸다.

(2) 벡터의 덧셈에 대한 성질

임의의 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 영벡터 $\vec{0}$ 에 대하여

- ① $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (교환법칙)
- ② $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (결합법칙)
- ③ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- ④ $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

(3) 벡터의 뺄셈

- ① 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여 $\vec{a}$ 와 $-\vec{b}$ 의 합 $\vec{a} + (-\vec{b})$ 를 $\vec{a}$ 에서 $\vec{b}$ 를 뺀 차라 하고 기호로 $\vec{a} - \vec{b}$ 와 같이 나타낸다. 즉, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- ② $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

(4) 벡터의 실수배

실수 k 와 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$ 의 곱 $k\vec{a}$ 를 벡터 $\vec{a}$ 의 실수배라 하고 다음과 같이 정의한다.

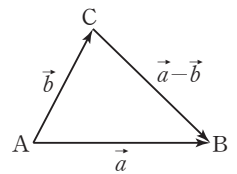
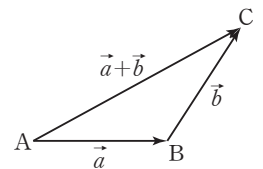
- ① $k > 0$ 이면 $k\vec{a}$ 는 방향이 $\vec{a}$ 와 같고 크기가 $k|\vec{a}|$ 인 벡터이다.
- ② $k < 0$ 이면 $k\vec{a}$ 는 방향이 $\vec{a}$ 와 반대이고 크기가 $|k||\vec{a}|$ 인 벡터이다.
- ③ $k = 0$ 이면 $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

참고 $\vec{a} = \vec{0}$ 이면 $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

(5) 벡터의 실수배의 성질

두 실수 k, l 와 벡터 $\vec{a}$ 에 대하여

- ① $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- ② $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$



(6) 벡터의 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 의 방향이 같거나 반대일 때, 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하다고 하며 기호로 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 와 같이 나타낸다.

즉, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

3 위치벡터

(1) 위치벡터

평면에서 한 점 O를 고정시키면 임의의 벡터 $\vec{p}$ 에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ 인 점 P가 오직 하나로 정해진다. 역으로 평면 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP}$ 인 벡터 $\vec{p}$ 가 오직 하나로 정해진다. 이와 같이 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 를 점 O에 대한 점 P의 위치벡터라고 한다.

(2) 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 의 위치벡터로의 표현

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 라고 하면

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

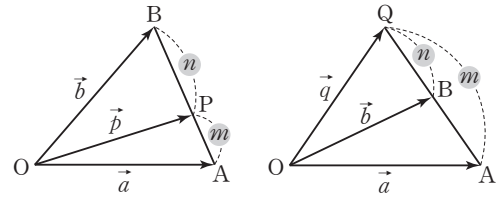
(3) 선분의 내분점, 외분점의 위치벡터

선분 AB를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점을 P, 선분 AB를

$m : n$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$)으로 외분하는 점을 Q라 하고, 네 점 A, B, P, Q

의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}, \vec{q}$ 라고 하면

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}, \quad \vec{q} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$



4 평면벡터의 성분

(1) 좌표평면에서 원점 O를 시점으로 할 때, 점 $A(a_1, a_2)$ 의 위치벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 를 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 로 나타낸다. 이때 a_1, a_2 를 평면벡터 $\vec{a}$ 의 성분이라 하고, a_1 을 x 성분, a_2 를 y 성분이라고 한다.

(2) 평면벡터의 크기

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ 일 때, } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

(3) 두 평면벡터가 서로 같을 조건

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ 일 때, } \vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

(4) 평면벡터의 성분에 의한 연산

두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\textcircled{2} \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\textcircled{3} k\vec{a} = (ka_1, ka_2) \quad (\text{단, } k \text{는 실수})$$

5 평면벡터의 내적

(1) 평면벡터의 내적

① 두 벡터가 이루는 각의 크기 : 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 일 때,

$$\angle AOB = \theta \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기라고 한다.

② 벡터의 내적 : 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기 θ 에 대하여

$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 의 내적이라 하고, 이것을 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 와 같이 나타낸다. 즉,

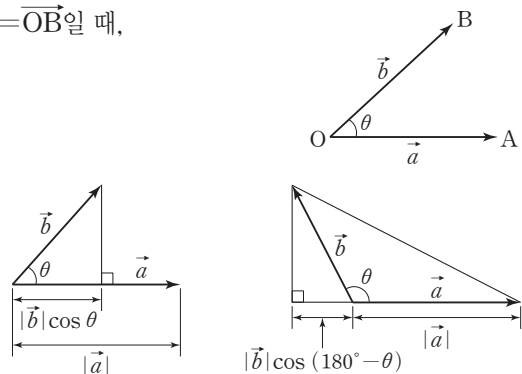
$$(i) 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \text{ 일 때, } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$(ii) 90^\circ < \theta \leq 180^\circ \text{ 일 때, } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - \theta)$$

이다. 특히, $\vec{a} = \vec{0}$ 또는 $\vec{b} = \vec{0}$ 일 때는 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 으로 정한다.

③ 평면벡터의 내적과 성분

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ 일 때, } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$



(2) 평면벡터의 내적의 성질

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대하여

① $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

② $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (교환법칙)

③ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (분배법칙)

④ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (단, k 는 실수)

(3) 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

(4) 두 평면벡터의 평행 조건과 수직 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여

① $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$

② $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

6 직선의 방정식

(1) 직선의 방정식

① 점 $A(x_1, y_1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (a, b)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \quad (\text{단, } ab \neq 0)$$

② 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$$

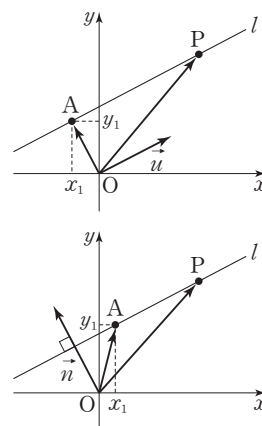
③ 점 $A(x_1, y_1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$ 인 직선의 방정식은

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

(2) 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터가 각각 $\vec{u}_1 = (a_1, a_2), \vec{u}_2 = (b_1, b_2)$ 일 때① 두 직선 l_1, l_2 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

② 두 직선 l_1, l_2 가 평행 : $l_1 \parallel l_2 \iff \vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ (단, k 는 0이 아닌 실수)③ 두 직선 l_1, l_2 가 서로 수직 : $l_1 \perp l_2 \iff \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ 

7 원의 방정식

좌표평면에서 점 $C(x_1, y_1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원 위의 임의의 한 점을 $P(x, y)$ 라고 하면

$$|\vec{CP}| = r$$

이고 두 점 C, P 의 위치벡터를 각각 $\vec{c}, \vec{p}$ 라고 하면

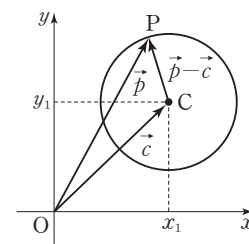
$$|\vec{p} - \vec{c}| = r \iff (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2$$

또는

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x - x_1, y - y_1) = r^2$$

에서

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$



유형 1 평면벡터의 연산

출제유형 | 벡터의 정의와 연산을 이해하고 이를 평면도형에 응용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배 등의 연산을 이해하고 도형의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2017학년도 대수능 9월 모의평가 |

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도

벡터로 주어진 조건을 만족시키는 점의 위치를 정하고, 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

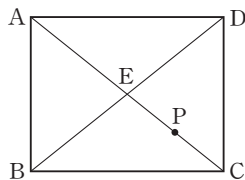
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}$ 이므로 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}$

에서 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = -2\overrightarrow{PC}$

ㄱ. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = -2\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CP}$ (참)

ㄴ. $\frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}}{2} = -\overrightarrow{PC}$

선분 BD의 중점을 E라 하면 $\overrightarrow{PE} = -\overrightarrow{PC}$



그림에서 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ 이고, 점 P는 선분 EC의 중점이므로

$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ADP의 넓이의 $\frac{4}{3}$ 이므로 삼각

형 ADC의 넓이는 $3 \times \frac{4}{3} = 4$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $4 \times 2 = 8$ (참)

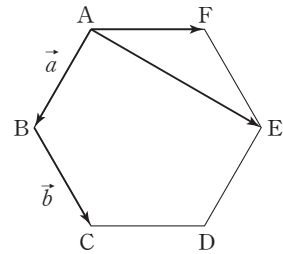
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

01

▶ 21056-0237

그림과 같이 정육각형 ABCDEF에서 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ 라 하자. 두 실수 k, l 에 대하여 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = k\vec{a} + l\vec{b}$ 일 때, $k+l$ 의 값은?

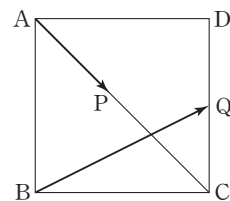


- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

02

▶ 21056-0238

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 대각선 AC, 변 CD 위의 점을 각각 P, Q라 하자. $|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BQ}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

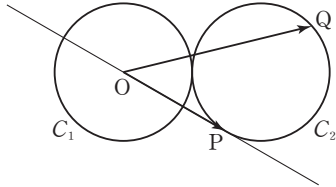


- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

03

▶ 21056-0239

그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 두 원 C_1, C_2 가 서로 한 점에서 만나고, 원 C_2 위의 점 P에서의 접선이 원 C_1 의 중심 O를 지난다. 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값을 구하시오.



유형 2 평면에서 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

출제유형 | 평면에서 벡터로 표현된 식을 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터로 해석하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 문제에서 주어진 벡터를 선분의 내분점, 외분점의 위치벡터로 나타내고 해석한 후, 평면도형의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

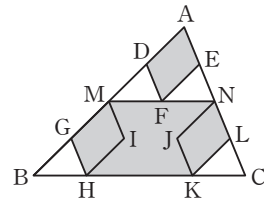
$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(출제 의도)

선분의 내분점의 위치벡터를 이용하여 점이 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이



두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 세 선분 AM, AN, MN의 중점을 각각 D, E, F라 하자.

또 두 선분 MB, NC의 중점을 각각 G, L이라 하고, 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점을 H, 선분 BC를 3:1로 내분하는 점을 K라 하자.

이때 $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AR}$ 라 하면 점 S는 위 그림의 평행사변형 ADFE의 내부(경계선 포함)에 있다.

또 점 Q가 점 B와 일치하면 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AM}$ 이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 MGHI의 내부(경계선 포함)에 있다.

마찬가지로 점 Q가 점 C와 일치하면 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AN}$ 이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 NJKL의 내부(경계선 포함)에 있다.

한편, $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 라 하면 점 T는 선분 MN 위를 움직이므로 점 X가 나타내는 영역은 위 그림의 육각형 MGHKLN의 내부(경계선 포함)이다. 이때 삼각형 AMN의 넓이는 $\frac{9}{4}$ 이고, 두 삼각형 GBH, LKC의 넓이는 각각 $\frac{9}{16}$ 이므로 구하는 넓이는

GBH, LKC의 넓이는 각각 $\frac{9}{16}$ 이므로 구하는 넓이는

$$9 - \left(\frac{9}{4} + 2 \times \frac{9}{16} \right) = \frac{45}{8}$$

따라서 $p=8, q=45$ 이므로 $p+q=53$

53

04

▶ 21056-0240

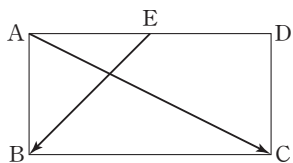
평면에서 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 변 AB의 중점을 D라 하자. 변 AC를 2 : 1로 내분하는 점과 4 : 1로 외분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}|$ 의 값은?

- ① $4\sqrt{3}$ ② $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ③ $5\sqrt{3}$
 ④ $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

05

▶ 21056-0241

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$ 인 직사각형 ABCD에서 변 AD의 중점을 E라 할 때, $|3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{EB}|$ 의 값은?

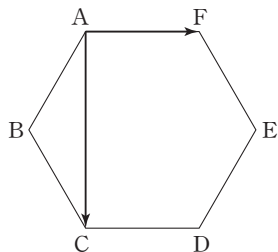


- ① $\sqrt{61}$ ② $\sqrt{62}$ ③ $3\sqrt{7}$
 ④ 8 ⑤ $\sqrt{65}$

06

▶ 21056-0242

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AF}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 삼각형 PFC의 넓이는?



- ① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

유형 3 성분으로 나타낸 평면벡터의 연산

출제유형 | 성분으로 나타낸 평면벡터의 연산을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 평면벡터와 좌표의 대응을 이해하고 두 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배 등의 연산을 벡터의 성분을 이용하여 해결한다.

필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

두 벡터 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 4)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

(출제 의도)

성분으로 나타낸 평면벡터의 연산을 할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= (3, 1) + \frac{1}{2}(-2, 4)$$

$$= (3, 1) + (-1, 2)$$

$$= (2, 3)$$

따라서 벡터 $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은

$$2 + 3 = 5$$

답 ⑤

07

▶ 21056-0243

좌표평면 위의 세 점 $A(1, 0)$, $B(2, 4)$, $C(4, 2)$ 에 대하여 $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$ 의 값은?

- ① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$
 ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

08

▶ 21056-0244

좌표평면 위의 세 점 $A(0, -1)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ 에 대하여 점 P 가 $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{BP}|$ 의 값은?

- ① $\sqrt{23}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ 5
 ④ $\sqrt{26}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

09

▶ 21056-0245

좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 1)$ 과 직선 $2x - y + 4 = 0$ 위의 점 P , 곡선 $y = -x^2 + 2$ 위의 점 Q 에 대하여 $2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = k(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$ 를 만족시키는 실수 k 의 최솟값은?

- ① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$
 ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

유형 4 평면벡터의 내적

출제유형 | 평면벡터의 내적의 정의를 이용하여 두 벡터의 내적을 구하거나 평면벡터의 내적의 기하적 의미를 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 평면벡터의 크기와 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 이용하여 평면벡터의 내적을 구하거나 평면벡터의 내적의 기하적 의미와 주어진 도형의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

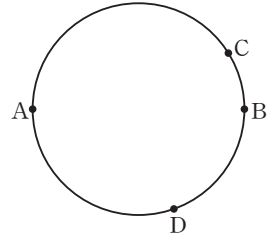
필수 유형

| 2020학년도 대수능 |

한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A , B , C , D 가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AD}|^2$ 의 값은? [4점]

(가) $|\overrightarrow{AB}| = 8$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

(나) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$



- ① 32 ② 34 ③ 36
 ④ 38 ⑤ 40

출제 의도

내적을 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ 는 수직이다. 그러므로 선분 AB 는 원의 지름이다.

이때 $|\overrightarrow{AB}| = 8$ 이므로 이 원은 지름의 길이가 8이다.

원의 중심을 O 라 하면 조건 (나)에서

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{CB}$$

이때 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ 이므로 $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{CB}$

점 D 는 원 위의 점이므로 $|\overrightarrow{OD}| = 4$ 에서

$$2|\overrightarrow{CB}| = 4, |\overrightarrow{CB}| = 2$$

또 두 벡터 $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD}$ 는 서로 평행하다.

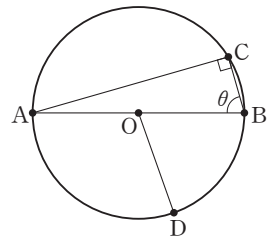
$$\angle ABC = \theta \text{라 하면 } \cos \theta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CB}$ 는 평행하므로

$$\angle AOD = 180^\circ - \theta$$

따라서

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\ &= |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos(180^\circ - \theta) \\ &= |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + 2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos \theta \\ &= 4^2 + 4^2 + 2 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{4} = 40 \end{aligned}$$

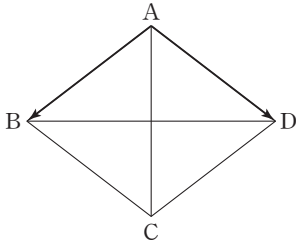


답 ⑤

10

▶ 21056-0246

그림과 같이 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 길이가 각각 6, 8일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 의 값은?



- ① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

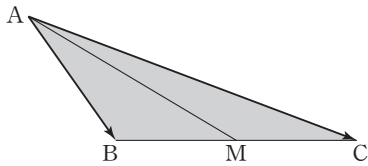
11

▶ 21056-0247

그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점 M에 대하여

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}, \angle AMB = 30^\circ$$

이다. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 48$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



- ① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

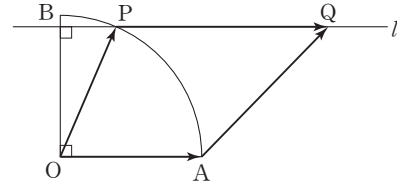
12

▶ 21056-0248

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OAB에서 호 AB 위의 점 P를 지나고 직선 OB에 수직인 직선을 l 이라 하자. 직선 l 위의 점 Q가

$$\overrightarrow{PQ} = 3, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 2$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값은?



- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

유형 5 성분으로 나타낸 평면벡터의 내적

출제유형 | 성분으로 나타낸 평면벡터의 내적을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 성분으로 나타낸 두 평면벡터의 내적을 구하는 방법을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

좌표평면 위의 네 점 $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$ 에 대하여 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

출제 의도

성분으로 나타낸 평면벡터의 내적을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (4, 2), \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (2, 0) - (0, 2) = (2, -2) \\ \text{이므로} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} &= (4, 2) \cdot (2, -2) \\ &= 4 \times 2 + 2 \times (-2) \\ &= 4\end{aligned}$$

답 ⑤

13

▶ 21056-0249

좌표평면 위의 네 점 $A(2, -1)$, $B(5, 1)$, $C(3, 2)$, $D(a, b)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ 일 때, $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC}$ 의 값은?
(단, O는 원점이다.)

- ① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

14

▶ 21056-0250

세 벡터 $\vec{a} = (1, k)$, $\vec{b} = (k, k+2)$, $\vec{c} = (k^2, 1)$ 에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 는 서로 평행하고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$ 는 서로 수직일 때, 상수 k 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15

▶ 21056-0251

두 벡터 $\vec{a} = (1, k)$, $\vec{b} = (3k, 3)$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta = \frac{1}{4}$ 이다. 벡터 $\vec{c} = \left(2, \frac{2}{k}\right)$ 에 대하여 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 0이 아닌 상수이다.)

16

▶ 21056-0252

좌표평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AB}=(3, -5)$, $\overrightarrow{AC}=(-1, a)$ 일 때, 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

- ① -19 ② -17 ③ -15
④ -13 ⑤ -11

17

▶ 21056-0253

좌표평면 위의 네 점 $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(a, b)$, $C(0, c)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| = -10$
(나) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{CA}|$ 의 값은?

- ① $2\sqrt{30}$ ② $5\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{130}$
④ $3\sqrt{15}$ ⑤ $2\sqrt{35}$

유형 6 평면벡터의 내적의 도형에의 활용

출제유형 | 주어진 도형의 기하적 성질을 이용하여 평면벡터의 내적의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

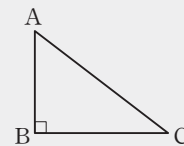
(1) 영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대하여

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(2) 그림에서

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CB}|^2$$



필수 유형

| 2013학년도 대수능 |

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(출제 의도)

벡터의 내적의 정의를 이용하여 내적을 나타낸 후 이차함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$AH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

한편, $\overline{AP} = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$)이라 하면

$\overline{PH} = \sqrt{3} - x$ 이고 두 벡터

$\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| \cos \theta \\ &= \overline{PA} \times (\overline{PB} \cos \theta) \\ &= \overline{PA} \times \{-\overline{PB} \cos(180^\circ - \theta)\} \\ &= \overline{PA} \times (-\overline{PH}) \\ &= x \times \{-(\sqrt{3} - x)\} \\ &= x(x - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

이때 점 P가 점 A일 때도 위의 식은 성립한다.

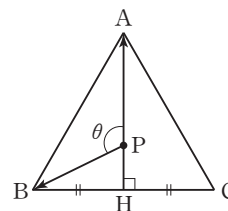
그러므로

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| = |x(x - \sqrt{3})| = \left| \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \right|$$

따라서 $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 는 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, 즉 점 P가 선분 AH의 중점

일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$ 을 가지므로

$$p+q=4+3=7$$



18

▶ 21056-0254

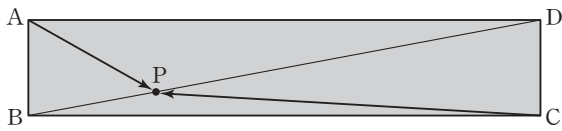
좌표평면 위의 두 점 $A(3, -1)$, $B(7, 2)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ 를 만족시키는 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 C 의 개수가 1일 때, 양수 r 의 값은?

- ① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{12}{5}$ ③ $\frac{13}{5}$
 ④ $\frac{14}{5}$ ⑤ 3

19

▶ 21056-0255

그림과 같이 둘레의 길이가 14인 직사각형 $ABCD$ 가 있다. 대각선 BD 위의 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 최솟값이 -9 일 때, 직사각형 $ABCD$ 의 넓이는?

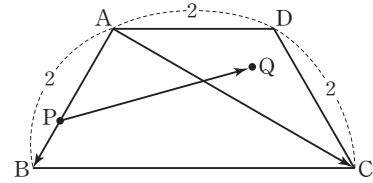


- ① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$
 ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

20

▶ 21056-0256

그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD} = 2$, $\angle ABC = \angle DCB = 60^\circ$ 인 사다리꼴 $ABCD$ 가 있다. 변 AB 위의 점 P 와 사각형 $ABCD$ 의 둘레 또는 내부의 점 Q 가 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$ 을 만족시킬 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

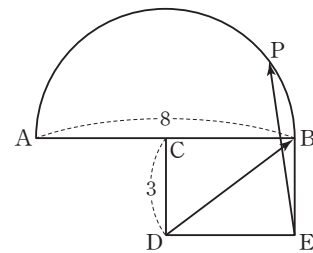


- ① -10 ② -12 ③ -14
 ④ -16 ⑤ -18

21

▶ 21056-0257

그림과 같이 길이가 8인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 의 중점을 C 라 할 때, $\overline{CD} = 3$ 인 직사각형 $CDEB$ 를 선분 DE 가 호 AB 와 만나지 않게 반원과 같은 평면에 그린다. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EP}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 호 AB 위의 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 값은?



- ① $\frac{112}{5}$ ② 24 ③ $\frac{128}{5}$
 ④ $\frac{136}{5}$ ⑤ $\frac{144}{5}$

유형 7 직선의 방정식

출제유형 | 좌표평면에서 방향벡터나 법선벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구하거나 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 좌표평면에서 두 직선이 이루는 각의 크기 또는 두 직선이 서로 수직일 조건과 관련된 문제는 직선의 방향벡터를 이용하여 해결한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

좌표평면 위의 점 $(6, 3)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 3)$ 에 평행한 직선이 x 축과 만나는 점을 A, y 축과 만나는 점을 B라 할 때, $\overline{AB}^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

좌표평면에서 한 점과 방향벡터가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

좌표평면 위의 점 $(6, 3)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 3)$ 에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{3}$$

이 직선이 x 축과 만나는 점 A의 x 좌표는

$$\frac{x-6}{2} = \frac{0-3}{3}$$

에서

$$x=4$$

즉, A(4, 0)

또 이 직선이 y 축과 만나는 점 B의 y 좌표는

$$\frac{0-6}{2} = \frac{y-3}{3}$$

에서

$$y=-6$$

즉, B(0, -6)

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (0-4)^2 + (-6-0)^2 \\ &= 16 + 36 \\ &= 52\end{aligned}$$

답 52

22

▶ 21056-0258

좌표평면 위의 두 직선 $\frac{x-3}{2} = y+1$, $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4}$ 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta$ 의 값은?

① $\frac{2}{5}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{7}{10}$

⑤ $\frac{4}{5}$

23

▶ 21056-0259

좌표평면 위의 점 A(7, 1)에서 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ 의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)

24

▶ 21056-0260

좌표평면 위의 점 $(0, 4)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, 2)$ 인 직선을 l 이라 하자. 직선 l 위의 두 점 A, B에 대하여 삼각형 OAB가 정삼각형일 때, 정삼각형 OAB의 한 변의 길이는?

(단, O는 원점이다.)

① $\frac{7\sqrt{15}}{15}$

② $\frac{8\sqrt{15}}{15}$

③ $\frac{3\sqrt{15}}{5}$

④ $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

⑤ $\frac{11\sqrt{15}}{15}$

유형 8 벡터로 나타낸 원의 방정식

출제유형 | 좌표평면에서 벡터로 나타낸 원의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 좌표평면에서 벡터로 나타낸 원의 방정식을 구하는 방법을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

좌표평면 위의 두 점 $A(6, 0)$, $B(8, 6)$ 에 대하여 점 P 가

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = \sqrt{10}$$

을 만족시킨다. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점 P 를 Q 라 하고, 선분 AB 의 중점을 M 이라 할 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 의 값은?
(단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

출제 의도

벡터로 나타낸 원의 방정식을 이용하여 벡터의 내적의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = \sqrt{10} \text{에서}$$

$$2|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{10}, |\overrightarrow{PM}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

즉, 점 P 는 중심이 M 이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 인 원 위의 점이다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}) \\ &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{MP} \end{aligned}$$

에서 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}$ 은 고정된 값이므로
 $\overrightarrow{OB}$ 와 $\overrightarrow{MP}$ 가 같은 방향일 때 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 값이 최대가 된다.

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기도 θ 이다.

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{6 \times 8}{6 \times \sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{4}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{MQ}| \cos \theta \\ &= 6 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{12\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

답 ③

25

▶ 21056-0261

좌표평면 위의 세 점 $A(1, -2)$, $B(3, 4)$, P 가

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = |\overrightarrow{AB}|^2$ 을 만족시킬 때, 점 P 가 나타내는 도형의 넓이는?

- ① 30π ② 35π ③ 40π
④ 45π ⑤ 50π

26

▶ 21056-0262

좌표평면 위의 세 점 $A(-1, 8)$, $B(11, 2)$, P 에 대하여

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{5}, |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$$

를 만족시키는 서로 다른 두 점 P 를 각각 P_1 , P_2 라 할 때,
 $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

27

▶ 21056-0263

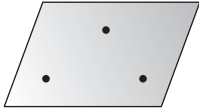
좌표평면 위의 두 점 $A(4, 3)$, P 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$ 라 할 때, $|\vec{p} - \vec{a}| = 2$ 를 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형을 C 라 하자. 점 $B(0, 1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (s, t)$ 인 직선이 C 와 만나도록 하는 두 양수 s , t 에 대하여 $\frac{t}{s}$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

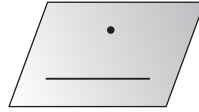
1 직선과 평면의 위치 관계

(1) 평면의 결정 조건

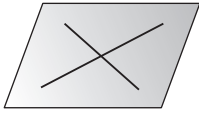
① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점



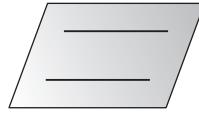
② 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점



③ 한 점에서 만나는 두 직선



④ 평행한 두 직선



(2) 서로 다른 두 직선의 위치 관계

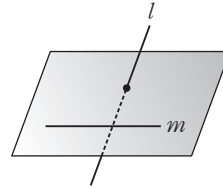
① 한 점에서 만난다.



② 평행하다.



③ 꼬인 위치에 있다.



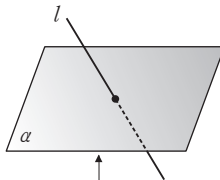
한 평면 위에 있다.

(3) 직선과 평면의 위치 관계

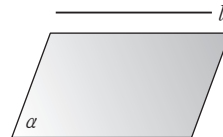
① 직선이 평면에 포함된다.



② 한 점에서 만난다.



③ 평행하다.

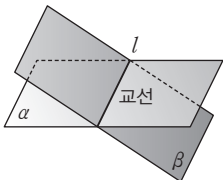


만난다.

참고 직선 l 과 평면 α 가 만나지 않을 때 직선 l 과 평면 α 는 평행하다고 하고, 기호로 $l \parallel \alpha$ 와 같이 나타낸다.

(4) 서로 다른 두 평면의 위치 관계

① 만난다.



② 평행하다.



참고 ① 서로 다른 두 평면이 만날 때 두 평면의 공통부분은 직선이고, 이 직선을 두 평면의 교선이라고 한다.

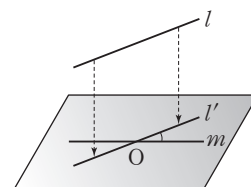
② 서로 다른 두 평면 α, β 가 만나지 않을 때 두 평면 α, β 는 평행하다고 하고, 기호로 $\alpha \parallel \beta$ 와 같이 나타낸다.

2 공간에서 두 직선이 이루는 각

직선 m 위의 한 점 O 를 지나고 직선 l 에 평행한 직선을 l' 이라고 하면 두 직선 l', m 은 점 O 에서 만나고 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l', m 이 이루는 각을 두 직선 l, m 이 이루는 각이라고 한다.

참고 ① 일반적으로 두 직선이 이루는 각은 크기가 크지 않은 쪽을 생각한다.

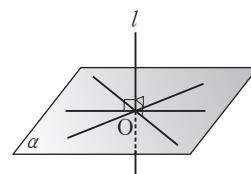
② 두 직선 l, m 이 이루는 각이 직각일 때 두 직선 l, m 은 서로 수직이라 하며, 기호로 $l \perp m$ 과 같이 나타낸다.



3 공간에서 직선과 평면의 수직 관계

공간에서 직선 l 이 평면 α 와 한 점 O 에서 만나고 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때 직선 l 과 평면 α 는 서로 수직이라 하고, 이것을 기호로 $l \perp \alpha$ 와 같이 나타낸다. 이때 직선 l 을 평면 α 의 수선이라고 하며, 직선 l 과 평면 α 가 만나는 점 O 를 수선의 발이라고 한다.

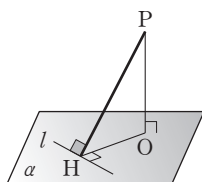
참고 직선 l 이 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$ 이다.



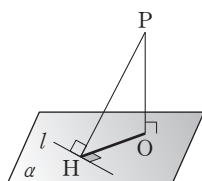
4 삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P , 평면 α 위의 한 점 O , 점 O 를 지나지 않고 평면 α 위에 있는 직선 l , 직선 l 위의 한 점 H 에 대하여 다음이 성립하고 이를 삼수선의 정리라고 한다.

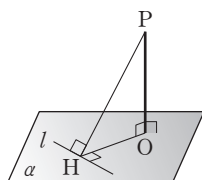
(1) $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$



(2) $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$



(3) $\overline{PH} \perp l, \overline{OH} \perp l, \overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$

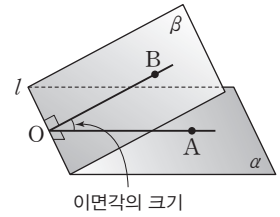


5 이면각

한 직선 l 에서 만나는 두 반평면 α, β 로 이루어진 도형을 이면각이라고 한다.

두 반평면 α, β 의 교선 l 위의 한 점 O 를 지나고 직선 l 에 수직인 두 반직선 OA, OB 를 두 반평면 α, β 에 각각 그으면 점 O 의 위치에 관계없이 $\angle AOB$ 의 크기는 일정하다. 이 일정한 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다. 서로 다른 두 평면이 만나면 네 개의 이면각이 생기는데, 이 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라고 한다.

특히, 두 평면 α 와 β 가 이루는 각이 직각일 때, 두 평면 α 와 β 는 서로 수직이라고 하며 기호로 $\alpha \perp \beta$ 와 같이 나타낸다.



6 정사영

(1) 정사영

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발 P' 을 점 P 의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 또 도형 F 에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F' 을 도형 F 의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

(2) 직선과 평면이 이루는 각

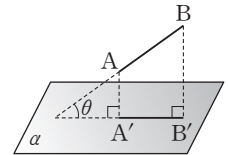
직선 l 과 평면 α 가 한 점에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l 의 평면 α 위로의 정사영 l' 과 직선 l 이 이루는 각을 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각이라고 한다.

(3) 정사영의 길이

선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$, 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를

θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라고 하면

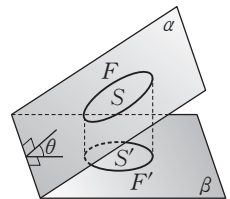
$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$$



(4) 정사영의 넓이

평면 α 위의 도형 F 의 평면 β 위로의 정사영을 F' 이라 하고, F, F' 의 넓이를 각각 S, S' 이라고 할 때, 두 평면 α 와 β 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라고 하면

$$S' = S \cos \theta$$



7 공간좌표

(1) 공간의 한 점 O 에서 서로 직교하는 세 수직선을 각각 x 축, y 축, z 축이라 하고, 이 세 축을 통틀어 좌표축이라고 한다. 이와 같이 좌표축이 정해진 공간을 좌표공간이라 하고, 세 좌표축이 만나는 점 O 를 좌표공간의 원점이라고 한다. 또 x 축과 y 축, y 축과 z 축, z 축과 x 축으로 결정되는 평면을 각각 xy 평면, yz 평면, zx 평면이라고 한다.

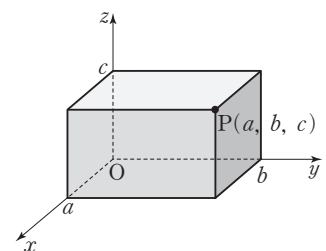
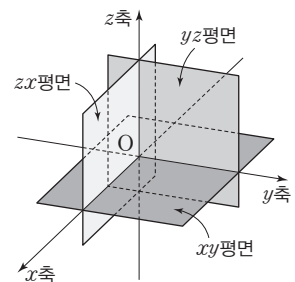
(2) 좌표공간의 한 점 P 에 대하여 점 P 를 지나면서 x 축, y 축, z 축에 수직인 평면이 각각 x 축, y 축, z 축과 만나는 점의 x 축, y 축, z 축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c 라고 할 때, 좌표공간의 점 P 와 세 실수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 는 일대일대응이 된다. 이 순서쌍 (a, b, c) 를 점 P 의 공간좌표 또는 좌표라 하고, 기호로 $P(a, b, c)$ 와 같이 나타낸다. 이때 세 실수 a, b, c 를 각각 점 P 의 x 좌표, y 좌표, z 좌표라고 한다.

(3) 점 $P(a, b, c)$ 의 대칭점

① 점 P 의 x 축, y 축, z 축에 대한 대칭점의 좌표는 각각 $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$ 이다.

② 점 P 의 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 대한 대칭점의 좌표는 각각 $(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$ 이다.

③ 점 P 의 원점에 대한 대칭점의 좌표는 $(-a, -b, -c)$ 이다.



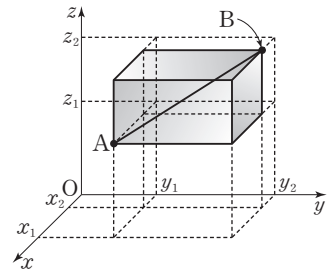
8 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

특히, 원점 $O(0, 0, 0)$ 과 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$



9 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여

(1) 선분 AB 를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right)$$

(2) 선분 AB 를 $m:n$ ($m>0, n>0, m \neq n$)으로 외분하는 점 Q 의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n} \right)$$

(3) 선분 AB 의 중점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

(4) 세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표는

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$$

10 구의 방정식

(1) 중심이 $C(a, b, c)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

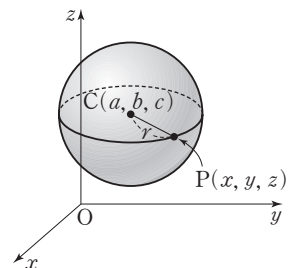
특히, 중심이 원점 $O(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

(2) x, y, z 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ 은 중심의 좌표가

$$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2} \right) \text{이고 반지름의 길이가 } \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}}{2} \text{인 구의 방정식이다.}$$

(단, $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$)



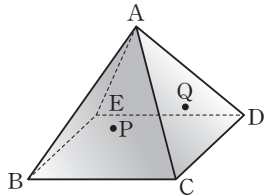
유형 1 직선과 평면의 위치 관계

출제유형 | 입체도형에서 직선과 직선, 직선과 평면의 위치 관계를 파악하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 입체도형에서 꼭짓점, 모서리, 면이 어떤 위치 관계인지를 파악한다.

필수 유형

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 사각뿔 $A-BCDE$ 에서 삼각형 ABC 와 삼각형 ACD 의 무게중심을 각각 P , Q 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

- ㄱ. 직선 BP 와 직선 DQ 는 한 점에서 만난다.
- ㄴ. 직선 PQ 는 평면 $BCDE$ 와 평행하다.
- ㄷ. 7개의 점 A, B, C, D, E, P, Q 중 세 개 이상의 점으로 결정할 수 있는 서로 다른 평면 중 두 점 P, Q 를 동시에 포함하는 평면의 개수는 5이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(출제 의도)

입체도형에서 직선과 직선, 직선과 평면의 위치 관계를 파악할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

- ㄱ. 점 P 와 점 Q 가 각각 삼각형 ABC 와 삼각형 ACD 의 무게중심이고, 두 삼각형은 정삼각형이므로 직선 BP 와 직선 DQ 는 선분 AC 의 중점에서 만난다. (참)
- ㄴ. 직선 AP 와 선분 BC 가 만나는 점을 M , 직선 AQ 와 선분 CD 가 만나는 점을 N 이라 하면 $\overline{AP} : \overline{AM} = \overline{AQ} : \overline{AN} = 2 : 3$ 이므로 직선 PQ 와 직선 MN 은 평행하다. 이때 평면 AMN 과 평면 $BCDE$ 가 만나는 직선이 직선 MN 이므로 직선 PQ 와 평면 $BCDE$ 는 만나지 않는다. 따라서 직선 PQ 는 평면 $BCDE$ 와 평행하다. (참)
- ㄷ. ㄴ에서 두 점 M, N 은 각각 두 선분 BC, CD 의 중점이므로 직선 MN 과 직선 BD 는 평행하다. 즉, 직선 PQ 와 직선 BD 는 평행하다. 따라서 7개의 점 A, B, C, D, E, P, Q 중 일부로

결정할 수 있는 서로 다른 평면 중 점 P, Q 를 동시에 포함하는 평면은

평면 APQ , 평면 BPQ , 평면 CPQ , 평면 EPQ

로 그 개수는 4이다. (거짓)

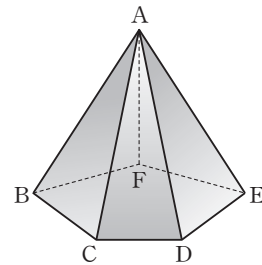
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

01

▶ 21056-0264

그림과 같은 정오각뿔 $A-BCDEF$ 의 6개의 꼭짓점 중 세 개 이상의 점으로 결정할 수 있는 서로 다른 평면의 개수를 a , 각 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 BC 와 한 점에서 만나는 직선의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

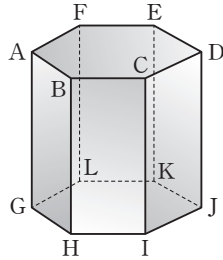


- ① 11 ② 13 ③ 15
 ④ 17 ⑤ 19

02

▶ 21056-0265

그림과 같이 밑면이 정육각형인 육각기둥 $ABCDEF-GHIJKL$ 이 있다. 이 육각기둥의 각 모서리를 포함하는 직선 중 직선 AD 와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는 a , 이 육각기둥의 각 면을 포함하는 평면 중 직선 AJ 와 평행한 평면의 개수는 b 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.



유형 2 두 직선이 이루는 각, 직선과 평면의 수직

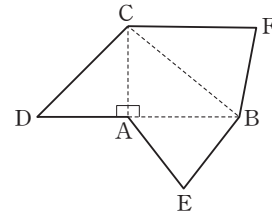
출제유형 | 공간에서 도형의 성질을 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하거나 직선과 평면의 수직 관계를 파악하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 직선이 이루는 각, 직선과 평면의 수직의 정의를 이용하여 수 있도록 직선 또는 평면을 적절히 나타내어 구하는 각이 포함되는 직각삼각형을 만들어 각의 크기를 구한다.

필수 유형

[2012학년도 대수능 9월 모의평가]

그림은 $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{BE}$ 이고 $\angle DAC = \angle CAB = 90^\circ$ 인 사면체의 전개도이다.



이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\overline{CP} = \sqrt{2} \times \overline{BP}$

ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.

ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(출제 의도)

입체도형에서 각 모서리를 포함하는 직선 사이의 위치 관계를 파악할 수 있는 지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 전개도로 사면체를 만들면 그림과 같다.

ㄱ. $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{AP}$ 이고

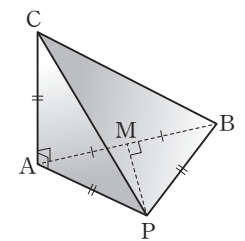
$\angle PAC = \angle DAC = 90^\circ$ 이므로 삼각형 APC는 직각이등변삼각형이다.

따라서

$$\overline{CP} = \sqrt{2} \times \overline{AP} = \sqrt{2} \times \overline{AE} = \sqrt{2} \times \overline{BE} = \sqrt{2} \times \overline{BP} \quad (\text{참})$$

ㄴ. 세 점 A, B, C는 한 평면 위에 있으면서 한 직선 위에 있지 않고, 점 P는 평면 ABC 위에 있지 않다.

따라서 직선 AB와 직선 CP는 평행하지도 않고 만나지도 않으므로 꼬인 위치에 있다. (참)



ㄷ. 삼각형 APB가 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{PM} \perp \overline{AB} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$\overline{AC} \perp \overline{AP}$, $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ 이므로 직선 AC는 평면 APB에 수직이다. 따라서 $\overline{PM} \perp \overline{AC} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$

㉑, ㉒에서 직선 PM이 평면 ABC에 수직이므로 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

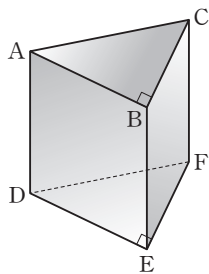
답 ⑤

03

▶ 21056-0266

그림과 같이 밑면이 직각이등변삼각형이고 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 인 삼각기둥 ABC-DEF가 있다. 직선 AB와 직선 CD가 이루는 각의 크기를 α 라 하고, 직선 AB와 직선 CE가 이루는 각의 크기를 β 라 하자. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$ 의 값은?

(단, $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$)



① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

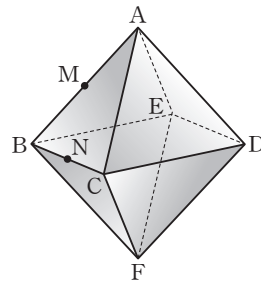
④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

04

▶ 21056-0267

그림과 같이 정팔면체 ABCDEF에서 두 모서리 AB, BC의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. 직선 MN은 평면 DEF와 평행하다.

ㄴ. 직선 MN과 직선 AD가 이루는 예각의 크기는 60° 이다.

ㄷ. 직선 MN은 직선 BD와 서로 수직이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 3 삼수선의 정리

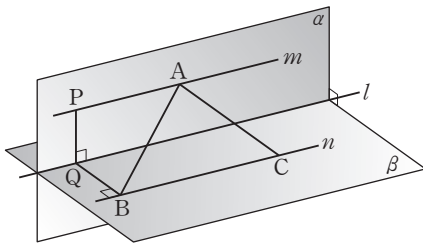
출제유형 | 공간도형에서 삼수선의 정리를 이용하여 직선의 위치 관계를 파악하고 선분의 길이, 도형의 넓이 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 입체도형의 성질과 모서리, 면, 꼭짓점이 어떤 위치 관계에 있는지 파악하고 이를 바탕으로 삼수선의 정리를 이용하여 수직인 두 직선 또는 직각삼각형을 찾아 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2022학년도 대수능 예시문항 |

좌표공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α , β 의 교선을 l 이라 하자. 평면 α 위의 직선 m 과 평면 β 위의 직선 n 은 각각 직선 l 과 평행하다. 직선 m 위의 $\overline{AP}=4$ 인 두 점 A , P 에 대하여 점 P 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 Q , 점 Q 에서 직선 n 에 내린 수선의 발을 B 라 하자. $\overline{PQ}=3$, $\overline{QB}=4$ 이고, 점 B 가 아닌 직선 n 위의 점 C 에 대하여 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이는? [3점]



- ① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

출제 의도

삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 PQB 에서 $\angle PQB=90^\circ$ 이므로

$$\overline{PB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PB}\perp\overline{BC}$ 이므로 점 A 에서 직선 n 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH}=\overline{PB}=5$$

한편, 삼각형 ABC 는 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 점 H 는 선분 BC 의 중점이다.

$$\text{즉, } \overline{BC}=2\overline{BH}=2\overline{PA}=8$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

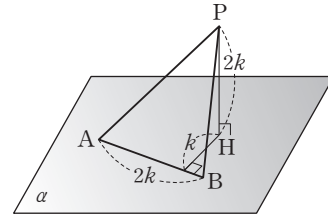
$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$$

답 ②

05

▶ 21056-0268

그림과 같이 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A , B 와 평면 α 위에 있지 않은 점 P 에 대하여 삼각형 PAB 의 넓이는 20이다. 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발 H 에 대하여 점 H 와 직선 AB 사이의 거리가 k 이고 $\overline{AB}=\overline{PH}=2k$ 일 때, k^2 의 값은?

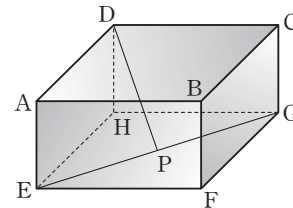


- ① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

06

▶ 21056-0269

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=8\sqrt{2}$, $\overline{AE}=6$ 인 직육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 선분 EG 위의 점 P 에 대하여 선분 DP 의 길이가 자연수가 되는 점 P 의 개수는?

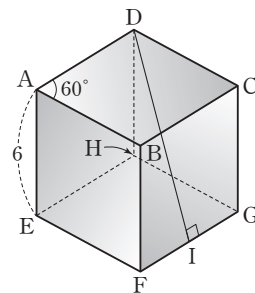


- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

07

▶ 21056-0270

그림과 같이 한 변의 길이가 6이고 $\angle DAB=60^\circ$ 인 마름모를 밑면으로 하고 높이가 6인 사각기둥 $ABCD-EFGH$ 의 꼭짓점 D 에서 모서리 FG 에 내린 수선의 발을 I 라 할 때, $\overline{DI}^2$ 의 값을 구하시오.



유형 4 이면각

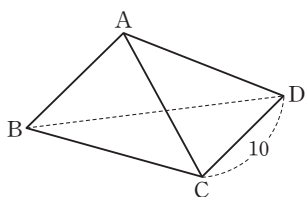
출제유형 | 공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 평면의 교선 위의 한 점에서 교선에 수직인 두 직선을 각 평면에 그어 각의 크기를 구한다.

필수 유형

| 2010학년도 대수능 9월 모의평가 |

사면체 ABCD에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 평면 BCD와 평면 ACD가 이루는 각의 크기는 30° 이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는? [3점]

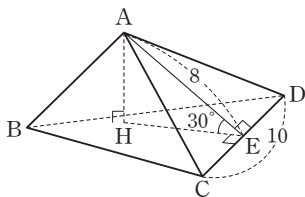


- ① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ 5
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

출제 의도

이면각의 크기를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이



점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 E라 하자. 삼각형 ACD의 넓이가 40이므로 $\overline{AE}=8$

점 H가 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HE} \perp \overline{CD}$ 이다. 이때 평면 BCD와 평면 ACD가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\angle AEH = 30^\circ$$

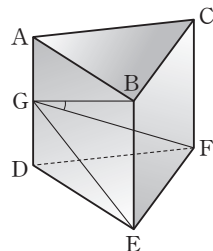
$$\text{따라서 } \overline{AH} = 8 \times \sin 30^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

답 ②

08

▶ 21056-0271

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 삼각기둥 ABC-DEF의 선분 AD 위의 점 G에 대하여 평면 GEF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기가 30° 일 때, $\cos(\angle BGF)$ 의 값은?

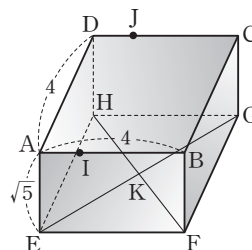


- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

09

▶ 21056-0272

그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AD} = 4$, $\overline{AE} = \sqrt{5}$ 인 직육면체 ABCD-EFGH에서 선분 AB와 선분 DC를 1:3으로 내분하는 점을 각각 I, J라 하고, 선분 EG와 선분 FH의 교점을 K라 하자. 평면 IKJ와 평면 BKC가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?



- ① $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

유형 5 정사영의 길이와 넓이

출제유형 | 주어진 도형의 정사영의 길이 또는 넓이를 구하는 문제, 정사영의 넓이를 이용하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

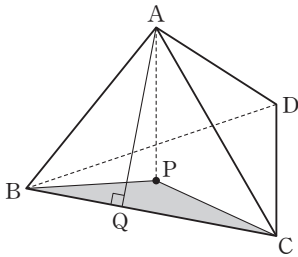
출제유형잡기 | 직선과 평면이 이루는 각, 평면과 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 주어진 도형의 정사영의 길이 또는 넓이를 구한다.

필수 유형

| 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=12$, $\cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 사면체 ABCD에 대하여 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 P라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

$\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 일 때, 삼각형 BCP의 넓이는 k 이다. k^2 의 값을 구하시오. [4점]



(출제 의도)

정사영의 정의를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

이때 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=12$ 이므로 그 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin(\angle ABC)$$

$$=\frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{\sqrt{6}}{3}=18\sqrt{6}$$

한편, $\overline{AP} \perp (\text{평면 BCD})$ 이고 $\overline{AQ} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{PQ} \perp \overline{BC} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에 의하여 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\theta=\angle AQP$ 이고, 삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로 삼각형 BCP의 넓이 k 는

$$k=S \times \cos \theta=18\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{6}=9\sqrt{2}$$

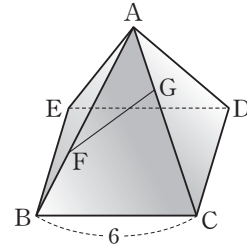
$$\text{따라서 } k^2=(9\sqrt{2})^2=162$$

162

10

▶ 21056-0273

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 사각뿔 A-BCDE에서 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 F, 선분 AC를 1:2로 내분하는 점을 G라 할 때, 선분 FG의 평면 BCDE 위로의 정사영의 길이는?



- ① $\sqrt{7}$
④ $\sqrt{10}$

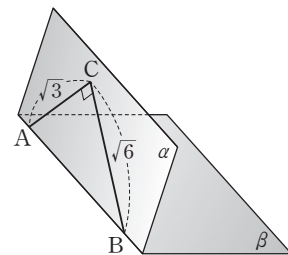
- ② $2\sqrt{2}$
⑤ $\sqrt{11}$

- ③ 3

11

▶ 21056-0274

그림과 같이 두 평면 α , β 가 만나는 직선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 $\overline{AC}=\sqrt{3}$, $\overline{BC}=\sqrt{6}$, $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 두 평면 α , β 가 이루는 예각의 크기가 $\angle CAB$ 의 크기와 같을 때, 선분 BC의 평면 β 위로의 정사영의 길이는?



- ① $\frac{\sqrt{33}}{3}$

- ② 2

- ③ $\frac{\sqrt{39}}{3}$

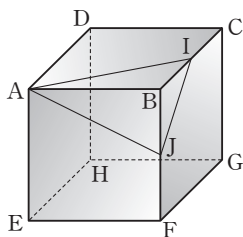
- ④ $\frac{\sqrt{42}}{3}$

- ⑤ $\sqrt{5}$

12

▶ 21056-0275

그림과 같이 정육면체 $ABCD-EFGH$ 의 모서리 BC 위의 점 I , 모서리 BF 위의 점 J 에 대하여 삼각형 AJI 의 평면 $EFGH$ 위로의 정사영의 넓이와 평면 $DHGC$ 위로의 정사영의 넓이가 모두 4이다. 평면 AJI 와 평면 $BFGC$ 가 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 일 때, 사면체 $B-AJI$ 의 부피는?



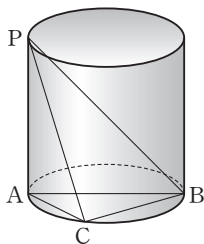
- ① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$
 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

13

▶ 21056-0276

그림과 같이 밑면의 지름 AB 의 길이와 높이 AP 의 길이가 같은 원기둥이 있다. 호 AB 위의 한 점 C 에 대하여 평면 PAC 와 평면 PAB 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 이다. 두 평면 PAB 와 PCB 가 이루는 예각의 크기 α 에 대하여 $\cos^2 \alpha = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



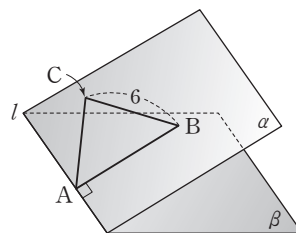
14

▶ 21056-0277

그림과 같이 두 평면 α, β 의 교선 l 위의 한 점 A 에 대하여 평면 α 위의 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 선분 AB 는 직선 l 과 수직이다.
 (나) 선분 BC 의 평면 β 위로의 정사영의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이다.

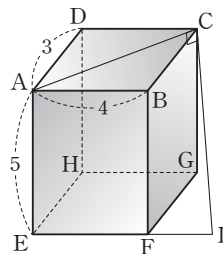
삼각형 ABC 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하시오.



15

▶ 21056-0278

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=5$ 인 직육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 직선 EF 위의 점 I 가 $\overline{AC} \perp \overline{CI}$ 를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

- ㄱ. 직선 AC 는 평면 CGI 에 수직이다.
 ㄴ. 평면 AIC 와 평면 $EFGH$ 가 이루는 예각의 크기를 α 라 할 때, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ 이다.
 ㄷ. 평면 AIC 와 평면 $AEHD$ 가 이루는 예각의 크기를 β 라 할 때, $\cos \beta = \frac{12}{25}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 6 공간좌표와 두 점 사이의 거리

출제유형 | 좌표공간에서 제시된 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구하거나 선분의 길이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 좌표공간에서 주어진 점의 좌표축 또는 좌표평면에 대하여 대칭인 점의 좌표, 좌표축 또는 좌표평면에 내린 수선의 발의 좌표를 구하여 문제를 해결한다. 또한 두 점 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표 또는 선분의 길이를 구한다.

필수 유형

| 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

좌표공간의 점 $P(2, 2, 3)$ 을 yz 평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q 라 하자. 두 점 P 와 Q 사이의 거리는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

좌표공간에서 주어진 점의 좌표평면에 대한 대칭점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

점 $P(2, 2, 3)$ 을 yz 평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q 의 좌표는 $(-2, 2, 3)$ 이다.

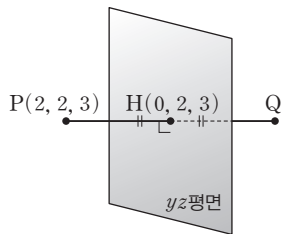
따라서 두 점 P 와 Q 사이의 거리는

$$PQ = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} = 4$$

답 ④

[다른 풀이]

그림과 같이 직선 PQ 는 yz 평면과 수직으로 만나며, 선분 PQ 는 yz 평면에 의해 이등분된다.



직선 PQ 와 yz 평면이 만나는 점을 H 라 하면 $H(0, 2, 3)$ 이므로

$$PH = \sqrt{(0-2)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} = 2$$

따라서 $PQ = 2PH = 2 \times 2 = 4$

16

▶ 21056-0279

좌표공간의 점 $A(3, 2, 4)$ 에서 y 축에 내린 수선의 발을 B , zx 평면에 내린 수선의 발을 C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이는?

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

17

▶ 21056-0280

두 점 $A(4, 3, 2)$, $B(1, -2, 6)$ 에 대하여 직선 AB 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?

- ① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{\sqrt{17}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{19}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

18

▶ 21056-0281

좌표공간에서 두 점 $A(a, 2, 1)$, $B(2, 3, 5)$ 와 xy 평면 위의 점 P , yz 평면 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값과 $\overline{AQ} + \overline{BQ}$ 의 최솟값이 서로 같을 때, 양수 a 의 값은?

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

19

▶ 21056-0282

좌표공간의 세 점 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 4)$, $B(-2, b, 1)$ 에 대하여 삼각형 OAB 는 $\angle AOB = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 삼각형 OAB 를 포함하는 평면과 xy 평면이 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여 $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, $b > 0$)

20

▶ 21056-0283

좌표공간의 네 점 $O(0, 0, 0)$, $A(2, a, b)$, $B(c, 0, 0)$, $C(0, c, 0)$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오. (단, $b > 0, c > 0$)

(가) $\overline{AO} = \overline{AB} = \overline{AC}$

(나) 사면체 $OABC$ 의 부피는 16이다.

21

▶ 21056-0284

좌표공간의 두 점 $A(4, 2, 1)$, $B(a, b, c)$ 에 대하여 선분 AB 의 xy 평면 위로의 정사영의 길이와 yz 평면 위로의 정사영의 길이가 각각 5, 6이다. 선분 AB 의 길이가 최대가 되도록 하는 점 B 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하시오. (단, a, c 는 양수이다.)

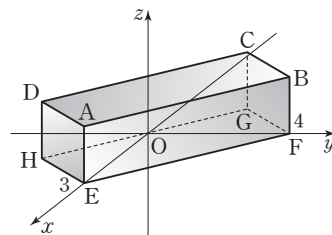
22

▶ 21056-0285

그림과 같이 좌표공간에서 직육면체 $ABCD-EFGH$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AD} = \overline{AE}$

(나) 원점 O 는 변 HG 위에 있고 두 점 E, F 의 좌표는 각각 $(3, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ 이다.



점 C 의 좌표를 (a, b, c) 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

(단, $c > 0$)

① $\frac{76}{25}$

② $\frac{77}{25}$

③ $\frac{78}{25}$

④ $\frac{79}{25}$

⑤ $\frac{16}{5}$

유형 7 선분의 내분점과 외분점

출제유형 | 좌표공간에 주어진 선분의 내분점, 외분점 또는 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 선분의 내분점, 외분점의 좌표를 구하여 문제를 해결한다. 또 삼각형의 무게중심이 중선을 2 : 1로 내분함을 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

좌표공간의 두 점 $A(2, a, -2)$, $B(5, -2, 1)$ 에 대하여 선분 AB 를 2 : 1로 내분하는 점이 x 축 위에 있을 때, a 의 값은?

[2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

(출제 의도)

좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

선분 AB 를 2 : 1로 내분하는 점을 P 라 하면 점 P 의 y 좌표는

$$\frac{2 \times (-2) + 1 \times a}{2+1} = \frac{-4+a}{3}$$

이때 점 P 가 x 축 위에 있으므로

$$\frac{-4+a}{3} = 0$$

따라서 $a=4$

답 ④

23

▶ 21056-0286

좌표공간의 점 $P(1, 2, 3)$ 을 xy 평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q 라 하자. 선분 OQ 를 2 : 3으로 외분하는 점을 R 라 할 때, 선분 PR 의 길이는? (단, O 는 원점이다.)

- ① $2\sqrt{13}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{14}$
④ $\sqrt{58}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

24

▶ 21056-0287

좌표공간의 두 점 $A(2, -3, 1)$, $B(6, 5, -3)$ 에 대하여 $3\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$ 를 만족시키는 직선 AB 위의 서로 다른 두 점 P 를 각각 P_1 , P_2 라 하자. 선분 P_1P_2 의 중점의 좌표가 (a, b, c) 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

25

▶ 21056-0288

좌표공간의 세 점 $A(3, 1, -1)$, $B(0, 5, -1)$, $C(2, 3, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle BAC$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점의 좌표가 (a, b, c) 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

26

▶ 21056-0289

좌표공간의 두 점 $A(2, a, 4)$, $B(b, c, 7)$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 선분 AB 를 $1:3$ 으로 내분하는 점은 z 축 위에 있다.
(나) 선분 AB 의 yz 평면 위로의 정사영의 길이는 5이다.

$a+b+c$ 의 값은? (단, $a>0$)

- ① -10 ② -9 ③ -8
④ -7 ⑤ -6

27

▶ 21056-0290

좌표공간에 세 점 $A(a, -1, 2)$, $B(-4, b, 3)$, $C(4, 0, c)$ 가 있다. xy 평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소가 되는 점 P 가 삼각형 ABC 의 무게중심일 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

28

▶ 21056-0291

좌표공간의 두 점 $A(a, 4, -1)$, $B(3, -2, 5)$ 에 대하여 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

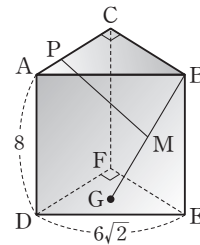
- (가) 점 P 는 선분 AB 와 zx 평면의 교점이다.
(나) $\overline{BP} = 3$

양수 a 의 값을 구하시오.

29

▶ 21056-0292

그림과 같이 빗변의 길이가 $6\sqrt{2}$ 인 직각이등변삼각형을 밑면으로 하고 높이가 8인 삼각기둥 $ABC-DEF$ 가 있다. 삼각형 DEF 의 무게중심을 G , 선분 BG 의 중점을 M 이라 하자. 선분 AC 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P 라 할 때, $\overline{PM}^2$ 의 값을 구하시오.



유형 8 구의 방정식

출제유형 | 좌표공간에서 구의 방정식, 구와 좌표축 또는 좌표평면과의 관계를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 좌표공간에서 구와 관련된 문제는 좌표평면에서의 원의 성질을 확장하여 해결한다. 즉, 구와 직선이 만나서 생기는 선분의 중점과 구의 중심을 지나는 직선은 선분에 수직이고, 구와 평면이 만나서 생기는 원의 중심과 구의 중심을 지나는 직선은 원을 포함하는 평면에 수직임을 이용한다.

필수 유형

[2014학년도 대수능]

좌표공간에서 중심의 x 좌표, y 좌표, z 좌표가 모두 양수인 구 S 가 x 축과 y 축에 각각 접하고 z 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S 가 xy 평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π 이고 z 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S 의 반지름의 길이는? [4점]

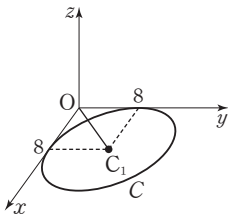
- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

출제 의도

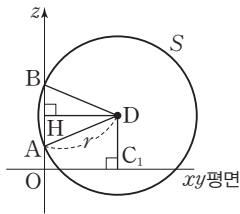
구와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 넓이와 구와 z 축이 만나서 생기는 선분의 길이를 이용하여 구의 반지름의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

구 S 가 xy 평면과 만나서 생기는 원을 C 라 하면 원 C 의 넓이가 64π 이므로 원 C 의 반지름의 길이는 8이다. 이때 구 S 가 x 축, y 축에 각각 접하므로 [그림 1]과 같이 원 C 의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $C_1(8, 8, 0)$ 이고 원점 O 에 대하여 $\overline{OC_1} = 8\sqrt{2}$ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

한편, [그림 2]와 같이 구 S 가 z 축과 만나는 두 점을 각각 A , B 라 하면 $\overline{AB} = 8$

구 S 의 중심을 D , 점 D 에서 z 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H 는 선분 AB 의 중점이다.

또 점 D 에서 xy 평면에 내린 수선의 발이 원 C 의 중심 C_1 이므로 사각형 $DHOC_1$ 은 직사각형이다.

이때 직각삼각형 DHA 에서

$$\overline{DH} = \overline{OC_1} = 8\sqrt{2}$$

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

따라서 구 S 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{128 + 16} \\ &= \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

답 ②

30

▶ 21056-0293

좌표공간의 두 점 $A(a, 3, -1)$, $B(-2, 1, -5)$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 구가 원점을 지난다. 이 구가 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

31

▶ 21056-0294

반지름의 길이가 7인 구 S 가 x 축과 두 점 $A(-2\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(6\sqrt{2}, 0, 0)$ 에서 만나고, y 축과 두 점 $C(0, -4, 0)$, $D(0, 6, 0)$ 에서 만나고, z 축과 두 점 E , F 에서 만난다. 선분 EF 의 길이는?

- ① 12 ② $4\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{11}$
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{13}$

32

▶ 21056-0295

좌표공간에서 점 $C(a, b, c)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 구 S 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 구 S 는 x 축과 점 A 에서만 만난다.
 (나) 구 S 는 yz 평면과 점 B 에서 접한다.

평면 ABC 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때,
 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 이다. $a \times b \times c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 양수이다.)

- ① $36\sqrt{2}$ ② $42\sqrt{2}$ ③ $48\sqrt{2}$
 ④ $54\sqrt{2}$ ⑤ $60\sqrt{2}$

33

▶ 21056-0296

좌표공간에서 점 $A(8, 6, -4)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구가 xy 평면과 만나서 생기는 도형을 C_1 이라 하자. 점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 점 A' 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 인 구가 zx 평면과 만나서 생기는 도형을 C_2 라 하자. C_1 위의 점 P , C_2 위의 점 Q , x 축 위의 점 R 에 대하여 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 의 최솟값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

34

▶ 21056-0297

좌표공간에서 xy 평면에 수직이고

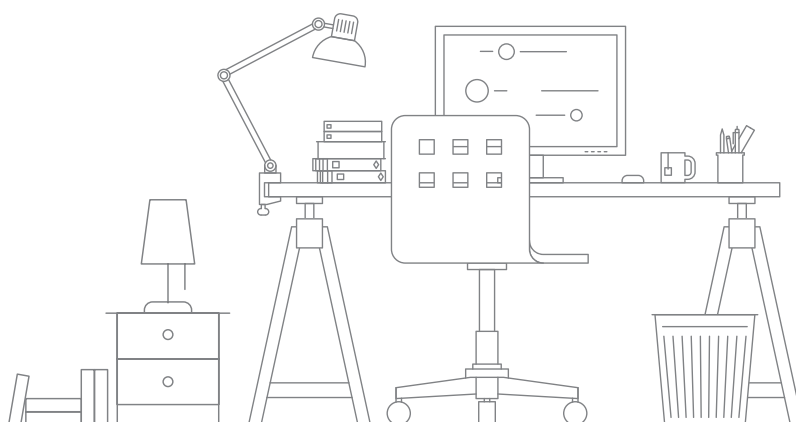
구 $S_1 : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-10)^2 = 1$ 에 접하는 평면이 구 $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 64$ 와 만나서 생기는 원의 넓이의 최솟값은 $a\pi$ 이다. a 의 값을 구하시오.

이 책의 차례

CONTENTS

실전편

회차	페이지
실전 모의고사 1회	130
실전 모의고사 2회	138
실전 모의고사 3회	146
실전 모의고사 4회	154
실전 모의고사 5회	162



5지선다형

01

▶ 21054-1001

 $(\sqrt[3]{4})^{\log_2 27}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

02

▶ 21054-1002

함수 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
 ④ 16 ⑤ 18

03

▶ 21054-1003

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x \leq 1) \\ 4x + a & (x > 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

04

▶ 21054-1004

좌표평면에서 시초선을 원점에서 x 축의 양의 방향으로 잡을 때, 각 θ 를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 원이 만나는 점의 좌표가 $(2, a)$ 이다. $\tan \theta = -2$ 일 때, $\frac{a}{\cos \theta}$ 의 값은? [3점]

- ① $-4\sqrt{5}$ ② $-2\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$
 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

05

▶ 21054-1005

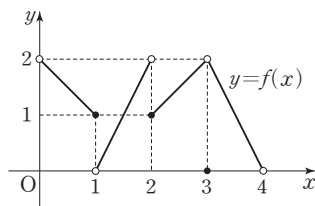
세 수 $4, a, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $\log_2 3, \log_2 a, \log_2(b+1)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 두 양수 a, b 에 대하여 ab 의 값은? [3점]

- ① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

06

▶ 21054-1006

열린구간 $(0, 4)$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

07

▶ 21054-1007

양의 실수 k 에 대하여 k 의 제곱근 중 양의 실수인 것을 a 라 할 때, a 보다 큰 정수 중에서 가장 작은 값을 $f(k)$ 라 하자. 또한 양의 실수 k 에 대하여 k 의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, b 보다 큰 정수 중에서 가장 작은 값을 $g(k)$ 라 하자. 예를 들어 $k=4$ 일 때, $a=2$ 이므로 $f(4)=3$ 이고 $b=\sqrt[3]{4}$ 이므로 $g(4)=2$ 이다. $(f \circ g)(k)=2$ 를 만족시키는 모든 k 의 값의 범위는 $\alpha < k < \beta$ 이다. $\alpha + \beta$ 의 값은? [3점]

- ① 25 ② 26 ③ 27
 ④ 28 ⑤ 29

08

▶ 21054-1008

다항함수 $f(x)$ 가 상수 a ($a > 0$)과 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x f(t) dt = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

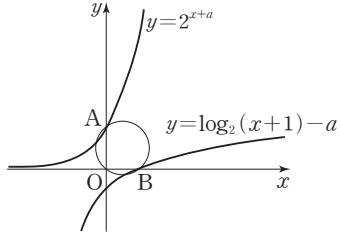
를 만족시킨다. $a + f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

09

▶ 21054-1009

그림과 같이 양수 a 에 대하여 곡선 $y=2^{x+a}$ 이 y 축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=\log_2(x+1)-a$ 가 x 축과 만나는 점을 B라 하자. 세 점 A, B, O를 지나는 원의 넓이가 $\frac{13}{4}\pi$ 일 때, a 의 값은?
(단, O는 원점이다.) [4점]



- ① 1 ② $\log_2 3$ ③ 2
④ $\log_2 5$ ⑤ $\log_2 6$

10

▶ 21054-1010

양수 k 에 대하여 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(k)$ 의 값은? [4점]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = k \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2} = 4 \end{aligned}$$

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

11

▶ 21054-1011

수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+2)a_{n+1} - S_n = n+3 \quad \cdots \cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \text{(좌변)} &= 3a_2 - S_1 \\ &= 3a_2 - a_1 \\ &= 3 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4 \end{aligned}$$

(우변) = 4

이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} (k+2)a_{k+1} - S_k &= k+3 \\ \text{[(가)]} \quad a_{k+1} - S_{k+1} &= k+3 \quad \cdots \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} - \text{[(나)]} \quad \text{이므로}$$

㉠에 이 식을 대입하면

$$(k+3)a_{k+2} - S_{k+1} = \text{[(다)]}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+2)a_{n+1} - S_n = n+3$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$ 라 할 때, $\frac{f(12) \times g(2)}{h(2)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

12

▶ 21054-1012

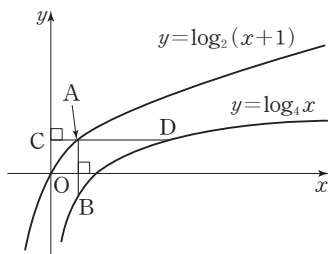
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=6$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 점 $(1, f(1))$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점에서의 접선 중 기울기가 -1 인 직선이 점 $(-10, a)$ 를 지날 때, a 의 값은? [4점]

- ① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

13

▶ 21054-1013

그림과 같이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 A의 x 좌표는 1보다 작은 양수이다. 점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$ 와 만나는 점을 B라 하고, 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 y 축, 곡선 $y=\log_4 x$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 선분 AB의 길이가 자연수 k 일 때 세 점 A, C, D를 각각 A_k, C_k, D_k 라 하자. k 의 최솟값을 l 이라 할 때, $\sum_{k=l}^{l+9} \frac{C_k D_k}{C_k A_k}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{2^{20}-4}{3}$ ② $\frac{2^{22}-16}{3}$ ③ $\frac{2^{22}-4}{3}$
④ $\frac{2^{24}-16}{3}$ ⑤ $\frac{2^{24}-4}{3}$

14

▶ 21054-1014

자연수 n 에 대하여 $0 \leq x < \pi$ 일 때, 방정식

$$\tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) - \sin 2nx = 0$$

의 서로 다른 모든 실근의 합을 a_n 이라 하자. $\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 31π ② 33π ③ 35π
④ 37π ⑤ 39π

15

▶ 21054-1015

실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - 3ax + a^2 + a$ 라 하자. 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 두 함수 $f(x), |f(x)|$ 의 최댓값을 각각 $g(a), h(a)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

$$\neg. g(2) = 11$$

$$\neg. \text{함수 } g(a) \text{의 최솟값은 } \frac{9}{16} \text{이다.}$$

$$\neg. h\left(-\frac{1}{2}\right) + h(1) = \frac{25}{4}$$

- ① $\neg$ ② $\neg$ ③ $\neg, \neg$
④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg, \neg$

단답형

16

▶ 21054-1016

 $\int_0^1 (4x^3 + 6x^2 + 5) dx$ 의 값을 구하시오. [3점]
17

▶ 21054-1017

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$a_1 = 1, S_{n+2} - S_n = 3a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이 성립한다. $S_{10} = 150$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [3점]

18

▶ 21054-1018

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가

$$x = 2t^3 - 2t^2$$

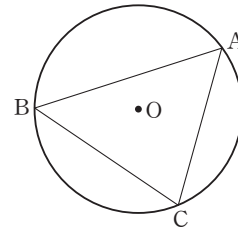
이다. 점 P가 원점을 출발 후 운동 방향을 바꾸는 시각 t 에서 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

19

▶ 21054-1019

그림과 같이 중심이 O인 원 위에 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 놓여 있고, 점 O와 변 AB 사이의 거리와 점 O와 변 AC 사이의 거리의 비는 $1 : 2$ 이다. $\overline{AB} = 8\sqrt{2}$, $\sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 일 때,

$\sin^2 B = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 점 O는 삼각형 ABC의 내부에 있고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]



20

▶ 21054-1020

두 정수 p, q 에 대하여 삼차방정식 $x^3 - px^2 + (2p^2 - 3p)x + q + 1 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 때, $10p + q$ 의 값을 구하시오. [4점]

21

▶ 21054-1021

다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 존재하도록 하는 자연수 p 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a_1 = 1, a_{18} = 32$ (나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n \leq p) \\ \log_2 a_n & (a_n > p) \end{cases}$$

이다.

22

▶ 21054-1022

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 0을 갖는다.(나) $g'(x) = f(x) + (x-2)f'(x)$ (다) 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{3}{4}$ 을 갖는다.

$f(1) + g(1) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5지선다형

기하

23

▶ 21056-1023

좌표공간의 두 점 $A(4, 3, 2)$, $B(1, -2, -6)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점의 x 좌표는? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

24

▶ 21056-1024

쌍곡선 $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{32} = 1$ 위의 점 $A(6, -4)$ 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는?

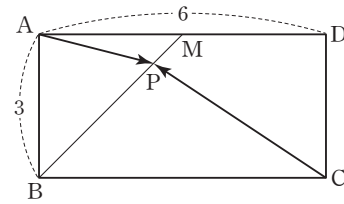
[3점]

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$
 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

25

▶ 21056-1025

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=6$ 인 직사각형 ABCD에서 변 AD의 중점을 M이라 하자. 선분 BM 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 최솟값은? [3점]

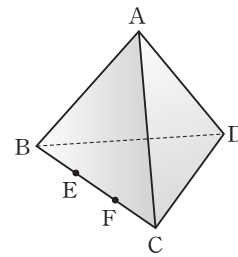


- ① $-\frac{25}{2}$ ② $-\frac{81}{8}$ ③ -8
 ④ $-\frac{49}{8}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

26

▶ 21056-1026

그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD에서 모서리 BC를 삼등분하는 점을 점 B에서 가까운 것부터 차례로 E, F라 하자. 직선 AF와 직선 DE가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? (단, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) [3점]

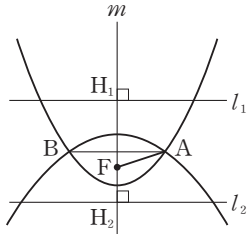


- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
 ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

27

▶ 21056-1027

그림과 같이 평행한 두 직선 l_1, l_2 에 수직인 직선 m 이 두 직선 l_1, l_2 와 만나는 점을 각각 H_1, H_2 라 하자. 선분 H_1H_2 위의 점 F 를 초점으로 하고, 두 직선 l_1, l_2 를 각각 준선으로 하는 두 포물선이 만나는 두 점을 A, B 라 할 때, $\overline{AB}=8\sqrt{2}$, $\overline{H_1F} : \overline{H_2F}=2 : 1$ 이다. 선분 AF 의 길이는? [3점]



① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

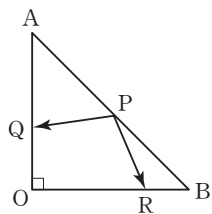
28

▶ 21056-1028

그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{OB}=2$ 이고 $\angle AOB=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 AOB 가 있다. 변 AB 위를 움직이는 점 P , 변 OA 위를 움직이는 점 Q , 변 OB 위를 움직이는 점 R 에 대하여

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}$$

를 만족시키는 점 X 가 나타내는 영역의 넓이는? [4점]



① 20

② 22

③ 24

④ 26

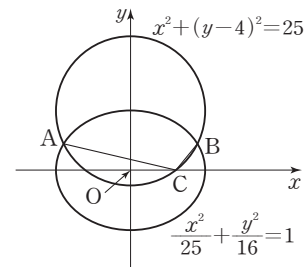
⑤ 28

단답형

29

▶ 21056-1029

그림과 같이 원 $x^2+(y-4)^2=25$ 가 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하고, 원이 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 양수인 점을 C 라 하자. 두 선분 AC, BC 의 길이를 각각 p, q 라 할 때, $18pq$ 의 값을 구하시오. [4점]

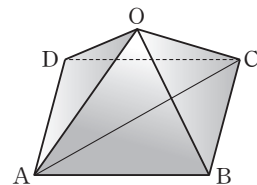


30

▶ 21056-1030

그림과 같이 밑면 $ABCD$ 가 정사각형이고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=3$ 인 사각뿔 $O-ABCD$ 가 있다. 두 점 B, C 에서 직선 OA 에 내린 수선의 발을 각각 H, I 라 하자. $\overline{BH} : \overline{CI}=\sqrt{5} : \sqrt{2}$ 일 때, 선분 BH 의 평면 OAC 위로의 정사영의 길이는 l 이다. $l^2=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



5지선다형

01

▶ 21054-1031

 $\sqrt[3]{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt[3]{4}$
 ④ 2 ⑤ 4

02

▶ 21054-1032

 $\int_{-2}^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$ 의 값은? [2점]

- ① 8 ② 12 ③ 16
 ④ 20 ⑤ 24

03

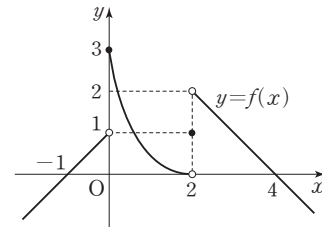
▶ 21054-1033

 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5, \sum_{k=1}^{10} b_k = 8$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (3a_k - b_k)$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

04

▶ 21054-1034

 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

05

▶ 21054-1035

 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \tan x = 2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π
 ④ 2π ⑤ 4π

06

▶ 21054-1036

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치가 각각

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + t - 1, \quad g(t) = 3t^2 - 3t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도의 합은? [3점]

- ① 12 ② 14 ③ 16
 ④ 18 ⑤ 20

07

▶ 21054-1037

방정식 $(\log_2 x)^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x - 8 = 0$ 의 서로 다른 모든 실근의 곱은? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

08

▶ 21054-1038

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)+2}{h} = 1$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$ 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -3 ③ -2
 ④ -1 ⑤ 0

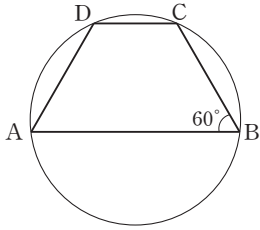
09

▶ 21054-1039

그림과 같이 반지름의 길이가 R 인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=5, \overline{BC}=3, \overline{CD}=2, \angle ABC=60^\circ$$

일 때, $\overline{AD}+R^2$ 의 값은? [4점]



- ① 9 ② $\frac{28}{3}$ ③ $\frac{29}{3}$
 ④ 10 ⑤ $\frac{31}{3}$

10

▶ 21054-1040

함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1 \text{ 또는 } x > 2) \\ 3x-4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) \{f(x) - a\} \{f(x) + a\}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a 의 개수는 n 이고 실수 a 의 최댓값은 m 이다. $n+m$ 의 값은? [4점]

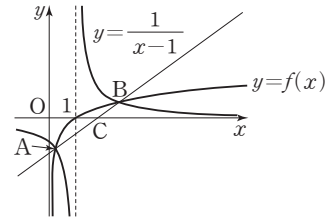
- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

11

▶ 21054-1041

그림과 같이 좌표평면에서 함수 $f(x) = \log_p x$ ($p > 1$)의 그래프와 곡선 $y = \frac{1}{x-1}$ 이 만나는 두 점을 각각 $A(a, f(a))$,

$B(b, f(b))$ ($a < b$)라 하고, 직선 AB가 x 축과 만나는 점을 C라 하자. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 2$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]



- ① $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-1 + \sqrt{3}$
 ④ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $1 + \sqrt{3}$

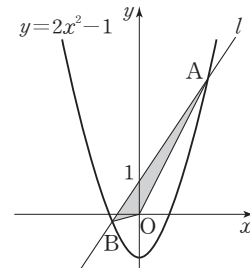
12

▶ 21054-1042

그림과 같이 점 $(0, 1)$ 을 지나고 기울기가 a 인 직선 l 이 곡선 $y = 2x^2 - 1$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 ABO

의 넓이를 $S(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a+1}$ 의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

13

▶ 21054-1043

모든 자연수 n 에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^5, b_n = \sum_{k=1}^n k^7$$

을 각각 만족시킨다. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + b_n = \frac{1}{8} n^4 (n+1)^4 \quad \dots\dots (*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1^5 + 1^7 = 2, (\text{우변}) = \frac{1}{8} \times 2^4 = 2$$

이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$a_m + b_m = \frac{1}{8} m^4 (m+1)^4$$

이다. $n=m+1$ 일 때

$$a_{m+1} + b_{m+1}$$

$$= \frac{1}{8} m^4 (m+1)^4 + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \frac{1}{8} (m+1)^4 [m^4 + \boxed{\text{(나)}} \times \{(m+2)^2 + m^2\}]$$

$$= \frac{1}{8} \{ \boxed{\text{(다)}} \}^4$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + b_n = \frac{1}{8} n^4 (n+1)^4$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$ 이라 할 때, $f(1)+g(3)+h(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 210 ② 212 ③ 214
④ 216 ⑤ 218

14

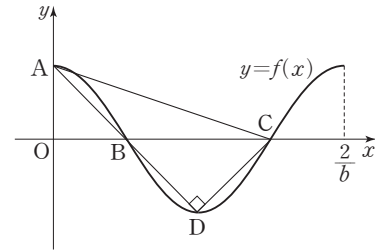
▶ 21054-1044

그림과 같이 두 상수 a, b ($a>0, b>0$)에 대하여 함수

$f(x) = a \cos b\pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{2}{b}$)의 그래프가 y 축과 만나는 점을

A, x 축과 만나는 점 중 x 좌표가 작은 점부터 차례로 B, C, 직선 AB와 만나는 점 중 두 점 A, B가 아닌 점을 D라 하자.

$\angle ADC = 90^\circ$ 이고, 삼각형 ADC의 넓이가 18일 때, $a+b$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ 3
④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

15

▶ 21054-1045

실수 t 에 대하여 함수 $f(x) = x^2(x-t)^2$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{t}{2}$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $t \neq 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{t}{2}$ 에서 극댓값을 가진다.

ㄴ. $\lim_{t \rightarrow a^-} g(t) < \lim_{t \rightarrow a^+} g(t)$ 를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은 2이다.

ㄷ. 방정식 $t+1-g(t)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16

▶ 21054-1046

함수 $f(x) = x^2 + 4x + 3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int f'(x) dx + \int f(x) dx$$

라 하자. $g(0) = 3$ 일 때, $g(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

17

▶ 21054-1047

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수

$$f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3$$

의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M^2 + m^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

18

▶ 21054-1048

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 10이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (\log_2 a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}) \\ \log_2 a_n & (\log_2 a_n \text{이 자연수인 경우}) \end{cases}$$

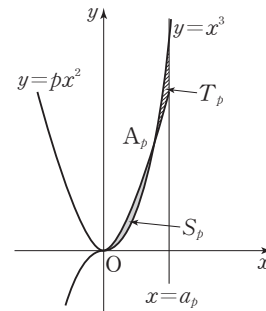
를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

19

▶ 21054-1049

그림과 같이 양의 실수 p 에 대하여 두 곡선 $y = x^3$, $y = px^2$ 은 제1사분면 위의 점 A_p 에서 만난다. 두 곡선 $y = x^3$, $y = px^2$ 으로 둘러싸인 색칠한 부분의 넓이 S_p 와 두 곡선 $y = x^3$, $y = px^2$ 과 직선 $x = a_p$ 로 둘러싸인 빗금친 부분의 넓이 T_p 가 서로 같을 때, $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{6a_p}{p+1}$ 의 값을 구하시오.

(단, a_p 의 값은 점 A_p 의 x 좌표보다 크다.) [3점]

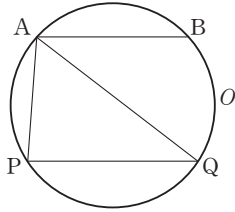


20

▶ 21054-1050

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 O 에서 현 AB 의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다. 직선 AB 와 평행한 직선이 원 O 와 두 점에서 만날 때 만나는 두 점을 P, Q 라 하면 삼각형 APQ 의 넓이는 $\overline{PQ}=a$ 에서 최댓값을 가진다. $a^2=m+2\sqrt{n}$ 일 때, 두 자연수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값을 구하시오.

(단, 직선 PQ 는 직선 AB 가 아니다.) [4점]



21

▶ 21054-1051

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 은 공차가 3인 등차수열이다.

(나) $a_{20}=32$

$\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

22

▶ 21054-1052

$f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)을 다음과 같이 정의한다.

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 1) \\ f(1) & (1 \leq x < 2) \\ f(x-1) & (2 \leq x < 3) \\ f(2) & (3 \leq x < 4) \\ f(x-2) & (4 \leq x < 5) \\ \vdots & \vdots \\ f(n) & (2n-1 \leq x < 2n) \\ f(x-n) & (x \geq 2n) \end{cases}$$

함수 $g_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)과 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음이 성립할 때, $f(10)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g_n(x)$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수를

a_n ($n=1, 2, 3, \dots$)이라 하자. 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$b_n = a_{n+p}$ 일 때, 수열 $\{b_n\}$ 이 등차수열을 이루게 하는 자연수 p 의 최솟값은 5이다.

(나) $\int_0^{q+1} g_6(x) dx = \int_0^q g_5(x) dx$ 를 만족시키는 자연수 q 의 최솟값은 11이다.

(다) $\int_0^{20} g_6(x) dx - \int_0^{14} f(x) dx = 21$

5지선다형

기하

23

▶ 21056-1053

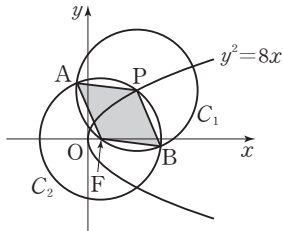
좌표공간의 점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점과 점 B를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 모두 $(3, 4, -2)$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

24

▶ 21056-1054

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 점 P를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원을 C_1 , 점 F를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원을 C_2 라 하고, 두 원 C_1, C_2 가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 사각형 AFBP의 넓이가 $50\sqrt{3}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a>0, b>0$) [3점]



- ① 16 ② 18 ③ 20
 ④ 22 ⑤ 24

25

▶ 21056-1055

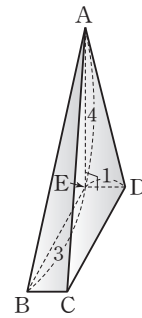
$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$ 인 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

26

▶ 21056-1056

그림과 같이 $\overline{BE}=3, \overline{DE}=1$ 인 직사각형 BCDE를 밑면으로 하고 $\overline{AE}=4$ 인 사각뿔 A-BCDE에 대하여 직선 AE가 평면 BCDE에 수직일 때, 삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{10}{13}$ ② $\frac{25}{26}$ ③ $\frac{15}{13}$
 ④ $\frac{35}{26}$ ⑤ $\frac{20}{13}$

27

▶ 21056-1057

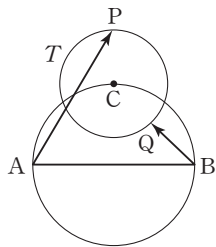
타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 A(1, 2)에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P는 점 A가 아니다.) [3점]

- ① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$
④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

28

▶ 21056-1058

그림과 같이 좌표평면에서 길이가 3인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 T라 하자. 원 T 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BQ}|$ 의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$ 의 값은? [4점]



- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

단답형

29

▶ 21056-1059

자연수 n 에 대하여 점 $(6-n, n)$ 에서 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 24$ 에 그을 수 있는 서로 다른 모든 접선의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

30

▶ 21056-1060

좌표공간에 중심의 x 좌표, y 좌표, z 좌표가 모두 양수이고, xy 평면, yz 평면, zx 평면 중 어느 것과도 만나지 않는 구 S가 있다. 원점 O를 지나는 직선이 구 S와 한 점에서만 만날 때, 만나는 점 중에서 z 좌표가 가장 큰 점을 P, 가장 작은 점을 Q라 하면 삼각형 OPQ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 OPQ는 정삼각형이다

(나) 삼각형 OPQ의 무게중심의 좌표는 $(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}, 2)$ 이다.

선분 PQ의 xy 평면 위로의 정사영의 길이를 l 이라 할 때, l^2 의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

01

 $\sqrt[5]{16} \times \sqrt[10]{8}$ 의 값은? [2점]

▶ 21054-1061

- ① 2 ② $2^{\frac{11}{10}}$ ③ $2^{\frac{6}{5}}$
 ④ $2^{\frac{13}{10}}$ ⑤ $2^{\frac{7}{5}}$

02

 $\int_0^1 x^3(a-x^2)dx = \frac{5}{12}$ 일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

▶ 21054-1062

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

03

▶ 21054-1063

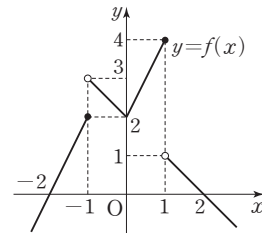
함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프가 점 $(1, a)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 8 ③ 12
 ④ 16 ⑤ 20

04

▶ 21054-1064

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

05

▶ 21054-1065

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 일 때,
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{8}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $-\frac{6}{5}$
 ④ -1 ⑤ $-\frac{4}{5}$

06

▶ 21054-1066

다항함수 $f(x)$ 와 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$F(x) = (x+1)f(x) - 4x^3 - 6x^2$$

을 만족시킬 때, $f'(-1)$ 의 값은? [3점]

- ① -12 ② -10 ③ -8
 ④ -6 ⑤ -4

07

▶ 21054-1067

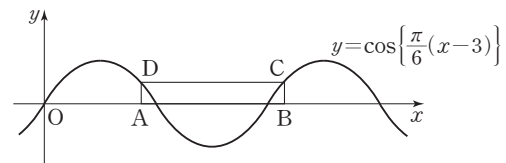
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$ 이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$ 이다. 곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 중에서 x 좌표가 1인 점에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, $a-b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 18 ② 19 ③ 20
 ④ 21 ⑤ 22

08

▶ 21054-1068

그림과 같이 두 점 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 이 x 축 위에 있고 두 점 C, D 가 함수 $y=\cos\left\{\frac{\pi}{6}(x-3)\right\}$ 의 그래프 위에 있는 직사각형 ABCD가 있다. $\overline{AB}=8$ 일 때, 직사각형 ABCD의 넓이는?
 (단, $3 < x_1 < 6, 12 < x_2 < 15$) [3점]



- ① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

09

▶ 21054-1069

함수

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + a & (x < b) \\ 2x & (x \geq b) \end{cases}$$

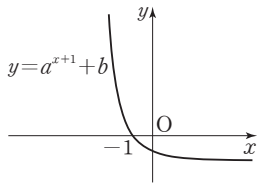
가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a 의 최댓값은?(단, a, b 는 실수이다.) [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

10

▶ 21054-1070

좌표평면 위에서 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 함수 $y = a^{x+1} + b$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y = \log_a(bx)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은? (단, $a > 0, a \neq 1, b$ 는 상수이다.) [4점]



- ① ②
③ ④
⑤

11

▶ 21054-1071

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 되었다. 방정식 $g(x) = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a 의 개수는? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

12

▶ 21054-1072

다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{5}{3}, \int_0^1 xf(x) dx = 0$$

일 때, $\int_0^1 \{f(x) - 2ax + a^2\}^2 dx$ 의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13

▶ 21054-1073

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_n = \frac{3S_n^2}{3S_n + 1} \quad (n \geq 2)$$

가 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.
(단, $3S_n + 1 \neq 0$, $S_n \neq 0$)

2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{이므로 } S_n - S_{n-1} = \frac{3S_n^2}{3S_n + 1}, \text{ 즉}$$

$$(S_n - S_{n-1})(3S_n + 1) = 3S_n^2$$

$$(1 - 3S_{n-1})S_n = S_{n-1}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_{n-1}} + \boxed{\text{(가)}}, \frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1 \text{이다.}$$

이때 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $\boxed{\text{(가)}}$ 인 등차수열이다.

$$\text{그러므로 } S_n = \boxed{\text{(나)}}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } a_n = \boxed{\text{(다)}} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{따라서 } a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ \boxed{\text{(다)}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

위의 (가)에 알맞은 수를 k , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $kf(3)g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{17}{100}$ ③ $\frac{9}{50}$
④ $\frac{19}{100}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

14

▶ 21054-1074

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 원점 O를 동시에 출발하여 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 4t^2 - 6at - a^2, \quad v_2(t) = t^2 + 6at - 10a^2$$

이고, t 초 후 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a 는 실수이다.) [4점]

보기

$$\text{ㄱ. } f(t) = t(t-3a)^2 \text{이다.}$$

$$\text{ㄴ. } a=2 \text{일 때, } 0 \leq t \leq 3 \text{에서 } f(t) \text{의 최댓값은 } 32 \text{이다.}$$

$$\text{ㄷ. } 0 \leq t \leq 3 \text{에서 } f(t) \text{의 최댓값을 } g(a) \text{라 할 때, } y=g(a) \text{의 최솟값은 } \frac{27}{16} \text{이다.}$$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

▶ 21054-1075

자연수 n 과 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} n^2 - 2n + 2 & (n \leq 20) \\ 3n & (n \geq 21) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^6 a_{3k-2} + \sum_{k=7}^{15} k a_{3k}$ 의 값은? [4점]

- ① -1727 ② -1729 ③ -1731
④ -1733 ⑤ -1735

단답형

16

▶ 21054-1076

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3=5, a_7+a_8=37$$

일 때, $a_n < 30$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 개수를 구하시오. [3점]

17

▶ 21054-1077

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

두 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-3}{2x-4}$ 이 모두 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-3}{2x-4}$$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 가 $\frac{h'(2)}{f'(2)}=a$ 를 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

18

▶ 21054-1078

2 이상의 자연수 n 에 대하여 부등식

$$4^{2x} > \sqrt[n]{8} \times 4^x$$

의 해가 $x > \frac{1}{6}$ 이 되도록 하는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

19

▶ 21054-1079

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 도함수 $f'(x)$ 는

$f'(x)=(x+2)(x-5)$ 이다. 함수 $f(x)+ax$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 자연수 a 의 최댓값을 구하시오. [3점]

20

▶ 21054-1080

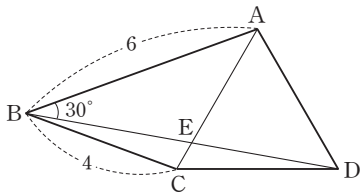
첫째항이 a , 공비가 r ($r > 1$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 을 각각 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}$, $c_n = a_{4n-3} + a_{4n-1}$ 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21이고 수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제2항까지의 합이 17일 때, $a_3 + a_7 = k$ 이다. $5k$ 의 값을 구하시오. [4점]

21

▶ 21054-1081

그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 4$, $\angle ABE = 30^\circ$ 이고 삼각형 ACD가 정삼각형일 때, 삼각형 AED의 외접원의 지름의 길이는 $\frac{q(\sqrt{21}-3)}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22

▶ 21054-1082

삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점에서 만난다.
 (나) 방정식 $f(x) = -k$ ($5 < k < 6$)은 중근을 가진다.

자연수 n 에 대하여 집합 S_n 을

$$S_n = \{\alpha \mid \alpha \text{는 함수 } |f(x) + n| \text{의 극댓값}\}$$

이라 하자. 집합 $S_1 \cup S_2 \cup S_6$ 의 모든 원소의 합이 17이 되도록 하는 상수 k 에 대하여 $100k$ 의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

기하

23

▶ 21056-1083

좌표공간의 두 점 $A(3, 0, 2)$, $B(6, 4, -2)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이는?

(단, O 는 원점이다.) [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

24

▶ 21056-1084

점 $A(-4, 0)$ 에서 포물선 $y^2=8x$ 에 그은 두 접선의 접점을 B , C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이는? [3점]

- ① $24\sqrt{2}$ ② $28\sqrt{2}$ ③ $32\sqrt{2}$
 ④ $36\sqrt{2}$ ⑤ $40\sqrt{2}$

25

▶ 21056-1085

좌표평면 위의 두 점 $A(-4, 1)$, $B(0, 8)$ 과 직선 $y=2x-3$ 위의 점 P 에 대하여 선분 AP 를 2 : 1로 내분하는 점을 Q 라 하자. 점 Q 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 값은? [3점]

(가) 점 Q 는 제1사분면의 점이다.(나) $\overline{AP} \perp \overline{BQ}$

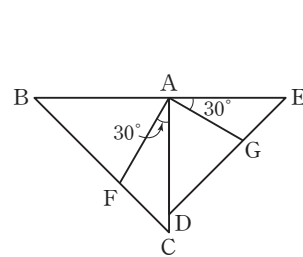
- ① 36 ② 37 ③ 38
 ④ 39 ⑤ 40

26

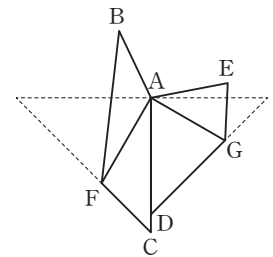
▶ 21056-1086

[그림 1]과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=4\sqrt{3}$ 인 직각이등변삼각형 ABC 모양의 종이와 $\overline{AD}=\overline{AE}=6$ 인 직각이등변삼각형 ADE 모양의 종이가 한 평면에 놓여 있고 점 D 는 변 AC 위에 있다.

선분 BC 위의 점 F 와 선분 DE 위의 점 G 에 대하여 $\angle FAC = \angle GAE = 30^\circ$ 이다. [그림 2]와 같이 삼각형 ABC 를 선분 AF 를 접는 선으로 하여 평면 ABF 와 평면 AFC 가 수직이 되도록 접고, 삼각형 ADE 를 선분 AG 를 접는 선으로 하여 평면 AGE 와 평면 ADG 가 수직이 되도록 접었다. [그림 2]에서 선분 BE 의 길이는? (단, [그림 2]에서 선분 BE 는 평면 AFC 와 만나지 않고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [3점]



[그림 1]



[그림 2]

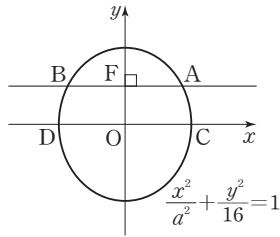
- ① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $2\sqrt{10}$
 ④ $2\sqrt{11}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

27

▶ 21056-1087

그림과 같이 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 y 좌표가 양수인 초점 F를 지나고 y 축에 수직인 직선이 타원과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 타원이 x 축과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{AB} = 6$ 일 때, 선분 CD의 길이는?

(단, a 는 $0 < a < 4$ 인 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$

② $\sqrt{42}$

③ $2\sqrt{11}$

④ $\sqrt{46}$

⑤ $4\sqrt{3}$

28

▶ 21056-1088

좌표평면에서 직선 $3x + 4y = 20$ 위의 서로 다른 두 점 P_1, P_2 에 대하여

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 Q라 하자. 직선 $3x + 4y = 20$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q가

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} < 0$$

을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PQ}| = n$ 을 만족시키는 점 P의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} f(k)$ 의 값은?

(단, O는 원점이고, n 은 자연수이다.) [4점]

① 8

② 9

③ 10

④ 11

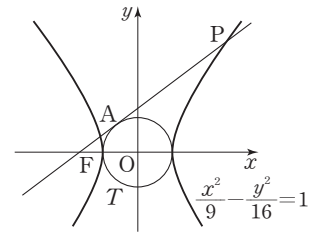
⑤ 12

단답형

29

▶ 21056-1089

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 초점 중에서 x 좌표가 음수인 점을 F라 하고, 중심이 원점이고 쌍곡선의 꼭짓점을 지나는 원을 T라 하자. 점 F에서 원 T에 그은 접선 중에서 기울기가 양수인 접선의 접점을 A라 하고 이 접선과 쌍곡선이 만나는 점 중에서 x 좌표가 양수인 점을 P라 할 때, $\overline{AP} - \overline{AF}$ 의 값을 구하시오. [4점]

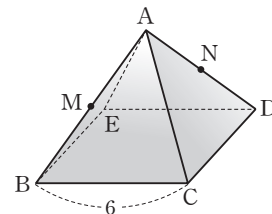


30

▶ 21056-1090

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 사각뿔 A-BCDE에서 선분 AB와 선분 AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 평면 MCN과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자.

$50 \cos^2 \theta$ 의 값을 구하시오. [4점]



5지선다형

01

▶ 21054-1091

 $\sqrt[8]{3^7} \times \sqrt{3^{\frac{9}{4}}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$
 ④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

02

▶ 21054-1092

 $\int_0^1 (4x^3 - 3ax^2 + 4) dx = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

03

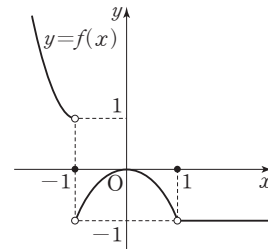
▶ 21054-1093

함수 $y = \log_2 \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. 상수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$
 ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

04

▶ 21054-1094

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

05

▶ 21054-1095

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이고 $\frac{1}{3-\tan \theta} = 3+2\sqrt{2}$ 일 때, $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{2+\sqrt{2}}{3}$
 ④ $-\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

06

▶ 21054-1096

다항함수 $f(x)$ 가

$$\frac{d}{dx} \int f'(x) dx = 3x^2 + 2ax, \quad f(2) - f(1) = 19$$

를 만족시킬 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

07

▶ 21054-1097

10 이하의 두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x+b & (x \leq a) \\ 2x^2-3b & (x > a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

08

▶ 21054-1098

함수 $y = 8 \sin \left\{ \frac{\pi}{6}(x+7) \right\}$ ($0 \leq x \leq 12$)의 그래프와 직선

$y = 4\sqrt{3}$ 이 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표의 합은? [3점]

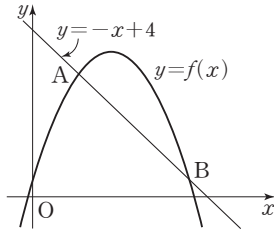
- ① 14 ② 16 ③ 18
 ④ 20 ⑤ 22

09

▶ 21054-1099

그림과 같이 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x+4$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선의 기울기가 3일 때, 점 B에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선의 기울기는?

(단, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작다.) [4점]



- ① -3 ② -4 ③ -5
④ -6 ⑤ -7

10

▶ 21054-1100

$\log 2 \times \log 5 = a$ 일 때,

$$(\log 25)^4 - (\log 4)^4 = p(1-2a)\sqrt{1-qa}$$

이다. 두 자연수 p, q 의 합 $p+q$ 의 값은? (단, $0 < qa < 1$) [4점]

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

11

▶ 21054-1101

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3=3, b_2=6$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+3} - a_{n+1} = b_{n+2} - b_n = b_{n+3} - b_{n+1}$$

이다.

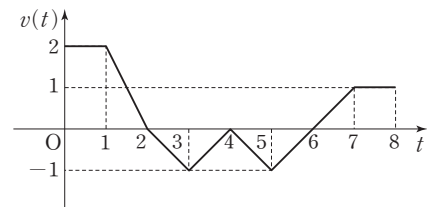
$\sum_{k=1}^8 (a_{k+1} - b_{k+1}) = 48$ 일 때, $\sum_{k=1}^8 (a_{2k} - b_{2k+1})$ 의 값은? [4점]

- ① 118 ② 120 ③ 122
④ 124 ⑤ 126

12

▶ 21054-1102

수직선 위에서 좌표가 1인 점 A를 출발하여 8초 동안 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 점 P가 출발 후 수직선 위의 좌표가 3인 점 B를 세 번째 지날 때까지 실제로 움직인 거리는? [4점]



- ① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

13

▶ 21054-1103

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_1=1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $3S_n=(n+2)a_n$ 이 성립할 때, $a_n=pn^2+qn$ 이다. 다음은 상수 p, q 를 구하고, 이를 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

$a_1=1$ 이고, $3S_n=(n+2)a_n$ 에서
 $n=2$ 일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$
 이므로 $a_2=3$ 이다.

$$\text{즉, } \begin{cases} p+q=1 \\ 4p+2q=3 \end{cases}$$

이므로 연립방정식을 풀면

$p=\boxed{\text{가}}, q=\boxed{\text{나}}$ 이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n=\boxed{\text{가}} \times n^2 + \boxed{\text{나}} \times n \quad \dots\dots (*)$$

이다.

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1=\boxed{\text{가}} \times 1^2 + \boxed{\text{나}} \times 1 = 1$$

이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$a_m=\boxed{\text{가}} \times m^2 + \boxed{\text{나}} \times m$$

한편, $3S_n=(n+2)a_n$ 에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$ 이므로

$$a_{m+1}=\boxed{\text{다}} \times a_m = \frac{1}{2} \times \boxed{\text{라}} \text{이다.}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$ 이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 α, β 라 하고 (다), (라)에 알맞은 식을 각각 $f(m), g(m)$ 이라 할 때, $f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ 의 값은? [4점]

- ① 31 ② 33 ③ 35
 ④ 37 ⑤ 39

14

▶ 21054-1104

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(4)=0$ 이고 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근의 차는 5 이상이다.

(나) $0 < h < 5$ 인 임의의 h 에 대하여

$$\int_{4-h}^4 f'(x) dx \times \int_4^{4+h} f'(x) dx < 0$$

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근의 차의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$
 ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

15

▶ 21054-1105

삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1$

(나) $f'(0)=f'(1)=-3$

(다) $x=\alpha$ 에서 극댓값, $x=\beta$ 에서 극솟값을 가지며

$$|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta| \text{이다.}$$

$f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① -21 ② -19 ③ -17
 ④ -15 ⑤ -13

단답형

16

▶ 21054-1106

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{12} - a_6 = 30$ 일 때, $a_{20} - a_{18}$ 의 값을 구하시오. [3점]

17

▶ 21054-1107

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = (-2x^3 + 1)f(x)$$

이고 $g(-1) = 9$, $g'(-1) = 3$ 일 때, $f'(-1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18

▶ 21054-1108

함수 $f(x) = \begin{cases} 4x & (x < 8) \\ \log_2 x + 29 & (x \geq 8) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

방정식 $(g \circ g)(a) = 4$ 를 만족시키는 실수 a 의 값을 구하시오.

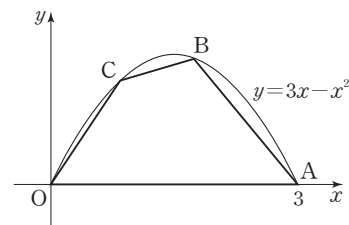
[3점]

19

▶ 21054-1109

그림과 같이 두 점 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ 과 곡선

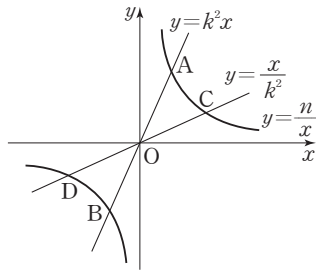
$y = 3x - x^2$ ($0 < x < 3$) 위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C에 대하여 사각형 OABC의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 B, C의 좌표를 각각 $B(\alpha, \beta)$, $C(\gamma, \delta)$ 라 하자. $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \gamma < \alpha < 3$) [3점]



20

▶ 21054-1110

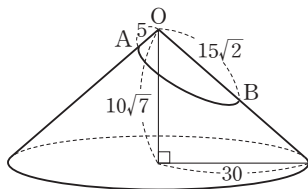
$k > 1$ 인 상수 k 와 자연수 n 에 대하여 그림과 같이 함수 $y = \frac{n}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = k^2x$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y = \frac{n}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{k^2}$ 가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 네 수 d, b, a, c 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 네 수 d, b, a, c 의 공차가 16 이하인 자연수가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하시오. (단, 점 A와 점 C는 제1사분면의 점이다.) [4점]



21

▶ 21054-1111

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 30이고 높이가 $10\sqrt{7}$ 인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면 위를 움직이는 점 P가 이 원뿔의 꼭짓점 O로부터 거리가 5인 점 A에서 출발하여 꼭짓점으로부터 거리가 $15\sqrt{2}$ 인 지점 B에 최단거리로 이동하여 도착하였다. 점 P가 이동한 거리를 구하시오. (단, 세 점 A, O, B에서 밑면에 내린 수선의 발을 각각 A', O', B'이라 할 때, 점 O'는 선분 A'B' 위에 있다.) [4점]



22

▶ 21054-1112

15 이하인 두 자연수 a, b 에 대하여 곡선 $y = x^3 - a^2x + a^3$ 과 곡선 밖의 점 $P(b, 0)$ 이 있다. 점 P에서 곡선 $y = x^3 - a^2x + a^3$ 에 그은 접선이 세 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 p , 점 P에서 곡선 $y = x^3 - a^2x + a^3$ 에 그은 접선이 두 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 q 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

기하

23

▶ 21056-1113

좌표공간의 두 점 $A(-2, 4, 1)$, $B(a, b, 3)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:1로 외분하는 점이 z 축 위에 있을 때, $a+b$ 의 값은?

[2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24

▶ 21056-1114

타원 $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{16} = 1$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에 동시에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 할 때, m^2 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

25

▶ 21056-1115

좌표공간에서 구 S 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 구 S 는 xy 평면에 접한다.
(나) 구 S 를 zx 평면으로 자른 단면은 중심이 $(5, 0, 3)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

구 S 위의 점 중에서 yz 평면까지의 거리가 최대인 점을 A 라 할 때, 선분 OA 의 길이는?

(단, 구 S 의 중심의 y 좌표는 양수이고, O 는 원점이다.) [3점]

- ① $2\sqrt{19}$ ② $\sqrt{77}$ ③ $\sqrt{78}$
④ $\sqrt{79}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

26

▶ 21056-1116

좌표평면 위에 두 점 $A(1, -3)$, $B(5, 9)$ 가 있다. 선분 AB 위에 있고 두 점 A , B 가 아닌 점 P 와 선분 AB 위에 있지 않은 좌표평면 위의 점 Q 가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 최댓값은? [3점]

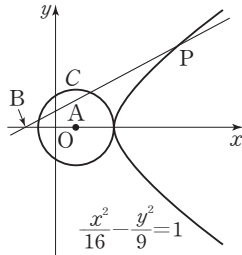
- (가) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$
(나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AQ}|^2$

- ① $4\sqrt{2}$ ② $\sqrt{34}$ ③ 6
④ $\sqrt{38}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

27

▶ 21056-1117

그림과 같이 중심이 $A(a, 0)$ 이고 곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 (x > 0)$ 과 한 점에서 만나는 원을 C 라 하자. 점 $B(-2, 0)$ 과 곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 (x > 0)$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 직선 PB 가 원 C 와 항상 만나도록 하는 a 의 최댓값은?
(단, $-2 < a < 4$) [3점]



- ① $\frac{5}{4}$
④ $\frac{13}{8}$

- ② $\frac{11}{8}$
⑤ $\frac{7}{4}$

- ③ $\frac{3}{2}$

28

▶ 21056-1118

$\overline{OA} = 3\sqrt{2}$, $\overline{OB} = 5$ 이고 $\angle AOB = 45^\circ$ 인 삼각형 AOB 의 내부의 점 P 가

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{OP}|^2$ 의 값은? [4점]

- ① 7
④ 13

- ② 9
⑤ 15

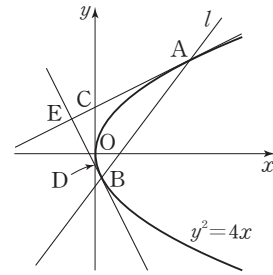
- ③ 11

단답형

29

▶ 21056-1119

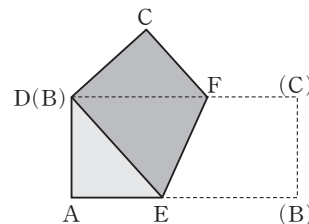
포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점을 지나고 기울기가 m 인 직선 l 이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B 에서 만난다. 두 점 A, B 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 각각 C, D 라 하고, 두 접선이 만나는 점을 E 라 하자. 삼각형 CED 의 넓이가 2일 때, 선분 AB 의 길이를 구하시오. (단, $m \neq 0$) [4점]



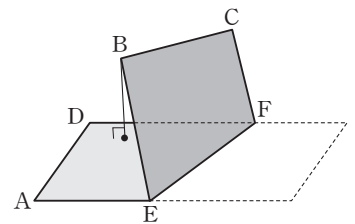
30

▶ 21056-1120

$\overline{AB} = 10$, $\overline{AD} = 2\sqrt{5}$ 인 직사각형 $ABCD$ 모양의 종이가 있다. [그림 1]과 같이 선분 AB 위의 점 E 와 선분 DC 위의 점 F 를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 종이를 접었더니 점 B 와 점 D 가 겹쳐졌다. 종이를 다시 펴서 [그림 2]와 같이 종이를 두 점 E, F 를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 점 B 의 평면 $AEFD$ 위로의 정사영과 선분 AD 사이의 거리가 2가 되도록 접었다. [그림 2]에서 사각형 $BEFC$ 의 평면 $AEFD$ 위로의 정사영의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하시오. [4점]



[그림 1]



[그림 2]

5지선다형

01

▶ 21054-1121

$(2\sqrt{2})^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

02

▶ 21054-1122

함수 $f(x) = (2x - x^2)(x + 2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

▶ 21054-1123

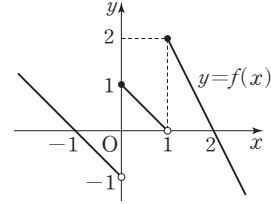
$0 < a < 1$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = a^{1-x}$ 이 $2 \leq x \leq 4$ 에서 최솟값 4를 가질 때, $a \times f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

04

▶ 21054-1124

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

05

▶ 21054-1125

$\sum_{k=1}^n (3k+1)^2 - \sum_{k=1}^n (3k-2)^2 = 360$ 일 때, 자연수 n 의 값은?

[3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

06

▶ 21054-1126

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$2(\cos x - 1)^2 - 3 = \sin x - 4 \cos x$$

의 서로 다른 모든 해의 합은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

07

▶ 21054-1127

함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 2a & (x < 1) \\ -x + 3a & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + f(1)$ 의 값은?
(단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

08

▶ 21054-1128

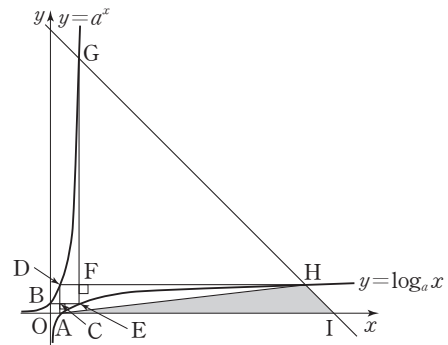
함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 10$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $A(-1, 12)$, $B(a, f(a))$ 에서의 접선을 각각 l_1 , l_2 라 하면 두 직선 l_1 , l_2 는 서로 평행하다. 점 A와 직선 l_2 사이의 거리는? [3점]

- ① $2\sqrt{10}$ ② $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{14\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{16\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

09

▶ 21054-1129

그림과 같이 곡선 $y = \log_a x$ 가 x 축과 만나는 점을 A, 곡선 $y = a^x$ 이 y 축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = a^x$ 과 만나는 점을 D, 점 B를 지나고 y 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_a x$ 와 만나는 점을 E라 할 때 선분 AD와 선분 BE가 만나는 점을 C라 하자. 점 D를 지나고 y 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_a x$ 와 만나는 점 H와 점 E를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = a^x$ 과 만나는 점 G에 대하여 선분 DH와 선분 EG가 만나는 점을 F라 하고 두 점 G, H를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 I라 하자. 두 정사각형 OACB와 CEFH의 넓이의 비가 1 : 4일 때, 삼각형 AIH의 넓이는? (단, O는 원점이고 $a > 1$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{79}{2}$ ② $\frac{81}{2}$ ③ $\frac{83}{2}$
④ $\frac{85}{2}$ ⑤ $\frac{87}{2}$

10

▶ 21054-1130

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $F(x)$ 를

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

라 할 때, 다음이 성립한다.

- (가) $F(x)$ 는 $x=0$ 에서만 극값을 갖는다.
(나) 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$F(1) - F(-1) = -4$ 일 때, $F(2)$ 의 값은? [4점]

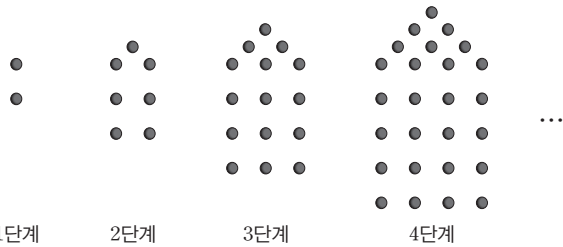
- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

11

▶ 21054-1131

그림은 일정한 규칙으로 바둑돌을 배열하여 단계별로 나타낸 것이다. n 단계에서 사용된 바둑돌의 개수를 a_n 이라 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [4점]



- ① 585 ② 590 ③ 595
④ 600 ⑤ 605

12

▶ 21054-1132

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - 9x - 4$$

가 $x = -1$ 에서 극값 0을 갖는다. $g'(1) = -8$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

13

▶ 21054-1133

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \frac{(4n+1) \times (2n)!}{2 \times n!}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{(2n+1)!}{n!} - 1 \quad \dots\dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변)=5, (우변)=5

이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = \frac{(2m+1)!}{m!} - 1$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \frac{(2m+1)!}{m!} - 1 + \frac{\boxed{\text{(가)}}}{2 \times (m+1)!} \\ &= \frac{\boxed{\text{(나)}} \times (2m+1)!}{(m+1)!} - 1 \\ &= \frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!} - 1 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{(2n+1)!}{n!} - 1$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $f(1)+g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 256 ② 258 ③ 260
④ 262 ⑤ 264

14

▶ 21054-1134

길이가 5인 선분 AB 위를 움직이는 두 점 P, Q는 점 A에서 동시에 출발하여 점 B에 도달하면 점 A방향으로 움직이고, 점 A에 도달하면 점 B방향으로 움직인다. 출발한 후 t 초까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 각각 $2t^3$, $3t^2+12t$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

- ㄱ. $t=2$ 일 때, 두 점 P, Q의 운동 방향은 같다.
 ㄴ. $0 < t \leq 2$ 일 때, 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 2이다.
 ㄷ. $0 < t \leq 5$ 일 때, 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 55이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

▶ 21054-1135

삼차함수 $f(x)=x^3+kx$ 에 대하여 다항함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 임의의 실수 a 에 대하여

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(g(a))}{a - g(a)}$$

(나) 방정식 $f'(x) \times f'(g(x)) = k^2$ 의 실근 중 0이 아닌 두 실근의 곱은 $-\frac{5}{4}$ 이다.

0이 아닌 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq x$ 일 때, $g(k)$ 의 값은?
 (단, k 는 음의 상수이다.) [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

단답형

16

▶ 21054-1136

등차수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_{10} + a_{20} = 50, a_{10} - a_{20} = 30$$

일 때, a_5 의 값을 구하시오. [3점]

17

▶ 21054-1137

곡선 $y=(x+2)(x^2-2x+4)$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

18

▶ 21054-1138

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 함수 $f(x) = a \cos 2x + b$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$

(나) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수는 2이다.

$a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

19

▶ 21054-1139

함수 $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 10을 가질 때, $f(-1)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

20

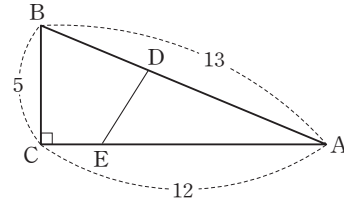
▶ 21054-1140

공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때 $S_{15} = S_{10}$ 이 성립한다. $a_n + 25 > 0$ 을 만족시키는 n 의 최댓값이 19일 때, $\sum_{k=1}^{20} |a_k|$ 의 값을 구하시오. [4점]

21

▶ 21054-1141

그림과 같이 $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=12$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 D와 변 AC 위의 한 점 E에 대하여 선분 DE가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 선분 DE의 길이의 최솟값을 m 이라 하자. m^2 의 값을 구하시오. [4점]



22

▶ 21054-1142

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수

$$f(x) = \int_0^x t(1-t^n) dt \quad (n \text{은 자연수})$$

의 최댓값을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} 4(n+2)a_n$ 의 값을 구하시오.

[4점]

5지선다형

기하

23

▶ 21056-1143

좌표공간의 점 $P(1, 2, 2)$ 를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q 라 하자. $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{OP}$ 일 때, 실수 k 의 값은?
(단, O 는 원점이다.) [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

24

▶ 21056-1144

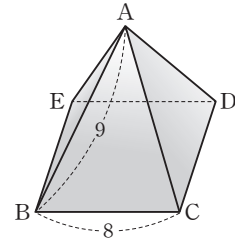
자연수 n 에 대하여 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 과 직선 $y = nx$ 가 만나는 두 점을 A_n, B_n 이라 하자. 타원의 한 초점 F 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} (\overrightarrow{A_n F} + \overrightarrow{B_n F})$ 의 값은? [3점]

- ① 68 ② 72 ③ 76
④ 80 ⑤ 84

25

▶ 21056-1145

그림과 같이 좌표공간에서 $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 8$, 옆면이 모두 합동이고 이등변삼각형인 사각뿔 $A-BCDE$ 가 다음 조건을 만족시킨다.



- (가) 점 A 의 좌표는 $(1, 2, 3)$ 이다.
(나) 두 모서리 BE, BC 는 각각 x 축, y 축과 평행하다.
(다) 점 E 의 좌표를 (a, b, c) 라 할 때, $a < 1, b < 2, c < 3$ 이다.

선분 OC 의 길이는? (단, O 는 원점이다.) [3점]

- ① $\sqrt{71}$ ② $\sqrt{73}$ ③ $5\sqrt{3}$
④ $\sqrt{77}$ ⑤ $\sqrt{79}$

26

▶ 21056-1146

좌표평면 위의 정사각형 $ABCD$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4)$
(나) 점 $O(0, 0)$ 은 정사각형 $ABCD$ 의 한 변 위의 점이고 $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ 이다.

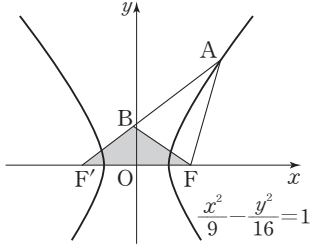
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = k$ ($k > 0$)일 때, k 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

27

▶ 21056-1147

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에 대하여 $\overline{AF} = \overline{FF'}$ 이다. 선분 AF' 위의 점 B에 대하여 $\overline{AB} = \overline{AF}$ 일 때, 삼각형 BF'F의 넓이는?
(단, $\overline{AF} < \overline{AF'}$) [3점]



- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

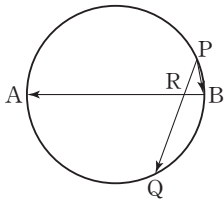
28

▶ 21056-1148

그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $|\overrightarrow{PQ}| = 4$
(나) $\overrightarrow{PQ} = 3t\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{PB}$ ($0 < t < 1$)

선분 AB와 선분 PQ가 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{257}{9}$ ② $\frac{260}{9}$ ③ $\frac{263}{9}$
④ $\frac{266}{9}$ ⑤ $\frac{269}{9}$

단답형

29

▶ 21056-1149

서로 만나지 않는 두 포물선 $y^2 = 8(x-2)$, $x^2 = 16(y-4)$ 에 동시에 접하는 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.
[4점]

30

▶ 21056-1150

그림과 같이 평면 α 위에 있는 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 4$ 이다. 평면 α 위에 있고, 점 O를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 A이고 $\overline{AP} = \sqrt{6}$ 일 때, 삼각형 PDE의 넓이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

