

수능완성



수학영역 | 수학 I·수학 II·미적분

정답과 풀이



한눈에 보는 정답

01

지수함수와 로그함수

정답

본문 8~17쪽

01 ③	02 ②	03 81	04 ③	05 ①
06 22	07 ③	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 36	12 ③	13 8	14 ②	15 6
16 8	17 ③	18 9	19 ④	20 ④
21 9	22 16	23 3	24 ④	25 7
26 2	27 22	28 ①	29 ②	30 ③

02

삼각함수

정답

본문 20~29쪽

01 50	02 ③	03 ⑤	04 24	05 ④
06 ②	07 ①	08 ③	09 ④	10 7
11 8	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ③	17 ②	18 ③	19 5	20 ④
21 ⑤	22 ③	23 ③	24 33	25 7
26 ②	27 ②	28 ③	29 ④	30 49
31 ②	32 ③			

03

수열

정답

본문 32~43쪽

01 ④	02 ②	03 ④	04 ②	05 ③
06 ②	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ④	19 340	20 ③
21 ②	22 ④	23 ②	24 ③	25 ①
26 ②	27 ①	28 ②	29 ④	30 ③
31 ③	32 ②	33 77	34 50	

04

함수의 극한과 연속

정답

본문 46~57쪽

01 ②	02 ③	03 ③	04 ③	05 ①
06 ①	07 ②	08 40	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 10	14 7	15 ⑤
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 18	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 ④	25 ④
26 ⑤	27 13	28 ①	29 ①	30 ③
31 ③	32 ②	33 ②	34 ④	35 ②
36 16	37 ③	38 ⑤		

05

다항함수의 미분법

정답

본문 61~73쪽

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ③	07 ③	08 11	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ③	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ③	20 ④
21 ②	22 ④	23 ③	24 ④	25 ⑤
26 ⑤	27 689	28 121	29 ③	30 ①
31 ②	32 2	33 ④	34 ③	35 ⑤
36 ②	37 ⑤	38 ③	39 ①	40 ⑤
41 6				

06

다항함수의 적분법

정답

본문 76~85쪽

01 ②	02 ③	03 ②	04 ④	05 95
06 32	07 108	08 ③	09 ③	10 ①
11 ①	12 ④	13 ③	14 ②	15 ①
16 ④	17 ④	18 ④	19 ④	20 ②
21 ⑤	22 ③	23 ④	24 6	25 37
26 5	27 ②	28 426	29 ②	30 ③
31 127				

08

미분법

정답

본문 101~112쪽

01 ③	02 ②	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ⑤	07 72	08 ②	09 ②	10 ①
11 ③	12 5	13 ④	14 ①	15 ⑤
16 ②	17 ①	18 ⑤	19 ⑤	20 ②
21 ④	22 ④	23 ④	24 ②	25 ①
26 ④	27 ②	28 ③	29 ②	30 ③
31 ②	32 24	33 ⑤	34 ③	35 ③
36 ②				

07

수열의 극한

정답

본문 88~97쪽

01 ②	02 ④	03 144	04 ③	05 ③
06 12	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 15	12 15	13 ④	14 21	15 ②
16 ②	17 ③	18 ②	19 ④	20 ④
21 ③	22 ③	23 ④	24 ③	25 12
26 45	27 ④			

09

적분법

정답

본문 115~128쪽

01 ⑤	02 ①	03 ②	04 15	05 ④
06 ③	07 ③	08 4	09 ①	10 ③
11 ②	12 21	13 ⑤	14 8	15 ⑤
16 ②	17 ③	18 ③	19 ③	20 ①
21 ①	22 24	23 ①	24 10	25 ②
26 ④	27 587	28 ③	29 ③	30 ①
31 4	32 ①	33 19	34 3	35 ④
36 51	37 ②	38 ①	39 ③	40 ④
41 77	42 ④			



EBS 수능완성 수학영역

한눈에 보는 정답



실전편

실전 모의고사 1회

본문 130~137쪽

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ③	08 ③	09 ②	10 ②
11 ②	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 8	17 29	18 4	19 14	20 9
21 383	22 31	23 ③	24 ③	25 ②
26 ④	27 ①	28 ③	29 7	30 57

실전 모의고사 4회

본문 154~161쪽

01 ④	02 ③	03 ②	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ②	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 10	17 7	18 33	19 7	20 612
21 25	22 120	23 ③	24 ①	25 ②
26 ④	27 ②	28 ②	29 36	30 10

실전 모의고사 2회

본문 138~145쪽

01 ④	02 ④	03 ②	04 ③	05 ③
06 ①	07 ①	08 ②	09 ②	10 ③
11 ②	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ⑤
16 60	17 10	18 80	19 8	20 35
21 330	22 32	23 ③	24 ③	25 ④
26 ②	27 ③	28 ⑤	29 15	30 5

실전 모의고사 5회

본문 162~168쪽

01 ②	02 ①	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 ③	15 ③
16 55	17 32	18 12	19 30	20 424
21 12	22 150	23 ②	24 ③	25 ⑤
26 ②	27 ④	28 ⑤	29 25	30 5

실전 모의고사 3회

본문 146~153쪽

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ①	07 ②	08 ③	09 ③	10 ②
11 ②	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 11	17 7	18 9	19 12	20 68
21 11	22 550	23 ②	24 ③	25 ④
26 ②	27 ⑤	28 ④	29 181	30 35





01

지수함수와 로그함수

정답

본문 8~17쪽

01 ③	02 ②	03 81	04 ③	05 ①
06 22	07 ③	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 36	12 ③	13 8	14 ②	15 6
16 8	17 ③	18 9	19 ④	20 ④
21 9	22 16	23 3	24 ④	25 7
26 2	27 22	28 ①	29 ②	30 ③

01

$$(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[3 \times 2]{2^2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[3]{(2^3)^{1/3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2 + \sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 3$$

답 ③

02

a 의 세제곱근 중 실수를 x 라 하면 x 는 8의 여섯제곱근 중 음의 실수이므로

$$x = -\sqrt[6]{8} = -2^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2^3} = -\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a = x^3 = (-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또한 b 의 제곱근 중 양의 실수를 y 라 하면 y 는 $\sqrt[4]{8}$ 의 세제곱근이므로

$$y = \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\text{따라서 } b = y^2 = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2} \quad \dots\dots ㉡$$

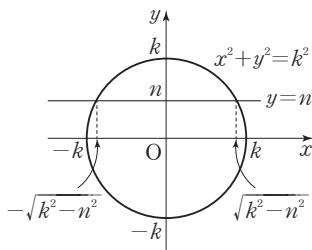
㉠, ㉡에서

$$a + b = -2\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

답 ②

03

원 $x^2 + y^2 = k^2$ ($k > 2$) 위의 점 중 y 좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합이 A 이므로 $(a, n) \in A$ 이면 $x^2 = k^2 - y^2$ 에서 $a^2 = k^2 - n^2$, 즉 $a = \pm \sqrt{k^2 - n^2}$ 이다.



(i) n 이 $2 \leq n < k$ 인 짝수일 때

$$a = \pm \sqrt{k^2 - n^2} \text{이므로}$$

$\sqrt{k^2 - n^2}$ 의 n 제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2 - n^2}}$, $-\sqrt[n]{\sqrt{k^2 - n^2}}$
 $-\sqrt{k^2 - n^2}$ 의 n 제곱근 중 실수는 없다.

따라서 a 의 n 제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2 - n^2}}$ 의 1개이다.

(ii) n 이 $3 \leq n < k$ 인 홀수일 때

$$a = \pm \sqrt{k^2 - n^2} \text{이므로}$$

$\sqrt{k^2 - n^2}$ 의 n 제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2 - n^2}}$

$-\sqrt{k^2 - n^2}$ 의 n 제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{-\sqrt{k^2 - n^2}}$

따라서 a 의 n 제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2 - n^2}}$ 의 1개이다.

(iii) $n = k$ 일 때

$$a = 0 \text{이므로 } 0 \text{의 } n \text{제곱근은 } 0 \text{뿐이다.}$$

따라서 a 의 n 제곱근 중 양의 실수는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $2 \leq n < k$ 인 자연수 n 에 대하여 a 의 n 제곱근 중 양의 실수는 하나씩 생기고 모두 서로 다르다.

따라서 집합 B 의 원소의 개수가 7이므로

$8 < k \leq 9$ 일 때 $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 에서 집합 B 의 원소의 개수가 하나씩 생기므로 k^2 의 최댓값은 $9^2 = 81$ 이다.

답 81

참고

(1) $A = \{(a, n) \mid a^2 + n^2 = k^2, n \text{은 } 1 \text{보다 크고}$

$k \text{보다 작거나 같은 자연수}\}$

(2) $2 \leq n_1 < n_2 < k$ (n_1, n_2 는 자연수)일 때

$$a_1 = \sqrt{k^2 - n_1^2}, a_2 = \sqrt{k^2 - n_2^2} \text{이면 } 0 < a_2 < a_1 \text{이고 } \sqrt[n_1]{a_2} < \sqrt[n_1]{a_1} \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \sqrt[n_1]{a_2} \neq \sqrt[n_1]{a_1} \text{이다.}$$

04

$$\begin{aligned} 27^{-1} \div \left(\frac{1}{9} \times \sqrt[3]{81} \right)^{\frac{9}{2}} &= (3^3)^{-1} \div \left(3^{-2} \times 3^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{9}{2}} \\ &= 3^{-3} \div \left(3^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{9}{2}} \\ &= 3^{-3} \div 3^{-3} = 3^{-3 - (-3)} \\ &= 3^0 = 1 \end{aligned}$$

답 ③

05

$$2^{a+\frac{b}{2}} = \frac{1}{3}, 2^{a-\frac{b}{2}} = 27 \text{에서 변끼리 곱하면}$$

$$2^{a+\frac{b}{2}} \times 2^{a-\frac{b}{2}} = \frac{1}{3} \times 27$$

$$2^{(a+\frac{b}{2})+(a-\frac{b}{2})} = 9, 2^{2a} = 3^2$$

$$2^a = (2^{2a})^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\text{또한 } 2^{a+\frac{b}{2}} = \frac{1}{3} \text{에서 } 2^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{2^a} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$2^b = \left(2^{\frac{b}{2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{9} \right)^2 = 3^{-4}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sqrt{2^{3a}} \times \sqrt[3]{2^b} &= (2^a)^{\frac{3}{2}} \times (2^b)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{4}{3}} \\ &= 3^{\frac{3}{2} + (-\frac{4}{3})} = 3^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

답 ①

06

$$9^x - 3^{x+\frac{10}{n}} = -1$$

$(3^x)^2 - 3^{x+\frac{10}{n}} = -1$ 의 양변을 3^x 으로 나누면

$$3^x - 3^{\frac{10}{n}} = -3^{-x} \text{이므로 } 3^x + 3^{-x} = 3^{\frac{10}{n}}$$

$$9^x + 9^{-x} - 2 = (3^x + 3^{-x})^2 - 4 = \left(3^{\frac{10}{n}}\right)^2 - 4 = 3^{\frac{20}{n}} - 4$$

$3^{\frac{20}{n}} - 4$ 의 값이 자연수가 되려면 $3^{\frac{20}{n}}$ 의 값이 4보다 큰 자연수가 되어야 한다.

$3^{\frac{20}{n}}$ 의 값이 자연수가 되려면 $\frac{20}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로 n 은

1, 2, 4, 5, 10, 20이고 $n=20$ 일 때 $3^{\frac{20}{n}}=3$ 으로 4보다 작다.

따라서 n 은 1, 2, 4, 5, 10이므로 그 합은

$$1+2+4+5+10=22$$

답 22

07

밑의 조건에서 $|a+3| > 0$, $|a+3| \neq 1$ 이므로

$$a \neq -4, a \neq -3, a \neq -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+ax-a+3 > 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+ax-a+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4(-a+3) < 0, a^2+4a-12 < 0$$

$$(a+6)(a-2) < 0$$

$$-6 < a < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 만족시키는 정수 a 의 값은 $-5, -1, 0, 1$ 이므로 그 합은

$$-5+(-1)+0+1=-5$$

답 ③

08

$$\log_2 30 - \log_2 \frac{3}{2} - \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 \left(30 \div \frac{3}{2} \div \frac{5}{4} \right)$$

$$= \log_2 \left(30 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \right)$$

$$= \log_2 16 = \log_2 2^4$$

$$= 4 \log_2 2 = 4$$

답 ④

09

$a^2 b^{-3} = 1$ 의 양변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b a^2 b^{-3} = \log_b 1 \text{이므로 } \log_b a^2 + \log_b b^{-3} = 0$$

$$2 \log_b a = 3, \log_b a = \frac{3}{2}$$

$$\log_b (a^m \times \sqrt{b^n}) = m \log_b a + \frac{n}{2} = \frac{3m+n}{2} = 10$$

$3m+n=20$ 을 만족시키는 두 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(1, 17), (2, 14), (3, 11), (4, 8), (5, 5), (6, 2)$

이므로 $m+n$ 의 최솟값은 $6+2=8$ 이다.

답 ①

10

$$\left(4^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)^{\log_2 \frac{1}{6}} = 4^{\log_2 \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{6}}$$

이때

$$\log_2 \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 3^{-1} \times \log_2 6^{-1}$$

$$= (-\log_2 3) \times (-\log_2 6)$$

$$= \log_2 3 \times \log_2 6$$

$$= \log_2 3 \times \frac{\log_2 6}{\log_2 3}$$

$$= \log_2 6$$

$$\text{따라서 } \left(4^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)^{\log_2 \frac{1}{6}} = 4^{\log_2 \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{6}} = 4^{\log_2 6} = 6^{\log_2 4} = 6^2 = 36$$

답 ⑤

다른 풀이

$$4^{\log_2 \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 4} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{이므로}$$

$$\left(4^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)^{\log_2 \frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_2 \frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_2 \frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_2 3^{-2}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = 6^2 = 36$$

11

$$\frac{1}{\log_2 a} = \log_a 2, \frac{1}{\log_3 a} = \log_a 3, \log_{25} a = \log_{5^2} a = \frac{1}{2} \log_5 a$$

이므로

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{\log_{25} a}{\log_5 a} = \log_a 2 + \log_a 3 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\log_a 2 + \log_a 3 = \frac{1}{2}$$

$$\log_a 6 = \frac{1}{2}, a^{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\text{따라서 } a = 6^2 = 36$$

답 36

12

조건 (가)에서 $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b} = \sqrt[5]{c} = k$ 라 하면 $a=k^2, b=k^3, c=k^5$ 이다.

이를 조건 (나)에 대입하면

$$\log_2 \frac{bc}{a} = \log_2 \left(\frac{k^3 \times k^5}{k^2} \right)$$

$$= \log_2 k^6$$

$$= 6 \log_2 k = 3$$

에서

$$\log_2 k = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 a \times \log_m b \times \log_n c = \log_2 a \times \frac{\log_2 b}{\log_2 m} \times \frac{\log_2 c}{\log_2 n}$$

$$= \log_2 k^2 \times \frac{\log_2 k^3}{\log_2 m} \times \frac{\log_2 k^5}{\log_2 n}$$

$$= 2 \times 3 \times 5 \times (\log_2 k)^3 \times \frac{1}{\log_2 m} \times \frac{1}{\log_2 n}$$

$$= 2 \times 3 \times 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{\log_2 m} \times \frac{1}{\log_2 n}$$

$$= 1$$

$$\text{에서 } \log_2 m \times \log_2 n = \frac{15}{4}$$

$m > 1, n > 1$ 에서 $\log_2 m > 0, \log_2 n > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_2 m + \log_2 n \geq 2\sqrt{\log_2 m \times \log_2 n}$$

(단, 등호는 $\log_2 m = \log_2 n$ 일 때 성립한다.)

$$\log_2 mn \geq 2\sqrt{\frac{15}{4}}$$

$$\log_2 mn \geq \sqrt{15}$$

따라서 $\log_2 mn$ 의 최솟값은 $\sqrt{15}$ 이다.

답 ③

13

두 점 B, C의 x 좌표를 각각

b, c ($0 < b < c$)라 하면

$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ 이므로

$$c = 3b \quad \dots\dots ㉠$$

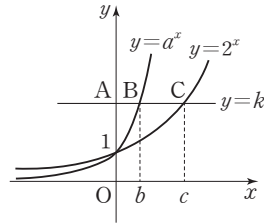
두 점 B, C의 y 좌표는 서로 같으므로

$$a^b = 2^c \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$a^b = 2^{3b} = 8^b \quad \dots\dots ㉢$$

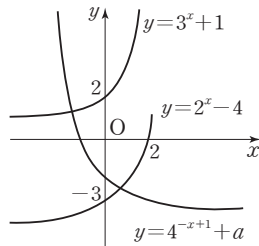
따라서 $a > 2, b > 0$ 이므로 ㉢에서 $a = 8$



답 8

14

두 곡선 $y = 3^x + 1, y = 2^x - 4$ 는 다음과 같다.



$f(x) = 4^{-x+1} + a$ 라 하면

곡선 $y = f(x)$ 가 곡선 $y = 3^x + 1$ 과 제2사분면에서 만나려면

$$f(0) = 4 + a < 2$$

$$a < -2 \quad \dots\dots ㉠$$

곡선 $y = f(x)$ 가 곡선 $y = 2^x - 4$ 와 제4사분면에서 만나려면

$$f(0) = 4 + a > -3, f(2) = 4^{-1} + a < 0$$

$$\text{즉, } -7 < a < -\frac{1}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-7 < a < -\frac{1}{4}$ 이므로 정수 a 는 $-6, -5, -4, -3$ 의 4개이다.

답 ②

15

$f(x) = 2^{x+3} + k$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 서로 만나려면 $k < 0$ 이다.

선분 OA의 길이가 자연수일 때 점 A의 x 좌표를 a (a 는 0이 아닌 정수)라 하면

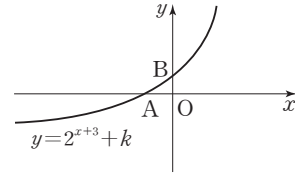
$$0 = 2^{a+3} + k \text{에서 } k = -2^{a+3} \quad \dots\dots ㉠$$

점 B의 y 좌표를 b 라 하면

$$b = 2^{0+3} + k$$

$$b = 8 + k \quad \dots\dots ㉡$$

(i) $a < 0$ 일 때



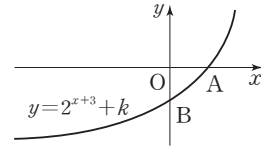
음의 정수 a 의 값에 따라 ㉠, ㉡에서 각각 k, b 의 값이 다음 표와 같이 결정된다.

a	-1	-2	-3	-4	...
k	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	...
b	4	6	7	$\frac{15}{2}$	...

$$\text{삼각형 AOB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{BO} = \frac{1}{2} \times (-a) \times b = -\frac{ab}{2}$$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k = -4$ 일 때 2이다.

(ii) $a > 0$ 일 때



양의 정수 a 의 값에 따라 ㉠, ㉡에서 각각 k, b 의 값이 다음 표와 같이 결정된다.

a	1	2	3	4	...
k	-16	-32	-64	-128	...
b	-8	-24	-56	-120	...

$$\text{삼각형 AOB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{BO} = \frac{1}{2} \times a \times (-b) = -\frac{ab}{2}$$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k = -16$ 일 때 4이다.

(i), (ii)에서 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k = -4$ 일 때 2이므로 $S = 2, s = -4$ 이다.

$$\text{따라서 } S - s = 2 - (-4) = 6$$

답 6

16

$$9^{x+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-x} + 24 \text{에서 } 9 \times 9^x = 9^x + 24$$

$$(9-1) \times 9^x = 24, 8 \times 9^x = 24$$

$$9^x = 3, 3^{2x} = 3$$

$$2x = 1 \text{에서 } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$6a + 5 = 6 \times \frac{1}{2} + 5 = 8$$

답 8

17

$$2^x \times 4^{x^2 - \frac{5}{2}x} = 2^x \times 2^{2(x^2 - \frac{5}{2}x)} = 2^{2x^2 - 4x}$$

$$2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{x-3} = 2 \times 2^{-3(x-3)} = 2^{-3x+10}$$

$$\text{이므로 주어진 부등식은 } 2^{2x^2-4x} \leq 2^{-3x+10}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$2x^2 - 4x \leq -3x + 10$$

$$2x^2 - x - 10 \leq 0, (2x-5)(x+2) \leq 0$$

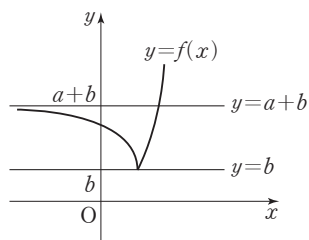
$$-2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 그 개수는 5이다.

답 ③

18

$f(x) = |3^x - a| + b$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$4^{f(x)} - 5 \times 2^{f(x)+2} + 64 = 0$$

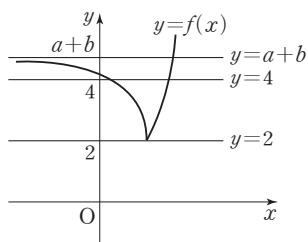
$$(2^{f(x)})^2 - 20 \times 2^{f(x)} + 64 = 0, (2^{f(x)} - 4)(2^{f(x)} - 16) = 0$$

$$2^{f(x)} = 4 \text{ 또는 } 2^{f(x)} = 16$$

$$f(x) = 2 \text{ 또는 } f(x) = 4$$

(i) $b=2$ 일 때

직선 $y=2$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 한 점에서만 만난다.



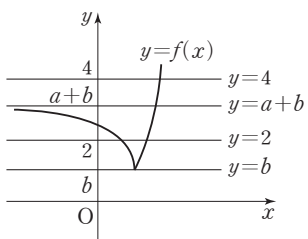
방정식 $4^{f(x)} - 5 \times 2^{f(x)+2} + 64 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$a+b > 4$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 2), (4, 2), (5, 2), \dots, (9, 2)$ 의 7개이다.

(ii) $b \neq 2$ 일 때

조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



방정식 $4^{f(x)} - 5 \times 2^{f(x)+2} + 64 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 는 한 점에서만 만나야 하므로

$$b < 2, 2 < a+b \leq 4$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 1)$ 의 2개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$7+2=9$$

답 9

19

함수 $y = \log_2(2x+a)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 $y = \log_2\{2(x-3)+a\} + b$ 의 그래프와 같다.

함수 $y = \log_2\left\{2\left(x-3+\frac{a}{2}\right)\right\} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = 3 - \frac{a}{2} \text{이므로}$$

$$3 - \frac{a}{2} = -2 \text{에서 } a = 10$$

또한 함수 $y = \log_2(2x+4) + b$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = \log_2 4 + b \text{에서 } b = -2$$

$$\text{따라서 } a+b = 10 + (-2) = 8$$

답 ④

20

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면

$$\log_4 a = \log_8 b$$

$$\frac{1}{2} \log_2 a = \frac{1}{3} \log_2 b$$

$$\frac{3}{2} \log_2 a = \log_2 b$$

$$b = a^{\frac{3}{2}}$$

두 점 B, C의 x 좌표는 서로 같으므로 두 점 A, C의 좌표는 각각

$$(a, \log_4 a), \left(a^{\frac{3}{2}}, \log_4 a^{\frac{3}{2}}\right) \text{이다.}$$

두 직선 OA, OC의 기울기가 서로 같으므로

$$\frac{\log_4 a}{a} = \frac{\log_4 a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$a^{\frac{3}{2}} \times \log_4 a = a \times \log_4 a^{\frac{3}{2}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a \times \log_4 a = \frac{3}{2} \times a \times \log_4 a$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

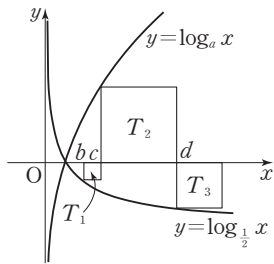
$$a = \frac{9}{4}$$

$$\text{따라서 } k = \log_4 \frac{9}{4} = \log_2 \frac{3}{2} = -1 + \log_2 3$$

답 ④

21

그림과 같이 3개의 정사각형 T_1, T_2, T_3 각각의 x 축 위에 있는 두 꼭짓점 중 x 좌표의 값이 작은 점의 x 좌표를 각각 b, c, d 라 하자.



정사각형 T_1 의 한 변의 길이가 1이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} b = -1, b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

정사각형 T_3 의 한 변의 길이가 3이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} d = -3, d = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

$c = b + 1 = 2 + 1 = 3$ 이고 $d - c = 8 - 3 = 5$ 이므로

정사각형 T_2 의 한 변의 길이는 5이다.

$$\log_a 3 = 5 \text{에서 } a^5 = 3$$

$$\text{따라서 } a^{10} = 3^2 = 9$$

답 9

22

진수는 0보다 커야 하므로

$$4x + 11 > 0, x + 1 > 0$$

$$\text{즉, } x > -\frac{11}{4}, x > -1 \text{이므로 } x > -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

주어진 방정식에서

$$\log_3(4x + 11) = \log_3 3(x + 1)^2$$

$$4x + 11 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0, (x + 2)(3x - 4) = 0$$

$$\text{따라서 } x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}$$

$$\text{그런데 } \textcircled{7} \text{에서 } x > -1 \text{이므로 } x = \frac{4}{3}$$

$$a = \frac{4}{3} \text{이므로 } 12a = 12 \times \frac{4}{3} = 16$$

답 16

23

$$\log_2(x + 3) + \log_2(5 - x) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 에서 진수는 0보다 커야 하므로

$$-3 < x < 5$$

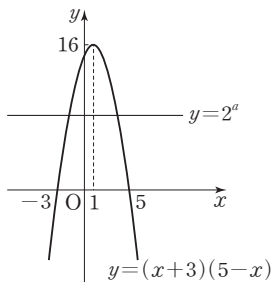
$$\log_2(x + 3)(5 - x) = a$$

$$(x + 3)(5 - x) = 2^a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 $-3 < x < 5$ 에서 서로 다른 두 실근을 가지려면

곡선 $y = (x + 3)(5 - x)$ 와 직선 $y = 2^a$ 이 $-3 < x < 5$ 에서 서로 다른

두 점에서 만나야 한다.



$y = (x + 3)(5 - x) = -(x - 1)^2 + 16$ 은 $x = 1$ 에서 최댓값 16을 가지므로 그림과 같이 $0 < 2^a < 16 = 2^4$ 이어야 한다. 즉, $a < 4$ 따라서 정수 a 의 최댓값은 3이다.

답 3

24

$$\log_{\frac{1}{2}} [\{f(x) - 2\} \{f(x) - 6\}] \geq -5$$

$$-\log_2 [\{f(x) - 2\} \{f(x) - 6\}] \geq -5$$

$$\log_2 [\{f(x) - 2\} \{f(x) - 6\}] \leq 5$$

진수는 0보다 커야 하므로 $\{f(x) - 2\} \{f(x) - 6\} > 0$

$$\text{즉, } f(x) < 2 \text{ 또는 } f(x) > 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\log_2 [\{f(x) - 2\} \{f(x) - 6\}] \leq 5 \text{에서}$$

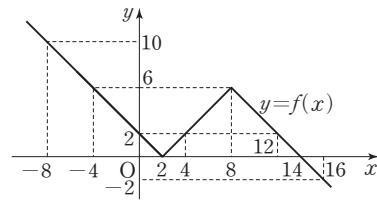
$$\{f(x) - 2\} \{f(x) - 6\} \leq 2^5 = 32$$

$$\{f(x)\}^2 - 8f(x) - 20 \leq 0, \{f(x) + 2\} \{f(x) - 10\} \leq 0$$

$$-2 \leq f(x) \leq 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{1}$ 에서 $f(x)$ 의 값의 범위는

$$-2 \leq f(x) < 2 \text{ 또는 } 6 < f(x) \leq 10$$



$$-8 \leq x < -4 \text{ 또는 } 0 < x < 4 \text{ 또는 } 12 < x \leq 16$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-8, -7, -6, -5, 1, 2, 3, 13, 14, 15, 16$ 이므로 그 개수는 11이다.

답 4

25

함수 $f(x)$ 는 밑이 1보다 큰 로그함수이고, 함수 $g(x)$ 는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 함수 $f(x)$ 와 3보다 큰 모든 실수 x 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족시키는 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다.

$y = \log_9(x - 3) + 2$ 의 역함수를 구하면

$$y - 2 = \log_9(x - 3)$$

$$x - 3 = 9^{y-2}, x = 9^{y-2} + 3$$

$$x, y \text{를 서로 바꾸면 } y = 9^{x-2} + 3 = 3^{2x-4} + 3$$

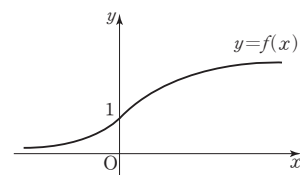
따라서 $a = 2, b = 3$ 이므로

$$2a + b = 2 \times 2 + 3 = 7$$

답 7

26

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$x < 0$ 일 때, $0 < f(x) < 1$ 이고 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 1$ 이다.

$$g\left(\frac{1}{16}\right)=k \ (k<0) \text{이라 하면 } f(k)=-\frac{1}{16}<1 \text{이므로}$$

$$f(k)=4^k=\frac{1}{16}=4^{-2} \text{에서 } k=-2$$

$$a \geq 1 \text{이므로 } g(a)=2$$

$$f(2)=a$$

$$\text{따라서 } a=\log_3(2+1)+1=\log_3 3+1=2$$

답 2

다른 풀이

$y=4^x$ 의 역함수를 구하자.

$$x=\log_4 y$$

x, y 를 서로 바꾸면

$$y=\log_4 x$$

$y=\log_3(x+1)+1$ 의 역함수를 구하자.

$$y-1=\log_3(x+1), \ x+1=3^{y-1}$$

$$x=3^{y-1}-1$$

x, y 를 서로 바꾸면

$$y=3^{x-1}-1$$

또한 $x < 0$ 일 때, $0 < f(x) < 1$ 이고 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 1$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} \log_4 x & (0 < x < 1) \\ 3^{x-1}-1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$\left|g\left(\frac{1}{16}\right)\right|=|g(a)| \text{이므로}$$

$$-\log_4 \frac{1}{16}=3^{a-1}-1, \ 2=3^{a-1}-1, \ 3^{a-1}=3$$

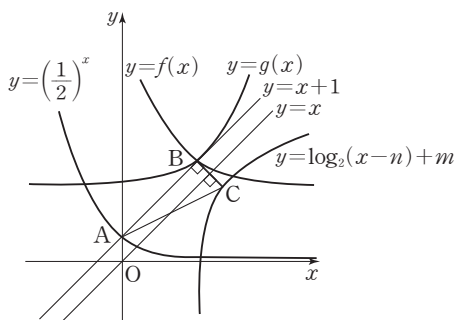
$$\text{따라서 } a=2$$

27

점 A의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 점 B의 좌표는 $(m, 1+n)$ 이다.

점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$ 에서 $m=n$ 이다.

함수 $y=2^x$ 의 그래프도 y 축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$ 이라 하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프도 점 B($m, 1+n$)을 지난다. 또한 함수 $y=g(x)$ 의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$ 이고 기울기가 -1 인 직선이 두 함수 $y=g(x)$, $y=\log_2(x-n)+m$ 의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m, m+1)$, $(m+1, m)$ 이므로 $\overline{BC}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1 이므로 삼각형 ABC에서 $\angle B=90^\circ$ 이다.

$m > 0$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}m \times \sqrt{2} = m = 6$$

$$\text{따라서 } f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6 \text{이므로}$$

$$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$$

답 22

28

$$g(x)=x^2-x+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \text{이라 하면}$$

단원구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $g(x)$ 는

$$\text{최댓값 } g(-2)=\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{27}{4},$$

$$\text{최솟값 } g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \text{을 가진다.}$$

이때 함수 $f(x)$ 에서 로그의 밑은 1보다 크므로

$$M=\log_2 \frac{27}{4}, \ m=\log_2 \frac{1}{2}=-1$$

$$(2^M)^m=\left(2^{\log_2 \frac{27}{4}}\right)^{-1}=\left(\frac{27}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{27}$$

답 ①

29

$0 < \frac{a}{a+1} < 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최댓값을 가진다.

$$f(-2)=2 \times \left(\frac{a}{a+1}\right)^{-2}=72$$

$$\left(\frac{a+1}{a}\right)^2=36$$

$$\frac{a+1}{a}=6, \ a+1=6a \text{에서 } a=\frac{1}{5}$$

따라서 $f(x)=2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x$ 이고 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값

$$f(1)=2 \times \frac{1}{6}=\frac{1}{3} \text{을 가진다.}$$

답 ②

30

(i) $-1 < a < 0$ 일 때

$0 < a+1 < 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{4}$ 일 때 최댓값을 가진다.

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{(a+1)} \frac{1}{4}=2$$

$$(a+1)^2=\frac{1}{4}, \ a+1=\pm \frac{1}{2}$$

$$-1 < a < 0 \text{이므로 } a=-\frac{1}{2}$$

(ii) $a > 0$ 일 때

$a+1 > 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=16$ 일 때 최댓값을 가진다.

$$f(16)=\log_{(a+1)} 16=2$$

$$(a+1)^2=16, \ a+1=\pm 4$$

$$a > 0 \text{이므로 } a=3$$

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값은 $-\frac{1}{2}$ 또는 3이므로 그 합은

$$-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$$

답 ③

02 삼각함수

정답

본문 20~29쪽

01 50	02 ③	03 ⑤	04 24	05 ④
06 ②	07 ①	08 ③	09 ④	10 7
11 8	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ③	17 ②	18 ③	19 5	20 ④
21 ⑤	22 ③	23 ③	24 33	25 7
26 ②	27 ②	28 ③	29 ④	30 49
31 ②	32 ③			

01

부채꼴의 호의 길이가 2π 이므로 $r\theta = 2\pi$ ㉠

부채꼴의 넓이가 10π 이므로 $\frac{1}{2}r^2\theta = 10\pi$ ㉡

㉠, ㉡에서 $r=10$, $\theta=\frac{\pi}{5}$

따라서 $\frac{r\pi}{\theta} = \frac{10\pi}{\frac{\pi}{5}} = 50$

답 50

02

부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 13 \times \frac{10}{13}\pi = 10\pi$$

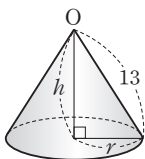
원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$2\pi r = 10\pi$ 에서 $r=5$

$$5^2 + h^2 = 13^2 \text{에서 } h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

따라서 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi$$



답 ③

03

$\angle AOB = \theta$, $\overline{OC} = a$, $\overline{CD} = b$ 라 하면

색칠한 두 영역의 넓이가 서로 같으므로

$$\frac{1}{2}a^2\theta = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times (a+b)^2 \times \theta$$

$$a^2 + (a+b)^2 = 10^2$$

a , b 는 모두 자연수이므로 $a=6$, $a+b=8$

세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π 이므로

$$6\theta + 8\theta + 10\theta = 6\pi, 24\theta = 6\pi, \theta = \frac{\pi}{4}$$

따라서 통로 CEFD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (a+b)^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times a^2 \times \theta = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times (8^2 - 6^2) = \frac{7}{2}\pi$$

답 ⑤

04

$$\sin \theta = \frac{b}{6}, \tan \theta = \frac{b}{a} \text{이므로 } \sin \theta \times \tan \theta = \frac{b}{6} \times \frac{b}{a} = \frac{b^2}{6a}$$

$$\text{따라서 } \frac{b^2}{6a} = \frac{5}{6} \text{에서 } b^2 = 5a$$

$$\text{또한 } a^2 + b^2 = 6^2 \text{이므로 } a^2 + 5a = 36$$

$$a^2 + 5a - 36 = 0, (a-4)(a+9) = 0$$

$$a=4 \text{ 또는 } a=-9$$

$$\text{그런데 } |a| \leq 6 \text{이므로 } a=4$$

$$b^2 = 5a = 5 \times 4 = 20$$

$$\text{따라서 } a+b^2 = 4+20=24$$

답 24

05

$$\frac{\tan \theta}{1-\cos \theta} - \frac{\tan \theta}{1+\cos \theta} = \tan \theta \left(\frac{1}{1-\cos \theta} - \frac{1}{1+\cos \theta} \right)$$

$$= \tan \theta \left\{ \frac{1+\cos \theta - (1-\cos \theta)}{1-\cos^2 \theta} \right\}$$

$$= \tan \theta \times \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\frac{2}{\sin \theta} = -8 \text{에서 } \sin \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \cos \theta = -\sqrt{1-\sin^2 \theta} = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서

$$(2 \sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta + 2 \cos \theta)^2$$

$$= 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$+ (\sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \cos^2 \theta)$$

$$= 5(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 8 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 5 \times 1 + 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = 5 + \frac{\sqrt{15}}{2}$$

답 ④

06

$$\sin \theta \tan \theta < 0 \text{ ㉠}$$

$$\cos \theta \tan \theta > 0 \text{ ㉡}$$

$$\text{㉡에서 } \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > 0 \text{이므로 } \sin \theta > 0 \text{ ㉢}$$

$$\text{㉠, ㉢에서 } \tan \theta < 0$$

$\sin \theta > 0$, $\tan \theta < 0$ 이므로 각 θ 는 제2사분면의 각이다.

또한 θ 를 나타내는 동경과 3θ 를 나타내는 동경이 서로 y 축에 대하여 대

$$\text{칭이므로 } \theta + 3\theta = 2n\pi + \pi \text{ (} n \text{는 정수)에서 } \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$$

그런데 θ 는 제2사분면의 각이므로 양수 θ 의 최솟값은

$$n=1 \text{일 때 } \alpha = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{따라서 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \alpha = -1 \text{이므로}$$

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-1} = -\sqrt{2}$$

답 ②

07

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이고 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

따라서

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(\pi + \theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = -7$$

답 ①

08

주어진 함수 $y = 2 \tan(ax + b)$ 의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{6} \text{이고 } a > 0 \text{이므로 } a = 6$$

$f(x) = 2 \tan(6x + b)$ 라 하면 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ 이므로

$$2 \tan\left(6 \times \frac{\pi}{12} + b\right) = 0, \tan\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = 0$$

$$0 < b < \pi \text{이므로 } \frac{\pi}{2} < b + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

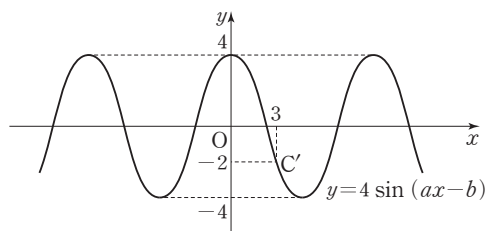
$$b + \frac{\pi}{2} = \pi \text{에서 } b = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{따라서 } ab = 6 \times \frac{\pi}{2} = 3\pi$$

답 ③

09

함수 $y = 4 \sin(ax - b)$ 의 그래프는 함수 $y = 4 \sin(ax - b) - 1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y = 4 \sin(ax - b)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = 4 \sin(ax - b) - 1$ 의 그래프가 점 $C(3, -3)$ 을 지나므로

함수 $y = 4 \sin(ax - b)$ 의 그래프는 점 $C'(3, -2)$ 를 지난다.

$f(x) = 4 \sin(ax - b)$ 라 하자.

$0 < a < 3$ 일 때 $f(a) = 0$ 이면 $f(0) = 4$, $f(3) = -2$ 이므로

$$(3 - a) : a = \frac{\pi}{6} : \frac{\pi}{2} = 1 : 3, 3 - a = \frac{a}{3}$$

$$\text{즉, } a + \frac{a}{3} = 3 \text{에서 } a = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

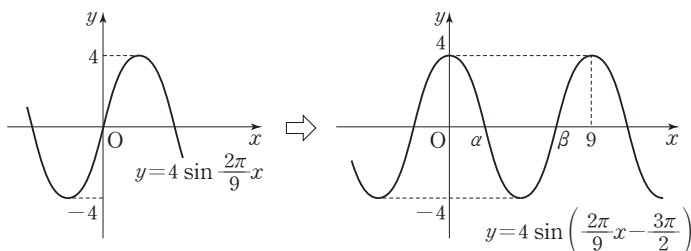
따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 주기는 $4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{2\pi}{a} = 9 \text{에서 } a = \frac{2\pi}{9}$$

함수 $y = 4 \sin(ax - b) = 4 \sin\left(a\left(x - \frac{b}{a}\right)\right)$ 의 그래프는 함수

$y = 4 \sin ax$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{b}{a}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$\alpha < \beta < 9$ 일 때 $f(\beta) = 0$ 이면 $\beta = 9 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$ 이므로 $\frac{b}{a}$ 의 최솟값은 $\frac{27}{4}$ 이고 그때의 b 의 값은 $b = \frac{27}{4} \times a = \frac{27}{4} \times \frac{2\pi}{9} = \frac{3\pi}{2}$



$$\text{따라서 } \frac{a+b}{\pi} \text{의 최솟값은 } \frac{\frac{2\pi}{9} + \frac{3\pi}{2}}{\pi} = \frac{31}{18}$$

답 ④

주의

함수 $f(x) = 4 \sin(ax - b) = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{9}x - b\right)$ 의 그래프가 점

$C'(3, -2)$ 를 지난다는 것을 이용하여 b 의 최솟값을 구할 때는 주의해야 한다.

$$f(3) = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{9} \times 3 - b\right) = -2, \sin\left(\frac{2\pi}{3} - b\right) = -\frac{1}{2}$$

$$b > 0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{3} - b < \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} - b = -\frac{\pi}{6} \text{에서 } b = \frac{5\pi}{6}$$

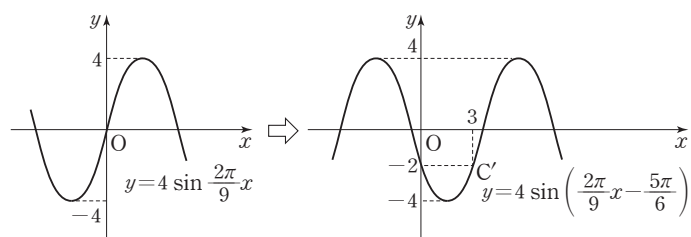
$$\frac{2\pi}{3} - b = -\frac{5\pi}{6} \text{에서 } b = \frac{3\pi}{2}$$

∴

$$b = \frac{5\pi}{6} \text{일 때 } f(x) = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{9}x - \frac{5\pi}{6}\right) = 4 \sin\left\{\frac{2\pi}{9}\left(x - \frac{15}{4}\right)\right\}$$

이므로 그림과 같이 함수 $y = 4 \sin \frac{2\pi}{9}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

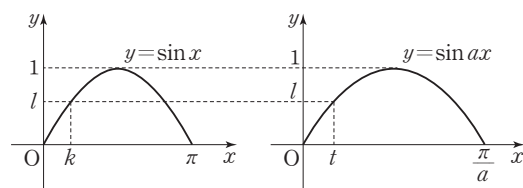
$\frac{15}{4}$ 만큼 평행이동한 것으로 주어진 그래프와 일치하지 않는다.



참고

다음 그림에서 삼각함수의 그래프의 주기가 바뀌어도 비례식

$k : \pi = t : \frac{\pi}{a}$ 가 성립한다.



$$\sin at = l \text{에서 } at = k, t = \frac{k}{a}$$

$$\text{따라서 } t : \frac{\pi}{a} = \frac{k}{a} : \frac{\pi}{a} = k : \pi \text{이다.}$$

10

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = 3$$

$$b = 3$$

함수 $f(x) = a \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + 3$ 의 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로
 $-a + 3 = -1$, $a = 4$

따라서 함수 $f(x) = 4 \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + 3$ 의 최댓값은

$$4 + 3 = 7$$

답 7

11

$$-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1 \text{이므로}$$

$$-3 + k \leq 3 \sin \frac{x}{2} + k \leq 3 + k$$

$$(3+k) - (-3+k) = 6 \text{인데 } M - m = 5 \text{이므로}$$

$$-3 + k < 0, 3 + k > 0$$

따라서 함수 $f(x) = \left| 3 \sin \frac{x}{2} + k \right| - 2$ 의 최댓값은

$$-(-3+k) - 2 = -k + 1 \text{ 또는 } (3+k) - 2 = k + 1 \text{이고 최솟값은 } -2 \text{이다.}$$

$$-k + 1 - (-2) = 5 \text{에서 } k = -2$$

$$k + 1 - (-2) = 5 \text{에서 } k = 2$$

구하는 모든 실수 k 의 제곱의 합은

$$(-2)^2 + 2^2 = 8$$

답 8

12

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 5 \cos^2 x + 4 \sin x \\ &= -\sin^2 x - 5(1 - \sin^2 x) + 4 \sin x \\ &= 4 \sin^2 x + 4 \sin x - 5 \end{aligned}$$

이때 $\sin x = t$ 라 하면 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 이다.

따라서 함수 $y = 4t^2 + 4t - 5 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 6$ 의 최댓값은 $t = 1$ 일 때 3이

고, 최솟값은 $t = -\frac{1}{2}$ 일 때 -6 이다.

따라서 $M = 3$, $m = -6$ 이므로

$$M - m = 3 - (-6) = 9$$

답 9

13

$$1 - 2 \sin^2 x = \cos x \text{에서}$$

$$1 - 2(1 - \cos^2 x) = \cos x$$

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos x, 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0 \text{이므로}$$

$$\cos x = 1 \text{ 또는 } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로}$$

$$(i) \cos x = 1 \text{에서}$$

$$x = 0$$

$$(ii) \cos x = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 $n = 3$, $a = \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$n\alpha = 3 \times \frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

답 ③

14

방정식 $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \tan 2x = 0$ 의 실근은 두 함수

$y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = -\tan 2x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

$y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

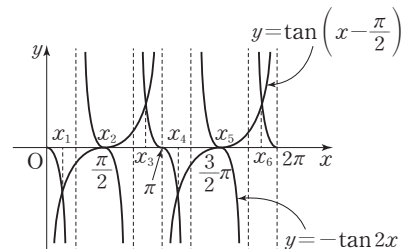
또한 $y = -\tan 2x$ 의 그래프는 $y = \tan 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여

대칭이동한 것이고 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = -\tan 2x$ 의 그래프는 그림과 같고

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 6개의 점에서 만난다.

만나는 6개의 점의 x 좌표를 작은 값부터 차례대로 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 이라 하자.



두 함수 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = -\tan 2x$ 의 그래프는 모두 점

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$x_1 + x_3 = \pi, x_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x_4 + x_6}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{에서}$$

$$x_4 + x_6 = 3\pi, x_5 = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 모든 실근의 합은

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = (x_1 + x_3) + x_2 + (x_4 + x_6) + x_5$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} + 3\pi + \frac{3}{2}\pi$$

$$= 6\pi$$

답 ⑤

15

$$\frac{x-\pi}{3}=\theta \text{라 하면 } x=3\theta+\pi \text{이므로}$$

$$\frac{2x+\pi}{6}=\frac{2(3\theta+\pi)+\pi}{6}=\theta+\frac{\pi}{2}$$

x 에 대한 부등식 $2\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right)<0$ 을 θ 에 대한 부등식으로 바꾸면

$$2\sin^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)<0$$

$$2\sin^2\theta+\sin\theta<0$$

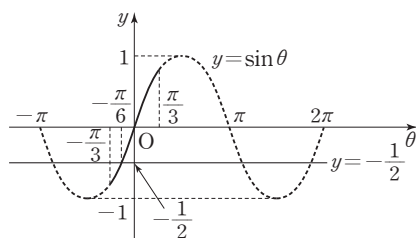
$$\sin\theta(2\sin\theta+1)<0$$

$$-\frac{1}{2}<\sin\theta<0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$0\leq x<2\pi \text{이므로 } -\frac{\pi}{3}\leq\theta<\frac{\pi}{3} \text{이다.}$$

$y=\sin\theta$ 의 그래프는 다음과 같으므로 $-\frac{\pi}{3}\leq\theta<\frac{\pi}{3}$ 에서 부등식 $\textcircled{7}$ 을

만족시키는 θ 의 값의 범위는 $-\frac{\pi}{6}<\theta<0$



$$\text{즉, } -\frac{\pi}{6}<\frac{x-\pi}{3}<0 \text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{2}<x-\pi<0, \frac{\pi}{2}<x<\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=\pi \text{이므로}$$

$$4\alpha+\beta=2\pi+\pi=3\pi$$

답 ③

16

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$A+C=\pi-B$$

따라서

$$4\sin(A+C)\sin B=4\sin(\pi-B)\sin B=4\sin^2 B=3$$

$$\sin^2 B=\frac{3}{4}$$

$$0<B<\pi \text{이므로 } \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times\sqrt{10}$$

따라서

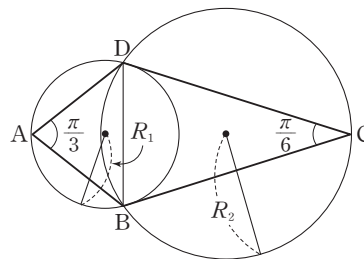
$$\overline{AC}=2\times\sqrt{10}\times\sin B$$

$$=2\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{30}$$

답 ③

17



그림과 같이 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \frac{\pi}{3}}=2R_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

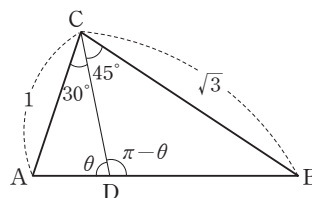
$$\frac{\overline{BD}}{\sin \frac{\pi}{6}}=2R_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} \div \textcircled{7}$ 을 하면

$$\frac{2R_2}{2R_1}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

답 ②

18



그림과 같이 $\angle ADC=\theta$ 로 놓으면

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ}$$

$$\overline{AD}=\frac{1}{\sin \theta}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2\sin \theta}$$

삼각형 BCD에서 $\angle BDC=\pi-\theta$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}$$

$$\overline{BD}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}\times\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sin \theta}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin \theta}$$

따라서

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2\sin \theta}}{\frac{1}{2\sin \theta}}=\sqrt{6}$$

답 ③

다른 풀이

삼각형 ADC와 삼각형 BCD의 넓이의 비는 선분 AD와 선분 BD의 길이의 비와 같다.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{(\text{삼각형 BCD의 넓이})}{(\text{삼각형 ADC의 넓이})}$$

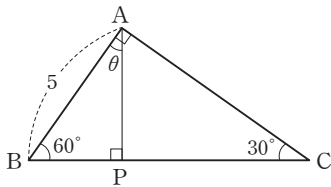
$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \sqrt{3} \times \sin 45^\circ}{\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times 1 \times \sin 30^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}
\end{aligned}$$

19

삼각형 ABP에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{BP}}{\sin \theta} = \frac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ} \text{가 성립하므로}$$

$\frac{\overline{BP}}{\sin \theta}$ 의 최솟값은 $\overline{AP}$ 의 길이가 최소일 때이다.



$\overline{AP}$ 의 길이는 점 P가 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발일 때 최소

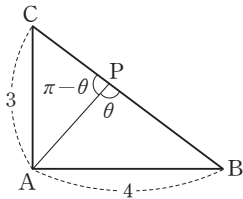
이므로 $\frac{\overline{BP}}{\sin \theta}$ 의 최솟값은

$$\frac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB} \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \overline{AB} = 5$$

답 5

20

$\angle APB = \theta$ 로 놓으면 $\angle APC = \pi - \theta$



삼각형 ABP와 삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1 , R_2 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin \theta} = 2R_1, \quad \frac{3}{\sin(\pi - \theta)} = 2R_2$$

이때 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ 이므로

$$R_1 : R_2 = 4 : 3$$

따라서 삼각형 ABP와 삼각형 APC의 외접원의 넓이의 비는

$$\begin{aligned}
S_1 : S_2 &= \pi R_1^2 : \pi R_2^2 \\
&= 4^2 : 3^2 = 16 : 9
\end{aligned}$$

답 ④

21

원에 내접하는 삼각형의 개수를 n 이라 하면

$$30^\circ \times n < 180^\circ \text{에서}$$

$$n < 6$$

따라서 원에 내접하는 삼각형의 최대 개수는 5이다.

또 삼각형 AP_1P_{n+1} ($n=1, 2, 3, 4, 5$)의 외접원의 반지름의 길이가 R 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin 30^\circ} = 2R \text{이므로 } \overline{P_1P_2} = 2R \times \frac{1}{2} = R$$

$$\frac{\overline{P_1P_3}}{\sin 60^\circ} = 2R \text{이므로 } \overline{P_1P_3} = 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R$$

$$\frac{\overline{P_1P_4}}{\sin 90^\circ} = 2R \text{이므로 } \overline{P_1P_4} = 2R \times 1 = 2R$$

$$\frac{\overline{P_1P_5}}{\sin 120^\circ} = 2R \text{이므로 } \overline{P_1P_5} = 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R$$

$$\frac{\overline{P_1P_6}}{\sin 150^\circ} = 2R \text{이므로 } \overline{P_1P_6} = 2R \times \frac{1}{2} = R$$

따라서

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \overline{P_1P_{k+1}} &= \sum_{k=1}^5 \overline{P_1P_{k+1}} \\
&= \overline{P_1P_2} + \overline{P_1P_3} + \overline{P_1P_4} + \overline{P_1P_5} + \overline{P_1P_6} \\
&= 4R + 2\sqrt{3}R \\
&= 2(2 + \sqrt{3})R = 6(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

이므로 $R=3$

답 ⑤

22

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{9^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 9 \times 7} = \frac{105}{126} = \frac{5}{6}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}
\overline{AD}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{CD} \times \cos C \\
&= 7^2 + 3^2 - 2 \times 7 \times 3 \times \frac{5}{6} = 23
\end{aligned}$$

$\overline{AD} > 0$ 이므로 $\overline{AD} = \sqrt{23}$

답 ③

23

피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}
\overline{AC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \\
&= \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4
\end{aligned}$$

따라서 직사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$$\overline{AO} = \overline{CO} = 2 \text{이고 } \overline{OB} = 2 \text{이다.}$$

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \alpha = \frac{2^2 + 2^2 - 3^2}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{1}{8}$$

또 $\alpha + \beta = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sin \beta &= \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\
&= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}
\end{aligned}$$

따라서

$$\cos \alpha + \sin \beta = \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7} - 1}{8}$$

답 ③

24

$\overline{PC}=x$ 라 하면

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

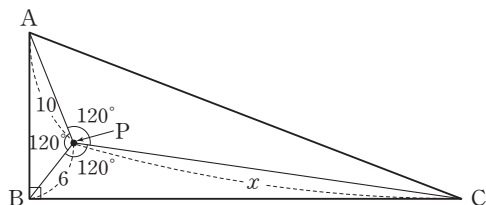
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 10^2 + x^2 - 2 \times 10 \times x \times \cos 120^\circ \\ &= 100 + x^2 + 10x\end{aligned}$$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \cos 120^\circ \\ &= 100 + 36 + 60 = 196\end{aligned}$$

삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= 6^2 + x^2 - 2 \times 6 \times x \times \cos 120^\circ \\ &= 36 + x^2 + 6x\end{aligned}$$



삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \\ 100 + x^2 + 10x &= 196 + 36 + x^2 + 6x\end{aligned}$$

$$4x = 132$$

따라서 $x=33$

답 33

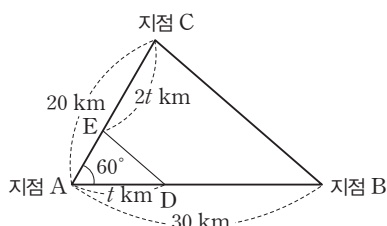
25

그림과 같이 두 여객선 P와 Q의 위치를 잇는 선분이 두 지점 B와 C를 잇는 선분과 평행이 되는 순간의 두 여객선의 위치를 각각 D, E라고 하자. 이때 여객선 P가 움직인 거리를 t km라 하면 여객선 Q는 여객선 P의 2배의 속력으로 움직이므로 여객선 Q가 움직인 거리는 $2t$ km이다.

즉, $\overline{AD}=t$ km, $\overline{CE}=2t$ km이므로

$$\overline{AE}=20-2t(\text{km})$$

$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ 이므로 삼각형 ADE와 삼각형 ABC는 서로 닮은 도형이다.



따라서 $\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{AB} : \overline{AC}$ 이므로

$$t : (20-2t) = 30 : 20$$

$$20t = 30(20-2t)$$

$$80t = 600, t = \frac{15}{2}$$

$$\text{따라서 } \overline{AD} = \frac{15}{2} \text{ km, } \overline{AE} = 20 - 2 \times \frac{15}{2} = 5(\text{km})$$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \cos 60^\circ \\ &= \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 5^2 - 2 \times \frac{15}{2} \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{225}{4} + 25 - \frac{75}{2} \\ &= \frac{175}{4}\end{aligned}$$

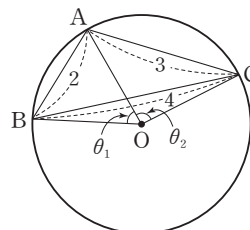
$$\overline{DE} > 0 \text{ 이므로 } \overline{DE} = \frac{5\sqrt{7}}{2}(\text{km})$$

따라서 $p=2, q=5$ 이므로

$$p+q=7$$

답 7

26



$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ 이므로 그림과 같이 현을 옮겨 세 변의 길이가 각각 2, 3, 4인 삼각형 ABC를 만들 수 있다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin A} = 2R$$

$$R = \frac{4}{2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \frac{R^2 + R^2 - 2^2}{2 \times R \times R} = \frac{2 \times \frac{64}{15} - 4}{2 \times \frac{64}{15}} \\ &= \frac{128 - 60}{128} = \frac{68}{128} = \frac{17}{32}\end{aligned}$$

답 ②

27

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$ 라 하면

$$\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{5} \text{에서}$$

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 3 : 5$$

따라서 $a=7k, b=3k, c=5k$ ($k>0$)으로 놓으면

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 3k \times 5k} \\ &= \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이므로

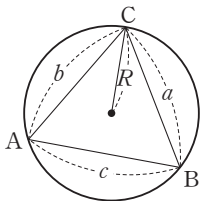
$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{3}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

따라서 원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

참고

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면



사인법칙 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 에서

$\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 이므로

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

28

$A + B + C = \pi$ 에서 $B + C = \pi - A$ 이므로

$$\sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$$

$$\sin(B + C) \cos A = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + B\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + B\right) \text{에서}$$

$$\sin A \cos A = \sin B \cos B$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

양변에 $4Rabc$ 를 곱하면

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^4 - b^4 - c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

따라서 $a = b$ 또는 $a^2 + b^2 = c^2$

그런데 $a \neq b$ 이므로 구하는 삼각형 ABC는 $C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

답 ②

$$\overline{AB} > 0 \text{이므로 } \overline{AB} = \sqrt{21}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ \\ = 1 + 3 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\overline{AC} > 0 \text{이므로 } \overline{AC} = 1$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}$$

$$\sin C = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R \text{에서}$$

$$R = \frac{\overline{AB}}{2 \sin C} = \frac{\sqrt{21}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}$$

답 ④

다른 풀이

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ \\ = 1 + 3 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\overline{AC} > 0 \text{이므로 } \overline{AC} = 1$$

$\overline{AC} = \overline{CD} = 1$ 이므로 삼각형 ADC는 이등변삼각형이다.

따라서 $C = 120^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos C \\ = 1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ = 1 + 16 + 4 = 21$$

$$\overline{AB} > 0 \text{이므로 } \overline{AB} = \sqrt{21}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R \text{에서}$$

$$R = \frac{\overline{AB}}{2 \sin C} = \frac{\sqrt{21}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{21}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}$$

30

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \cos(\angle BAD) \\ = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 120^\circ \\ = 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ = 19 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\overline{BC} = \overline{CD} = x$ 로 놓으면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos 120^\circ \\ = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ = 3x^2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

29

$\angle ADB = 150^\circ$ 이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \cos 150^\circ \\ = 9 + 3 - 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 21$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$3x^2=19, x^2=\frac{19}{3}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이와 삼각형 BCD의 넓이의 합이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times x^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{19\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{37\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

$p=12, q=37$ 이므로

$$p+q=12+37=49$$

답 49

31

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$ 라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= (a+b)^2 - 2ab - 2ab \cos C \\ &= (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos C) \end{aligned}$$

주어진 조건에서

$$c=2\sqrt{26}, a+b=8+2\sqrt{2}, C=135^\circ$$

이므로

$$(2\sqrt{26})^2 = (8+2\sqrt{2})^2 - 2ab(1 + \cos 135^\circ)$$

$$104 = 72 + 32\sqrt{2} - 2ab \left\{ 1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

$$104 = 72 + 32\sqrt{2} - 2ab + \sqrt{2}ab$$

$$(2-\sqrt{2})ab = -32 + 32\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{32(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} \\ &= \frac{32(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{32}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab \sin C &= \frac{1}{2} \times 16\sqrt{2} \times \sin 135^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \end{aligned}$$

답 ②

32

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 120^\circ \\ &= 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = 19 \end{aligned}$$

$\overline{AC} > 0$ 이므로 $\overline{AC} = \sqrt{19}$

$\overline{AB} \parallel \overline{EC}$ 이고 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ 에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이므로

삼각형 CPA의 높이를 h 라 하면 삼각형 CPA의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{19} \times h \quad \dots\dots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{19} \times h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{57}}{19}$$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{AC} : \overline{DE} = \sqrt{19} : \sqrt{57} = 1 : \sqrt{3}$$

따라서 삼각형 DEP의 높이를 h' 이라 하면

$$h' = \sqrt{3}h = \frac{9\sqrt{19}}{19}$$

그러므로 삼각형 PDE의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times h' &= \frac{1}{2} \times \sqrt{57} \times \frac{9\sqrt{19}}{19} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{19} \times \frac{9\sqrt{19}}{19} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 120^\circ \\ &= 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 19 \end{aligned}$$

$\overline{AC} > 0$ 이므로 $\overline{AC} = \sqrt{19}$

$\overline{AB} \parallel \overline{EC}$ 이고 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ 에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 서로 같으므로

$$\overline{CP}=2, \overline{AP}=3$$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{AC} : \overline{DE} = \sqrt{19} : \sqrt{57} = 1 : \sqrt{3}$$

따라서 $\overline{PE} = \sqrt{3} \times \overline{PC} = 2\sqrt{3}, \overline{PD} = \sqrt{3} \times \overline{PA} = 3\sqrt{3}$

$\angle ABC = \angle APC = \angle DPE = 120^\circ$ 이므로

삼각형 PDE의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \sin 120^\circ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

참고

삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC} : \overline{DE} = \sqrt{19} : \sqrt{57} = 1 : \sqrt{3}$ 에서 넓이의 비는 $1 : 3$

삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이고 삼각형 ABC의 넓이가

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로 삼각형 PDE의 넓이는 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ 이다.

정답

본문 32~43쪽

01 ④	02 ②	03 ④	04 ②	05 ③
06 ②	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ④	19 340	20 ③
21 ②	22 ④	23 ②	24 ③	25 ①
26 ②	27 ①	28 ②	29 ④	30 ③
31 ③	32 ②	33 77	34 50	

01

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1a_9 = a(a+8d) \\ = a^2 + 8ad = -60 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_4a_6 = (a+3d)(a+5d) \\ = a^2 + 8ad + 15d^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡-㉠을 하면

$$15d^2 = 60, d^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서

$$a_3a_7 = (a+2d)(a+6d) \\ = a^2 + 8ad + 12d^2 \\ = -60 + 12 \times 4 \quad (\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{에서}) \\ = -60 + 48 = -12$$

답 ④

02

$n=2$ 일 때,

$\{1, 2\}$ 에서 $A_2 = \{3\}$ 이므로 $a_2 = 1$

$n=3$ 일 때,

$\{1, 2, 3\}$ 에서 $A_3 = \{3, 4, 5\}$ 이므로 $a_3 = 3$

$n=4$ 일 때,

$\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $A_4 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로 $a_4 = 5$

$\vdots$

$n=k$ 일 때,

$\{1, 2, 3, \dots, k-1, k\}$ 에서 $A_k = \{3, 4, 5, \dots, 2k-1\}$ 이므로

$$a_k = 2k - 3$$

즉, $a_n = 2n - 3$ ($n=2, 3, 4, \dots$)이므로

$$2n - 3 = 99, 2n = 102$$

$$n = 51$$

따라서 $a_n = 99$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값은 51이다.

답 ②

03

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 공차가 $2d$ 이고

$$|a_4| > |a_5| \text{ 이므로}$$

$$(a_4)^2 > (a_5)^2$$

$$\text{즉, } (a_1 + 6d)^2 > (a_1 + 8d)^2$$

$$(a_1)^2 + 12a_1d + 36d^2 > (a_1)^2 + 16a_1d + 64d^2$$

$$4a_1d + 28d^2 = 4d(a_1 + 7d) < 0$$

$$d > 0 \text{ 이므로 } a_1 < -7d \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_4a_5 = (a_1 + 6d)(a_1 + 8d)$$

$$= (a_1)^2 + 14a_1d + 48d^2$$

$$= (a_1 + 7d)^2 - d^2$$

㉠에서 $a_1 < -7d$ 이고 a_1 은 정수이므로

$a_1 = -7d - 1$ 일 때, a_4a_5 는 최솟값을 가진다.

따라서 $f(d) = -7d - 1$ 이므로

$$f(2) + f(3) = (-15) + (-22) = -37$$

답 ④

다른 풀이

모든 항이 정수이고 공차가 $2d > 0$ (d 는 자연수)이므로 $a_4 < a_5$

$$|a_4| > |a_5| \text{ 에서 } a_4 < 0 < a_5, a_4 + a_5 < 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

(i) $d=2$ 일 때, 공차가 4이므로 ㉠에서

$$a_4 = -3, a_5 = 1$$

$$\text{이때 } a_1 = f(2) = a_4 - 3 \times (\text{공차}) = -3 - 3 \times 4 = -15$$

(ii) $d=3$ 일 때, 공차가 6이므로 ㉠에서

$$a_4 = -4, a_5 = 2 \text{ 또는 } a_4 = -5, a_5 = 1$$

그런데 a_4a_5 의 값이 최소이려면 $a_4 = -4, a_5 = 2$ 이다.

$$\text{이때 } a_1 = f(3) = a_4 - 3 \times (\text{공차}) = -4 - 3 \times 6 = -22$$

(i), (ii)에서

$$f(2) + f(3) = -15 - 22 = -37$$

04

$\log_3 \frac{1}{2}, a_1, a_2, \dots, a_{10}, \log_3 18$ 이 등차수열을 이루므로 12개의 수의

합을 S_{12} 라 하면

$$S_{12} = \frac{12 \left(\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 18 \right)}{2}$$

$$= \frac{12 \log_3 \left(\frac{1}{2} \times 18 \right)}{2}$$

$$= 6 \times \log_3 9 = 6 \times 2 \log_3 3 = 12$$

따라서

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = S_{12} - \left(\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 18 \right)$$

$$= 12 - \log_3 9$$

$$= 12 - 2 = 10$$

답 ②

05

3^n 이하의 모든 자연수의 합은 첫째항과 공차가 1이고 끝항이 3^n 인 등차수열의 합이므로

$$1+2+3+\cdots+3^n = \frac{3^n(3^n+1)}{2} \\ = \frac{3^{2n}+3^n}{2} \quad \cdots \textcircled{7}$$

3^n 이하의 자연수 중에서 3의 배수인 모든 자연수의 합은 첫째항과 공차가 3이고 끝항이 3^n 인 등차수열의 합이므로

$$3+6+9+\cdots+3^n = 3(1+2+3+\cdots+3^{n-1}) \\ = 3 \times \frac{3^{n-1}(3^{n-1}+1)}{2} \\ = \frac{3^{2n-1}+3^n}{2} \quad \cdots \textcircled{8}$$

따라서 3^n 이하의 자연수 중에서 3과 서로소인 모든 자연수의 합은

$\textcircled{7}-\textcircled{8}$ 이므로 a_n 은

$$a_n = \frac{3^{2n}+3^n}{2} - \frac{3^{2n-1}+3^n}{2} \\ = \frac{3^{2n}-3^{2n-1}}{2} \\ = \frac{3^{2n-1}(3-1)}{2} \\ = 3^{2n-1}$$

따라서 $\log_3 a_n = \log_3 3^{2n-1} = 2n-1$ 이므로

$$\log_3 a_{50} = 2 \times 50 - 1 = 99$$

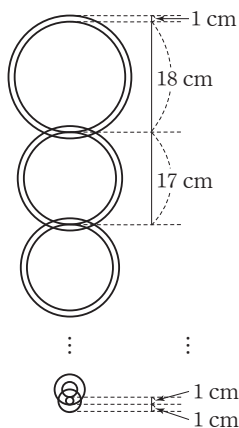
답 ③

06

그림과 같이 가장 위의 폭 1 cm와 가장 아래의 폭 1 cm를 남겨두고 고리의 안쪽 지름의 길이를 구하면 18 cm, 17 cm, ..., 1 cm이므로 가장 위에 있는 고리의 위 끝에서 가장 아래에 있는 고리의 아래 끝까지의 길이는

$$1 + (1+2+\cdots+18) + 1 \\ = 2 + \frac{18 \times 19}{2} \\ = 2 + 171 = 173(\text{cm})$$

따라서 $a = 173$



답 ②

07

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_3 = -\frac{5}{2} \text{에서 } a + ar^2 = -\frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$r^2 > 0$ 이므로 $a < 0$

$$a_2 a_4 = 4 \text{에서 } ar \times ar^3 = a^2 r^4 = (ar^2)^2 = 4$$

$a < 0, r^2 > 0$ 이므로

$$ar^2 = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a = -\frac{1}{2} \text{이고 } r^2 = 4$$

$$\text{따라서 } a_7 = ar^6 = -\frac{1}{2} \times (r^2)^3 = -\frac{1}{2} \times 4^3 = -32$$

답 ③

08

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

조건 (가)에서

$$b_3 + b_5 + b_7 = \log_2 ar^2 + \log_2 ar^4 + \log_2 ar^6 \\ = \log_2 a^3 r^{12} \\ = \log_2 (ar^4)^3 \\ = 3 \log_2 ar^4 = 15$$

이므로 $\log_2 ar^4 = 5$

$$ar^4 = 2^5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

조건 (나)에서

$$b_4 + b_6 + b_8 = \log_2 ar^3 + \log_2 ar^5 + \log_2 ar^7 \\ = \log_2 a^3 r^{15} \\ = \log_2 (ar^5)^3 \\ = 3 \log_2 ar^5 = 21$$

이므로 $\log_2 ar^5 = 7$

$$ar^5 = 2^7 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \div \textcircled{3} \text{에서 } r = 2^2 = 4 \text{이므로 } a = \frac{1}{8}$$

$$a_n = \frac{1}{8} \times 4^{n-1} = 2^{-3} \times 2^{2n-2} = 2^{2n-5}$$

$$\text{따라서 } b_{15} = \log_2 a_{15} = \log_2 2^{25} = 25$$

답 ③

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = ar^{n-1}$ 이라 하면

$$b_n = \log_2 ar^{n-1} = \log_2 a + (n-1) \log_2 r$$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 등차수열이다.

수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하고 조건 (나)의 식에서 조건 (가)의 식을 변

끼리 빼면 $3d = 6$ 에서 $d = 2$ 이고, 조건 (가)에서

$$b_3 + b_5 + b_7 = (b_1 + 4) + (b_1 + 8) + (b_1 + 12) = 15$$

$$3b_1 + 24 = 15$$

$$3b_1 = -9, b_1 = -3$$

$$\text{따라서 } b_{15} = -3 + 14 \times 2 = 25$$

09

첫째항이 $\frac{1}{64}$ 이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{64} \times 2^{n-1} \\ = 2^{-6} \times 2^{n-1} = 2^{n-7}$$

이다.

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n > 128 \text{에서}$$

$$2^{-6} \times 2^{-5} \times \cdots \times 2^{n-7} > 128$$

$$2^{-6} \times 2^{-5} \times \cdots \times 2^{n-7} = 2^{-6+(-5)+\cdots+(n-7)} \text{이고}$$

$$-6 + (-5) + \cdots + (n-7) = \frac{n\{-6+(n-7)\}}{2} \\ = \frac{n(n-13)}{2}$$

이므로

$$2^{\frac{n(n-13)}{2}} > 2^7$$

$$\frac{n(n-13)}{2} > 7, n^2 - 13n > 14$$

$$n^2 - 13n - 14 > 0, (n-14)(n+1) > 0$$

$$n+1 > 0 \text{ 이므로 } n > 14$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 15이다.

답 ⑤

10

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{3a_3}{a_2} = \frac{3ar^2}{ar} = 3r, \frac{a_6}{a_4} = \frac{ar^5}{ar^3} = r^2$$

$$\text{이므로 } \frac{3a_3}{a_2} + \frac{a_6}{a_4} = 10 \text{에서}$$

$$3r + r^2 = 10, r^2 + 3r - 10 = 0$$

$$(r+5)(r-2) = 0$$

모든 항이 양수이므로 $r=2$ 이다.

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = \frac{3 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 381$$

답 ②

11

함수 $f(x)$ 가 다항함수이므로 함수 $g(x) = (f \circ f)(x)$ 도 다항함수이다.

$$g(0) = (f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(\sqrt{2})$$

따라서

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^{10} + (\sqrt{2})^9 + \cdots + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^{10} - 1\}}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{31\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{2}$$

$$= 31\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}$$

$$= 62 + 32\sqrt{2}$$

답 ③

12

$$\text{조건 (가)에서 } a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1} = 85$$

$$\text{조건 (나)에서 } a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k} = 170 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k} &= a_1r + a_3r + a_5r + \cdots + a_{2k-1}r \\ &= r \times (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}) = 170 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 85r = 170$$

$$r = 2$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2k} = \frac{2^{2k} - 1}{2 - 1} = 85 + 170$$

$$2^{2k} - 1 = 255, 2^{2k} = 256 = 2^8$$

$$\text{이므로 } k = 4$$

$$\text{따라서 } r + k = 2 + 4 = 6$$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이므로 등비수열 $\{a_{2n-1}\}$ 의 공비는 r^2 이다.

$$\text{조건 (가)에서 } a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1} = 85$$

$$\text{이므로 } \frac{(r^2)^k - 1}{r^2 - 1} = 85 \quad \cdots \text{㉠}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이므로 등비수열 $\{a_{2n}\}$ 의 공비는 r^2 이고 $a_1 = 1$ 에서 $a_2 = r$ 이다.

$$\text{조건 (나)에서 } a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k} = 170$$

$$\text{이므로 } \frac{r\{(r^2)^k - 1\}}{r^2 - 1} = 170 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$85r = 170$$

$$r = 2$$

㉠에 $r = 2$ 를 대입하면

$$\frac{2^{2k} - 1}{2^2 - 1} = 85$$

$$2^{2k} - 1 = 255, 2^{2k} = 256 = 2^8$$

$$\text{이므로 } k = 4$$

$$\text{따라서 } r + k = 2 + 4 = 6$$

13

세 수 $16, 16^a, 32^b$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(16^a)^2 = 16 \times 32^b \text{에서}$$

$$2^{8a} = 2^4 \times 2^{5b} = 2^{4+5b}$$

$$8a = 4 + 5b \quad \cdots \text{㉠}$$

세 수 $\log 5, \log 2a, \log b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \log 2a = \log 5 + \log b \text{에서}$$

$$\log (2a)^2 = \log 5b$$

$$4a^2 = 5b \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$4a^2 - 8a + 4 = 0, 4(a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$4(a-1)^2 = 0$$

$$\text{따라서 } a = 1, b = \frac{4}{5} \text{ 이므로}$$

$$a + b = \frac{9}{5}$$

답 ②

14

세 수 $a, b, a-b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + (a-b) = 2a - b$$

$$3b = 2a, b = \frac{2}{3}a \quad \cdots \text{㉠}$$

세 수 $a^2, 12, (a-b)^2$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2(a-b)^2 = 12^2$$

$$\{a(a-b)\}^2 = 12^2$$

$$a(a-b) > 0 \text{ 이므로}$$

$$a(a-b) = 12 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉑을 ㉒에 대입하여 정리하면

$$a\left(a - \frac{2}{3}a\right) = 12$$

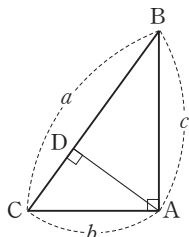
$$\frac{a^2}{3} = 12, a^2 = 36$$

a 는 자연수이므로 $a=6, b=4$

따라서 $a+b=10$

답 ②

15



그림과 같이 $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$ 라 하면

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \dots\dots ㉑$$

세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC는 닮은 도형이므로 각 변의 길이의 비에 의하여

$$\overline{BD} : c = c : a \text{에서 } \overline{BD} = \frac{c^2}{a}$$

$$\overline{CD} : b = b : a \text{에서 } \overline{CD} = \frac{b^2}{a}$$

$$\overline{AD} : b = c : a \text{에서 } \overline{AD} = \frac{bc}{a}$$

그런데 세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2 \times (\text{삼각형 ABD의 넓이})$

$= (\text{삼각형 ABC의 넓이}) + (\text{삼각형 ADC의 넓이})$

$$\text{즉, } 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{c^2}{a} \times \frac{bc}{a}\right) = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2} \times \frac{b^2}{a} \times \frac{bc}{a}$$

$$\frac{2bc^3}{a^2} = bc + \frac{b^3c}{a^2}$$

$$a^2 > 0 \text{이므로 } 2bc^3 = a^2bc + b^3c$$

$$b > 0, c > 0 \text{이므로 } 2c^2 = a^2 + b^2 \quad \dots\dots ㉒$$

$$㉑ \text{과 } ㉒ \text{에서 } 2c^2 = a^2 + (a^2 - c^2)$$

$$3c^2 = 2a^2, c^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$c > 0 \text{이므로 } c = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\text{따라서 } \sin C = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 ⑤

다른 풀이

세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 하면 S_1, S_2, S_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2S_2 = S_1 + S_3 \quad \dots\dots ㉑$$

그런데

(삼각형 ABC의 넓이)

$= (\text{삼각형 ABD의 넓이}) + (\text{삼각형 ADC의 넓이})$

$$\text{이므로 } S_1 = S_2 + S_3 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑과 ㉒에서 $S_2 = 2S_3$ 이므로

$$S_2 : S_3 = 2 : 1$$

삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 비는 $\overline{BD}$ 와 $\overline{CD}$ 의 길이의 비와 같으므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 1$$

$\overline{BD} = 2k, \overline{CD} = k (k > 0)$ 이라 하면

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 2k + k = 3k$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC} = 2k \times 3k = 6k^2 \text{이므로 } \overline{AB} = \sqrt{6}k (\overline{AB} > 0)$$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$$\sin C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{6}k}{3k} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

16

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$ 이라 하면

$\log_2 S_n = n + 2$ 에서

$$S_n = 2^{n+2} \text{이므로}$$

$$a_6 = S_6 - S_5$$

$$= 2^8 - 2^7$$

$$= 2^7 \times (2 - 1) = 128$$

답 ②

17

$$a_1 + a_4 = S_1 + (S_4 - S_3)$$

$$= 2 + k + \{(32 + k) - (18 + k)\}$$

$$= 2 + k + 14$$

$$= 16 + k$$

$$a_1 + a_4 = 14 \text{에서}$$

$$16 + k = 14$$

$$\text{따라서 } k = -2$$

답 ②

다른 풀이

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$n=1 \text{일 때, } a_1 = S_1 = 2 + k$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 + k - \{2(n-1)^2 + k\}$$

$$= 4n - 2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \begin{cases} 2+k & (n=1) \\ 4n-2 & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$a_1 + a_4 = 14 \text{에서}$$

$$(2+k) + 14 = 14$$

$$\text{따라서 } k = -2$$

18

$b_n = na_n$ 에서

$$n=1\text{일 때, } b_1 = 1 \times a_1 = S_1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

이므로 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} na_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n(n+1)}{3} \{ (n+2) - (n-1) \} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

$$a_n = n+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠과 ㉡에서 $a_n = n+1$ ($n \geq 1$)

따라서 $a_1 + a_{2021} = 2 + 2022 = 2024$

답 ④

19

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합이 40이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = 40 \text{이고,}$$

수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합이 60이므로

$$\sum_{k=1}^{20} b_k = 60 \text{이다.}$$

수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{20} c_k = \sum_{k=1}^{20} (3a_k + b_k + 8) \text{이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (3a_k + b_k + 8) &= \sum_{k=1}^{20} 3a_k + \sum_{k=1}^{20} b_k + \sum_{k=1}^{20} 8 \\ &= 3 \sum_{k=1}^{20} a_k + 60 + 8 \times 20 \\ &= 3 \times 40 + 60 + 160 = 340 \end{aligned}$$

답 340

20

$$\sum_{k=1}^{15} k(a_k - a_{k+1})$$

$$= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots + 15(a_{15} - a_{16})$$

$$= a_1 + (-a_2 + 2a_2) + (-2a_3 + 3a_3)$$

$$+ \dots + (-14a_{15} + 15a_{15}) - 15a_{16}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}) - 15a_{16}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} a_k - 15 \times \frac{1}{3}$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^{15} a_k - 5 = 100$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{15} a_k = 105$$

답 ③

21

두 자연수 m 과 n ($m < n$) 사이에 있는 유리수 중에서 분모가 8인 기약분수를 나열하면

$$m + \frac{1}{8}, m + \frac{3}{8}, m + \frac{5}{8}, m + \frac{7}{8},$$

$$(m+1) + \frac{1}{8}, (m+1) + \frac{3}{8}, (m+1) + \frac{5}{8}, (m+1) + \frac{7}{8}$$

⋮

$$(n-1) + \frac{1}{8}, (n-1) + \frac{3}{8}, (n-1) + \frac{5}{8}, (n-1) + \frac{7}{8}$$

따라서 m 과 n 사이에 있는 유리수 중에서 분모가 8인 기약분수의 합은

$$\sum_{k=m}^{n-1} \left(k + \frac{1}{8} \right) + \sum_{k=m}^{n-1} \left(k + \frac{3}{8} \right) + \sum_{k=m}^{n-1} \left(k + \frac{5}{8} \right) + \sum_{k=m}^{n-1} \left(k + \frac{7}{8} \right)$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} (4k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (4k+2) - \sum_{k=1}^{m-1} (4k+2)$$

$$= 4 \times \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) - 4 \times \frac{(m-1)m}{2} - 2(m-1)$$

$$= 2n^2 - 2n + 2n - 2 - 2m^2 + 2m - 2m + 2$$

$$= 2n^2 - 2m^2$$

$$= -2m^2 + 2n^2$$

따라서 $a = -2$, $b = 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$$

답 ②

22

$$\sum_{k=1}^{22} |10-k| + \sum_{k=1}^{22} (k-10)$$

$$= \sum_{k=1}^{22} \{ |10-k| + (k-10) \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (10-k+k-10) + \sum_{k=11}^{22} \{ (-10+k) + (k-10) \}$$

$$= 0 + \sum_{k=11}^{22} (2k-20)$$

$$= \sum_{k=1}^{22} (2k-20) - \sum_{k=1}^{10} (2k-20)$$

$$= \left(2 \times \frac{22 \times 23}{2} - 20 \times 22 \right) - \left(2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 20 \times 10 \right)$$

$$= (506 - 440) - (110 - 200)$$

$$= 66 + 90 = 156$$

답 ④

다른 풀이

$$\sum_{k=1}^{22} |10-k| + \sum_{k=1}^{22} (k-10)$$

$$= \sum_{k=1}^{22} \{ |10-k| + (k-10) \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (10-k+k-10) + \sum_{k=11}^{22} \{ (-10+k) + (k-10) \}$$

$$= 0 + \sum_{k=11}^{22} (2k-20)$$

$$= \sum_{k=11}^{22} 2(k-10)$$

$$= \sum_{k=1}^{12} 2k$$

$$= 2 \times \frac{12 \times 13}{2} = 156$$

참고

$\sum_{k=11}^{22} 2(k-10)$ 에서 $k-10=i$ 라 하면

$k=11$ 일 때 $i=1$ 이고, $k=22$ 일 때 $i=12$ 이므로

$$\sum_{k=11}^{22} 2(k-10) = \sum_{i=1}^{12} 2i = \sum_{k=1}^{12} 2k$$

23

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = (-1)^{n+1}n^2$ 이므로

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 \\ &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + \{(2n-1)^2 - (2n)^2\} \\ &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \cdots \\ &\quad + \{(2n-1)-2n\}\{(2n-1)+2n\} \\ &= -\{1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n\} \\ &= -\frac{2n(2n+1)}{2} \\ &= -2n^2 - n \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 S_{2k} &= \sum_{k=1}^6 (-2k^2 - k) \\ &= -2 \sum_{k=1}^6 k^2 - \sum_{k=1}^6 k \\ &= -2 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - \frac{6 \times 7}{2} \\ &= -182 - 21 = -203 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 \\ &= \{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2\} - \{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 - \sum_{k=1}^n (2k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1 - 4k^2) \\ &= \sum_{k=1}^n (-4k + 1) \\ &= -4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= -2n^2 - n \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 S_{2k} &= \sum_{k=1}^6 (-2k^2 - k) \\ &= -2 \sum_{k=1}^6 k^2 - \sum_{k=1}^6 k \\ &= -2 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - \frac{6 \times 7}{2} \\ &= -182 - 21 = -203 \end{aligned}$$

24

$f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 4$ 라 하면

$f(1) = 0$ 이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 4)$$

따라서 α, β 는 이차방정식 $x^2 + 2x - 4 = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -4$$

$$\begin{aligned} &(\alpha-1)(\beta-1) + (\alpha-2)(\beta-2) + (\alpha-3)(\beta-3) \\ &\quad + \cdots + (\alpha-10)(\beta-10) \\ &= \alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1^2 + \alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 2^2 \\ &\quad + \cdots + \alpha\beta - 10(\alpha+\beta) + 10^2 \\ &= 10\alpha\beta - (\alpha+\beta)(1+2+\cdots+10) + 1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 \\ &= 10 \times (-4) - (-2) \times \frac{10 \times 11}{2} + \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \\ &= -40 + 110 + 385 = 455 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 4$ 라 하면

$f(1) = 0$ 이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 4)$$

따라서 α, β 는 이차방정식 $x^2 + 2x - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$$x^2 + 2x - 4 = (x-\alpha)(x-\beta) = (\alpha-x)(\beta-x)$$

따라서

$$\begin{aligned} &(\alpha-1)(\beta-1) + (\alpha-2)(\beta-2) + (\alpha-3)(\beta-3) \\ &\quad + \cdots + (\alpha-10)(\beta-10) \\ &= \sum_{x=1}^{10} (\alpha-x)(\beta-x) \\ &= \sum_{x=1}^{10} (x^2 + 2x - 4) \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 40 \\ &= 385 + 110 - 40 = 455 \end{aligned}$$

25

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로

$$\frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$$

$a_1 = S_1 = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \\ &= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_{11}} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

따라서 $S_{11} = 30$

답 ①

26

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$a_{2n+1} - a_{2n} = a_{2n} - a_{2n-1} = 2 \text{이다.}$$

$$\text{한편, } \frac{1}{a_{2k-1} a_{2k+1}} = \frac{1}{a_{2k+1} - a_{2k-1}} \left(\frac{1}{a_{2k-1}} - \frac{1}{a_{2k+1}} \right) \text{이고}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+1} - a_{2k-1} &= (a_{2k+1} - a_{2k}) + (a_{2k} - a_{2k-1}) \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^8 \frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_{2k-1}} - \frac{1}{a_{2k+1}} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{15}} - \frac{1}{a_{17}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{17}} \right) \\
&= \frac{1}{18} \\
&\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{17}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \\
&a_{17} = a_1 + 16 \times 2 = a_1 + 32 \\
&\text{이므로 } \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 32} = \frac{2}{9} \\
&\frac{32}{a_1(a_1 + 32)} = \frac{2}{9}, \quad a_1(a_1 + 32) = 144 \\
&a_1^2 + 32a_1 - 144 = 0, \quad (a_1 + 36)(a_1 - 4) = 0 \\
&\text{모든 항이 양수이므로 } a_1 = 4 \\
&\text{따라서 등차수열 } \{a_n\} \text{의 일반항 } a_n \text{은} \\
&a_n = 4 + (n-1) \times 2 = 2n + 2 \\
&\text{이므로 } a_{20} = 42
\end{aligned}$$

27

점 A(0, -1)에서 함수 $y = \frac{1}{n}x^2$ 의 그래프에 그은 접선의 기울기를

m ($m > 0$)이라 하면 접선의 방정식은 $y = mx - 1$ 이다.

$y = \frac{1}{n}x^2$, $y = mx - 1$ 을 연립하면

$$\frac{1}{n}x^2 = mx - 1$$

$$\frac{1}{n}x^2 - mx + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = m^2 - \frac{4}{n} = 0, \quad m^2 = \frac{4}{n}$$

$$m > 0 \text{이므로 } m = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

따라서 접선의 방정식은 $y = \frac{2}{\sqrt{n}}x - 1$ 이고

접점의 x 좌표 x_n 은 ①에서

$$\frac{1}{n}x_n^2 - \frac{2}{\sqrt{n}}x_n + 1 = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n - 1 \right)^2 = 0 \text{이므로 } x_n = \sqrt{n}$$

이때 $y_n = 1$ 이므로 접점은 P($\sqrt{n}$, 1)이다.

따라서

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{15} \frac{y_n}{x_n + x_{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{15} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
&= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \\
&= -1 + \sqrt{16} = -1 + 4 = 3
\end{aligned}$$

참고

미분을 이용하여 다음과 같이 점 P의 좌표를 구할 수도 있다.

곡선 $y = \frac{1}{n}x^2$ 위의 점 (x_n, y_n) 에서의 접선의 방정식을 구하면

$y - y_n = \frac{2}{n}x_n(x - x_n)$ 이고 이 접선이 점 (0, -1)을 지나므로

$$-1 - \frac{1}{n}x_n^2 = \frac{2}{n}x_n(0 - x_n)$$

$$-1 - \frac{1}{n}x_n^2 = -\frac{2}{n}x_n^2$$

$$\frac{1}{n}x_n^2 = 1$$

$$x_n^2 = n$$

$$x_n > 0 \text{이므로 } x_n = \sqrt{n} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①을 이차함수식에 대입하면

$$y_n = \frac{1}{n} \times n = 1 \text{이므로 접점 P의 좌표는 } (\sqrt{n}, 1) \text{이다.}$$

28

수열 $\{a_n\}$ 을 나열하면

$$a_1 = 6, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = -3, a_5 = 6, a_6 = 3, \cdots$$

이므로 $a_n = a_{n+4}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)임을 알 수 있다.

이때 $50 = 4 \times 12 + 2$ 이고, $\sum_{k=1}^4 a_k = 6$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{50} a_k &= 12 \sum_{k=1}^4 a_k + (a_{49} + a_{50}) \\
&= 12 \times 6 + (6 + 3) \\
&= 72 + 9 = 81
\end{aligned}$$

답 ②

29

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$ 에서

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

$b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n + 2$ 에서

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$$

$$\frac{a_n}{2^{b_n}} = \frac{2^n}{2^{2n}} = 2^{n-2n} = 2^{-n} \text{이므로}$$

$$\frac{a_n}{2^{b_n}} > \frac{1}{1024} \text{에서}$$

$$2^{-n} > \frac{1}{1024} = 2^{-10}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$-n > -10$$

$$n < 10$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 9이다.

답 ④

답 ②

답 ①

30

$a_{2n+2} - a_{2n} = p$ 에서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 a_2 이고 공차가 p 인 등차수열이므로

$$a_{2n} = a_2 + (n-1)p$$

$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = p$ 에서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a_1 이고 공비가 p 인 등비수열이므로

$$a_{2n-1} = a_1 p^{n-1}, a_7 = a_1 p^3 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로 a_1, p 도 자연수이다.

따라서 $p=1$ 또는 $p=2$ 이다.

(i) $p=1$ 일 때

$$a_8 = a_2 + 3 = 8 \text{에서 } a_2 = 5$$

(ii) $p=2$ 일 때

$$a_8 = a_2 + 6 = 8 \text{에서 } a_2 = 2$$

(i), (ii)와 $a_2 \neq 5$ 에 의하여 $a_2 = 2, p=2$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $a_1 = 1$ 이다.

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1 = 1$ 이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_3 = 2, a_5 = 4$$

수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a_2 = 2$ 이고 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_4 = 4, a_6 = 6$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 6 = 19 \end{aligned}$$

답 ③

참고

수열 $\{a_n\}$ 을 나열하면 다음과 같다.

1, 2, 2, 4, 4, 6, 8, 8, 16, 10, ...

31

수열 $\{a_n\}$ 에서 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_1 = f(1) + f(2) = 1^2 - 2^2 = (1-2)(1+2) = -(1+2)$$

$$a_2 = f(2) + f(3) = -2^2 + 3^2 = (3-2)(3+2) = 2+3$$

$$a_3 = f(3) + f(4) = 3^2 - 4^2 = (3-4)(3+4) = -(3+4)$$

$$a_4 = f(4) + f(5) = -4^2 + 5^2 = (5-4)(5+4) = 4+5$$

⋮

$$a_{49} = f(49) + f(50) = 49^2 - 50^2 = (49-50)(49+50) = -(49+50)$$

$$a_{50} = f(50) + f(51) = -50^2 + 51^2 = (51-50)(51+50) = 50+51$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{50} \\ &= -(1+2) + (2+3) - (3+4) + \cdots + (50+51) \\ &= -1 + 51 = 50 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$$a_n = f(n) + f(n+1) \text{에서}$$

$$a_{2k-1} + a_{2k} = f(2k-1) + f(2k) + f(2k) + f(2k+1)$$

$$= f(2k-1) + 2f(2k) + f(2k+1)$$

$$= (2k-1)^2 - 2(2k)^2 + (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 - 4k + 1 - 8k^2 + 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{49} + a_{50}) \\ &= 2 + 2 + \cdots + 2 \\ &= 2 \times 25 = 50 \end{aligned}$$

32

$a_1 = \alpha, a_2 = \beta$ 로 놓고 관계식 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$ 을 나열하면 다음과 같다.

$$\alpha, \beta, \beta - \alpha, -\alpha, -\beta, \alpha - \beta, \alpha, \beta, \cdots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은

$$\alpha, \beta, \beta - \alpha, -\alpha, -\beta, \alpha - \beta$$

가 반복되므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = a_{n+6}$ 이 성립한다.

한편, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$ 이고

$$40 = 6 \times 6 + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_{40} &= \sum_{k=1}^{36} a_k + a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= \alpha + \beta + (\beta - \alpha) + (-\alpha) \\ &= -\alpha + 2\beta = 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$65 = 6 \times 10 + 5 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_{65} &= \sum_{k=1}^{60} a_k + a_{61} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + a_{65} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= \alpha + \beta + (\beta - \alpha) + (-\alpha) + (-\beta) \\ &= -\alpha + \beta = 19 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$\alpha = -13, \beta = 6$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 = \alpha + \beta = -7$$

답 ②

다른 풀이

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{에서}$$

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1}$$

$$= (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} = -a_n$$

$$a_{n+6} = -a_{n+3} = -(-a_n) = a_n$$

따라서 $a_{n+3} = -a_n, a_{n+6} = a_n$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= a_1 + a_2 + a_3 + (-a_1) + (-a_2) + (-a_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$40 = 6 \times 6 + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_{40} &= \sum_{k=1}^{36} a_k + (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + (-a_1) \\ &= a_2 + a_3 = 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$65 = 6 \times 10 + 5 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_{65} &= \sum_{k=1}^{60} a_k + (a_{61} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + a_{65}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + (-a_1) + (-a_2) \\ &= a_3 = 19 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에서 $a_2 = 6$ 이고, $a_3 = a_2 - a_1$ 이므로

$$19 = 6 - a_1, a_1 = -13$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 = -13 + 6 = -7$$

33

점 A₁의 좌표가 (12, 6)이므로 $a_1 = 12 + 6 = 18$

점 A₁의 y좌표와 점 B₁의 y좌표가 같으므로 점 B₁의 좌표를 $(\alpha_1, 6)$ 이라 하자.

점 B₁은 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 위에 있으므로 $6 = \frac{1}{\alpha_1}$ 에서 $\alpha_1 = \frac{1}{6}$

따라서 점 B₁의 좌표는 $(\frac{1}{6}, 6)$ 이다.

점 B₁의 x좌표와 점 A₂의 x좌표가 같으므로 점 A₂의 좌표를 $(\frac{1}{6}, \beta_2)$

라 하자.

점 A₂는 직선 $y = \frac{x}{2}$ 위에 있으므로 $\beta_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

따라서 점 A₂의 좌표는 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 이므로

$$a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

점 A₂의 y좌표와 점 B₂의 y좌표가 같으므로 점 B₂의 좌표를 $(\alpha_2, \frac{1}{12})$

이라 하자.

점 B₂는 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 위에 있으므로 $\frac{1}{12} = \frac{1}{\alpha_2}$ 에서 $\alpha_2 = 12$

따라서 점 B₂의 좌표는 $(12, \frac{1}{12})$ 이다.

점 B₂의 x좌표와 점 A₃의 x좌표가 같으므로 점 A₃의 좌표를 $(12, \beta_3)$ 이라 하자.

점 A₃은 직선 $y = \frac{x}{2}$ 위에 있으므로 $\beta_3 = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

따라서 점 A₃의 좌표는 (12, 6)이므로

$$a_3 = 12 + 6 = 18$$

점 A₃의 좌표가 점 A₁의 좌표와 같으므로 이후 계속 반복된다.

$$\text{즉, } a_n = \begin{cases} 18 & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{4} & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } a_7 + a_8 = 18 + \frac{1}{4} = \frac{73}{4}$$

$$p = 4, q = 73 \text{이므로}$$

$$p + q = 77$$

다른 풀이

점 A_n의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하면

점 A_n은 직선 $y = \frac{x}{2}$ 위의 점이므로

$$y_n = \frac{x_n}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 B_n의 y좌표가 점 A_n의 y좌표와 같으므로 B_n(α, y_n)이라 하면

점 B_n은 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 위의 점이므로 $y_n = \frac{1}{\alpha}$ 이고 $\alpha = \frac{1}{y_n}$ 이다.

따라서 B_n($\frac{1}{y_n}, y_n$)

또한 점 A_{n+1}의 x좌표가 점 B_n의 x좌표와 같으므로

A_{n+1}($\frac{1}{y_n}, \beta$)라 하면 점 A_{n+1}은 직선 $y = \frac{x}{2}$ 위의 점이므로

$$\beta = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{2y_n}$$

점 A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})이므로

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{2y_n} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $x_{n+1} = \frac{2}{x_n}$ 이고 $y_{n+1} = \frac{1}{2y_n}$ 이다.

$$a_1 = x_1 + y_1 = 12 + 6 = 18$$

$$a_2 = x_2 + y_2 = \frac{2}{x_1} + \frac{1}{2y_1} = \frac{2}{12} + \frac{1}{2 \times 6} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = x_3 + y_3 = \frac{2}{x_2} + \frac{1}{2y_2} = \frac{2}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2 \times \frac{1}{12}} = 12 + 6 = 18$$

이므로 수열 {a_n}의 홀수 번째 항은 18이고 짝수 번째 항은 $\frac{1}{4}$ 이다.

$$\text{따라서 } a_7 + a_8 = 18 + \frac{1}{4} = \frac{73}{4}$$

$$p = 4, q = 73 \text{이므로 } p + q = 77$$

34

(i) n=2일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$$

$$(\text{우변}) = \frac{2 \times (2 \times 2^2 + 1)}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) n=m (m≥2)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2 + (m-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

$$= \frac{m(2m^2+1)}{3}$$

이다.

위 등식의 양변에 $\boxed{(m+1)^2 + m^2}$ 을 더하여 정리하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2 + \boxed{(m+1)^2 + m^2} + (m-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

$$= \frac{m(2m^2+1)}{3} + \boxed{(m+1)^2 + m^2}$$

$$= \frac{m(2m^2+1) + 3m^2}{3} + (m+1)^2$$

$$= \frac{m(2m+1)(m+1)}{3} + \boxed{(m+1)^2}$$

$$= \frac{m(2m+1)(m+1) + 3(m+1)^2}{3}$$

$$= \frac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$$

$$= \frac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$

이다.

따라서 n=m+1일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(m) = (m+1)^2 + m^2$, $g(m) = (m+1)^2$ 이므로

$$f(3) = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25, g(4) = 5^2 = 25$$

$$f(3) + g(4) = 25 + 25 = 50$$

04

함수의 극한과 연속

정답

본문 46~57쪽

01 ②	02 ③	03 ③	04 ③	05 ①
06 ①	07 ②	08 40	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 10	14 7	15 ⑤
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 18	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 ④	25 ④
26 ⑤	27 13	28 ①	29 ①	30 ③
31 ③	32 ②	33 ②	34 ④	35 ②
36 16	37 ③	38 ⑤		

01

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2$$

또한 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{이고 } f(2) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + kf(2)$ 에서

$$0 + 2 = 1 + 2k$$

$$\text{이므로 } k = \frac{1}{2}$$

답 ②

02

극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a}{x+7} = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+2) \text{에서}$$

$$\frac{a}{1+7} = 3, a = 24$$

한편, $\lim_{x \rightarrow b+} f(x) = \infty$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 직선

$$x = -7 \text{이므로}$$

$$b = -7$$

$$\text{따라서 } a+b = 24 + (-7) = 17$$

답 ③

03

$$f(x) = \frac{|x-3||x-2|(x+a)}{(x-3)(x-2)} \text{에서}$$

 $x > 3$ 일 때,

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)(x+a)}{(x-3)(x-2)} = x+a$$

 $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)(x+a)}{(x-3)(x-2)} = x+a$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+} (x+a) + \lim_{x \rightarrow 1-} (x+a) \\ &= (3+a) + (1+a) \\ &= 2a+4=10 \end{aligned}$$

따라서 $a=3$

답 ③

04

집합 A 에서

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) - 1, \text{ 즉}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -1$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$a=2 \text{일 때, } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1$$

$$a=0 \text{일 때, } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$$

$$a=-1 \text{일 때, } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1$$

$$A = \{-1, 0, 2\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

집합 B 에서

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) > \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \text{ 즉}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a-} f(x) > 0$$

$$a=1 \text{일 때, } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) > 0$$

$$B = \{1\} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$$

집합 C 에서

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) < \lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2, \text{ 즉}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2 - \lim_{x \rightarrow a+} f(x) > 0$$

 a 가 정수일 때, $a=2, 0, -1, 1$ 의 좌극한값과 우극한값에서

$$\lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2 - \lim_{x \rightarrow a+} f(x) > 0 \text{이다.}$$

 a 가 정수가 아닐 때,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = p \text{라 하면}$$

$$p^2 - p > 0, p(p-1) > 0 \text{에서}$$

$$p < 0 \text{ 또는 } p > 1$$

$$\text{그러므로 } \frac{1}{2} < a < 1, 1 < a < 2$$

$$C = \{-1, 0, 1, 2\} \cup \left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\} \cup \{x \mid 1 < x < 2\}$$

따라서

$$C - (A \cup B) = \left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\} \cup \{x \mid 1 < x < 2\}$$

답 ③

05

함수 $f(x)=ax$ ($a-1 \leq x < a$)에서 a 는 정수이므로

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ -2x & (-3 \leq x < -2) \\ -x & (-2 \leq x < -1) \\ 0 & (-1 \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 2x & (1 \leq x < 2) \\ 3x & (2 \leq x < 3) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (p+2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (p+2)^-} \{(p+2)x\} = (p+2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} \{(p+1)x\} = p(p+1)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow (p+2)^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 157$ 에서

$$(p+2)^2 - p(p+1) = 157$$

$$3p+4 = 157$$

이므로 $p=51$

답 ①

06

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - (x+2)g(x)}{f(x)g(x) + 2g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\{f(x)\}^2}{x} - (x+2)\frac{g(x)}{x}}{f(x) \times \frac{g(x)}{x} + 2 \times \frac{g(x)}{x}} \\ &= \frac{16-3k}{4k+2k} \\ &= \frac{16-3k}{6k} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

에서 $3(16-3k)=6k$

$$15k=48$$

따라서 $k=\frac{16}{5}$

답 ①

07

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축 위의 한 점 $(a, 0)$ ($a \neq 2$ 인 상수)에서만 만나고 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=0$ 이므로

$$f(x)=(x-a)(x-2), g(x)=(x-a)(x-b) \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 가 모두 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 2g(x)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x-a)(x-2) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} (x-a)(x-b)$$

$$= a-1+2(1-a)(1-b)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-a)(x-2)}{(x-a)(x-b)} = \frac{1-2}{1-b} = \frac{1}{b-1} = \frac{1}{3}$$

에서 $b=4$

①에 $b=4$ 를 대입하면 $a-1-6(1-a)=0$ 이므로

$$7a=7, a=1$$

그러므로 $f(x)=(x-1)(x-2)$, $g(x)=(x-1)(x-4)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2(x-2)(x-4)=8$$

답 ②

08

$g(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b 는 상수)라 하자.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x+1)g(x)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x+1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x+1)g(x), \text{ 즉}$$

$$-1 \times g(1) = 1 \times g(1) \text{에서}$$

$$2g(1)=0, g(1)=0$$

$$1+a+b=0, a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x+1)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)g(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)g(x+1), \text{ 즉}$$

$$-1 \times g(3) = 1 \times g(3) \text{에서}$$

$$2g(3)=0, g(3)=0$$

$$27+9a+3b=0, 3a+b=-9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $a=-4, b=3$

따라서 $g(x)=x^3-4x^2+3x$ 이므로

$$g(5)=5^3-4 \times 5^2+3 \times 5=40$$

답 40

09

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+4)+x^4-16}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+4)+(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+4)\{1+(x+2)\}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(x^2+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+3)(x^2+4) \\ &= 40 \end{aligned}$$

답 ⑤

10

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3+x} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{2}{x^3+x^2+x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{x^3+x^2+x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x+1-(x^2+1)}{x(x^2+1)(x+1)} + \frac{2}{x^3+x^2+x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x(1-x)}{x(x^2+1)(x+1)} + \frac{2}{x^3+x^2+x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-x}{(x^2+1)(x+1)} + \frac{2}{x^3+x^2+x+1} \right\} \\ &= 1+2=3 \end{aligned}$$

답 ③

11

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점근선이 직선 $x=-a$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{1}{x+a} = \infty \text{이므로 } a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)g(x) = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+b}-1}{x-2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5+b}-1}{3} = \frac{1}{3}, \sqrt{5+b}=2, 5+b=4$$

$$b = -1$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

12

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-x^3-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-(x^3+x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-(x^3+x)\} \{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+(x^3+x)\}}{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+x^3+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-x^2}{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+x^3+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}+1+\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

답 ④

13

부등식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{5}{x^2(x^2+10)} \leq f(x) \leq \frac{5}{x^2(x^2+1)}$$

각 변에 $2x^4+5$ 를 곱하면

$$\frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+10)} \leq (2x^4+5)f(x) \leq \frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+1)}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+10)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10+\frac{25}{x^4}}{1+\frac{10}{x^2}} = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10+\frac{25}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}} = 10$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4+5)f(x) = 10$$

답 10

14

$$f(x) = \sum_{k=1}^{200} x^k = x+x^2+x^3+\cdots+x^{200} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3n^2}(x^{4n}+x^{3n})}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3n^2+4n}+x^{3n^2+3n}}{x+x^2+x^3+\cdots+x^{200}} \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+x^2+x^3+\cdots+x^{200}) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{3n^2+4n}+x^{3n^2+3n}) = \infty \text{이므로 } \textcircled{7} \text{이 수렴하기 위해서는 분자의 최고}$$

차항의 차수가 분모의 최고차항의 차수보다 작거나 같아야 한다.

$$\text{즉, } 3n^2+4n \leq 200, n(3n+4) \leq 200 \text{에서}$$

$$n(3n+4) \text{는 } n=7 \text{일 때 } 175, n=8 \text{일 때 } 224 \text{이므로}$$

부등식을 만족시키는 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 7이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n 의 개수는 7이다.

답 7

15

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+ax^2-3x}{(x-3)(x+b)} = 12 \text{이고, } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (x^3+ax^2-3x) = 18+9a=0 \text{에서 } a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-2x^2-3x}{(x-3)(x+b)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+b)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+b)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+1)}{x+b} = 12 \text{에서 } \frac{12}{3+b} = 12, b = -2$$

$$\text{따라서 } a+b = -2+(-2) = -4$$

답 ⑤

16

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+2ax+a+b} = -\frac{1}{2} \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분자)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2ax+a+b) = 0 \text{에서}$$

$$b = -4-5a \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑦을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+2ax+a+b} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+2ax-4-4a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x^2-4)+2a(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2+2a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2+2a} \\ &= \frac{1}{4+2a} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4+2a = -2 \text{에서 } a = -3$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } b = 11 \text{이므로}$$

$$a+b = 8$$

답 ⑤

17

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+b}-2} = 16 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때, (분자)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+b}-2) = 0 \text{에서}$$

$$\sqrt{1+b}-2=0, \sqrt{1+b}=2, 1+b=4, b=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \{(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)\}$$

$$= 8\sqrt{1+a}=16$$

$$\sqrt{1+a}=2, 1+a=4, a=3$$

$$\text{따라서 } a+b=3+3=6$$

답 ④

18

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)f(x)}{x+2} = 0 \text{이고, } x \rightarrow -2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+1)f(x) = -f(-2) = 0 \text{에서}$$

$$f(-2) = 0$$

$$f(x) = (x+2)(x+a) \text{ (} a \text{는 상수)} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)(x+a)}{x+2} = 0 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+1)(x+a) = 0$$

$$-(-2+a) = 0, a=2 \text{이므로}$$

$$\text{㉠에서 } f(x) = (x+2)^2$$

$$\text{따라서 } f(3) = 5^2 = 25$$

답 ④

19

$$g(x) = x^2 + ax + b \text{ (} a, b \text{는 상수)} \text{라 하자.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x+1)} \text{의 값이 존재하여야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x+1)} \text{에서 } x \rightarrow 0^+ \text{일 때, (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\text{(분자)} \rightarrow 0 \text{이어야 한다. 즉, } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0$$

$$\text{그러므로 } b=0 \text{이고 } g(x) = x^2 + ax \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{한편, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x+1)}{f(x)} \text{의 값이 존재하여야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x+1)}{f(x)} \text{에서 } x \rightarrow 2^+ \text{일 때, (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\text{(분자)} \rightarrow 0 \text{이어야 한다. 즉, } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x+1) = g(3) = 0$$

$$\text{㉠에서 } 3^2 + 3a = 0, a = -3$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2 - 3x \text{이므로}$$

$$g(6) = 6^2 - 18 = 18$$

답 18

20

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4} = 0 \text{이므로}$$

$f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 $n \leq 3$ 이고 방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 함수 $f(x)$ 는 삼차함수이다.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ (} a \text{는 소수)} \text{라 하자.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 8 \text{이고, } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이어야 한다. 즉,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\text{그러므로 } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \text{ (} a \text{는 소수)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c)$$

$$= c = 8$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 8x = x(ax^2 + bx + 8)$$

a 가 소수이고 방정식 $f(x) = 0$ 의 근이 음이 아닌 서로 다른 세 정수이므로 양의 정수 p, q 에 대하여

$$f(x) = x(x-p)(x-q) \text{ (단, } pq=8)$$

a 가 소수이고 $\frac{q}{a}$ 가 음이 아닌 정수이기 위해서는 $q \neq 1$ 이어야 하므로 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) $p=1, q=8$ 일 때

$$x(x-1)(x-8)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=\frac{8}{a}$$

$$\text{이므로 } a=2$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=4$$

(ii) $p=2, q=4$ 일 때

$$x(x-2)(x-4)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=\frac{4}{a}$$

$$\text{이므로 } a=2$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

이때 방정식 $f(x) = 0$ 의 근은 서로 다른 두 개이므로 적합하지 않다.

(iii) $p=4, q=2$ 일 때

$$x(x-4)(x-2)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=4 \text{ 또는 } x=\frac{2}{a}$$

$$\text{이므로 } a=2$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 (i), (ii), (iii)에서

$$a=2, f(x) = 2x(x-1)(x-4)$$

이므로

$$a+f(5) = 2+40 = 42$$

답 ④

21

점 P의 좌표가 $P(t, 2t^2+3)$ 이고

$Q(t, \frac{1}{3}t^2)$, $H(t, 0)$ 이므로

$$\overline{PQ} = 2t^2 + 3 - \frac{1}{3}t^2 = \frac{5}{3}t^2 + 3$$

$$\overline{QH} = \frac{1}{3}t^2$$

따라서 $A(t) = \left(\frac{5}{3}t^2 + 3\right)\pi$, $B(t) = \frac{1}{3}t^2\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{B(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{3}t^2 + 3\right)\pi}{\frac{1}{3}t^2\pi} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5t^2 + 9}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{9}{t^2}\right) = 5\end{aligned}$$

④

22

점 P의 좌표는 $P(t, 2t+1)$ 이고

$t > 4$ 에서 $2t+1 > 9$

$\overline{QH_1} = t-4$ 이므로 삼각형 PQH_1 의 넓이는

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{1}{2} \times (t-4) \times (2t+1) \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)(t-4)\end{aligned}$$

$\overline{RH_2} = 2t+1-5 = 2(t-2)$ 이므로 삼각형 PH_2R 의 넓이는

$$B(t) = \frac{1}{2} \times 2(t-2) \times t = t(t-2)$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 4+} \frac{tA(t)}{(t-4)B(t)} &= \lim_{t \rightarrow 4+} \frac{t\left(t + \frac{1}{2}\right)(t-4)}{(t-4)t(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4+} \frac{t + \frac{1}{2}}{t-2} = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{B(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)(t-4)}{t(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - \frac{7}{2}t - 2}{t^2 - 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{7}{2t} - \frac{2}{t^2}}{1 - \frac{2}{t}} = 1\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow 4+} \frac{tA(t)}{(t-4)B(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{B(t)} = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

⑤

23

$x = \sqrt{2x}$ 에서

$x^2 = 2x$, $x(x-2) = 0$ 이므로 $x = 2$

$A(2, 2)$, $B(2, 0)$ 이므로

$Q(t, \sqrt{2t})$, $R(t, 0)$ 이므로

$$\overline{PB} = \sqrt{(t-2)^2 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\overline{QB} = \sqrt{(t-2)^2 + 2t} = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$$

$$\overline{BR} = t - 2$$

$$\overline{OR} = t$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 2+} \frac{\overline{PB} - \overline{QB}}{\overline{BR} \times \overline{OR}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{\sqrt{2t^2 - 4t + 4} - \sqrt{t^2 - 2t + 4}}{t(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(2t^2 - 4t + 4) - (t^2 - 2t + 4)}{t(t-2)(\sqrt{2t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 2t + 4})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t(t-2)}{t(t-2)(\sqrt{2t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 2t + 4})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{1}{\sqrt{2t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 2t + 4}} \\ &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

①

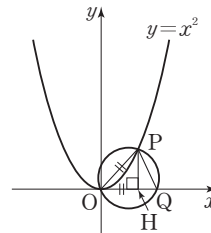
24

점 P의 좌표 $P(t, t^2)$ ($t > 0$)에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + (t^2)^2} = t\sqrt{1+t^2} \text{이므로}$$

$$Q(t\sqrt{1+t^2}, 0)$$

$$\overline{PQ}^2 = (t\sqrt{1+t^2} - t)^2 + t^4 = 2t^4 + 2t^2 - 2t^2\sqrt{1+t^2}$$



점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(t, 0)$$

$\angle POH = \theta$ 라 하면 직각삼각형 POH에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{t^2}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

삼각형 POQ의 외접원에 대하여 사인법칙에서

$$A(t) = \frac{\overline{PQ}}{\sin \theta} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\{A(t)\}^2 &= \frac{\overline{PQ}^2}{\sin^2 \theta} = \frac{2t^4 + 2t^2 - 2t^2\sqrt{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}} \\ &= 2(t^2+1)^2 - 2\sqrt{1+t^2}(1+t^2) \\ &= 2t^4 + 4t^2 + 2 - 2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\{A(t)\}^2}{t^4} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^4 + 4t^2 + 2 - 2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}{t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^4} - 2\sqrt{\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2}} \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \right\} \\ &= 2\end{aligned}$$

④

25

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 즉

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+a}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}} = b$$

에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = a = 0$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a+b=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ④

26

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -6$$

$$x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^2+4x-5+2g(x)}{x-1} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5+2g(x)}{x-1} = -6$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 하고,

$$2g(1)=0 \text{ 에서 } g(1)=0$$

$g(x)=(x-1)(x+k)$ (k 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5+2(x-1)(x+k)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)+2(x-1)(x+k)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (3x+5+2k) \\ &= 8+2k = -6 \end{aligned}$$

에서 $k=-7$

그러므로 $x \neq 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{3(x-1)(x-3)}{x-1} = 3(x-3)$$

$$\text{따라서 } f(10) = 21$$

답 ⑤

27

(i) $x=0$ 일 때, $f(0)=0$

$$(ii) x \neq 0 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^{n+15}(1+x^{2n+1})}{x^{2n+1}}$$

그러므로 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ 이다.}$$

(i) $n+15 > 2n+1$ 에서 $n < 14$

$1 \leq n \leq 13$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{14-n}(1+x^{2n+1}) = 0$$

(ii) $n+15 = 2n+1$ 에서 $n = 14$

$n = 14$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^{29}) = 1$$

(iii) $n+15 < 2n+1$ 에서 $n > 14$

$n \geq 15$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^{2n+1}}{x^{n-14}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{n-14}} + x^{n+15} \right) \text{의 값은 존재하지 않는다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이기 위한 n 의 값의 범위는 $1 \leq n \leq 13$ 이므로 자연수 n 의 최댓값은 13이다.

답 13

28

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \left| -\frac{2}{x} - 2 \right| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (-x^2+k_1) = -1+k_1$$

$$f(-1) = -(-1)^2+k_1 = -1+k_1$$

이므로 $-1+k_1=0$ 에서 $k_1=1$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2+1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left| \frac{2}{x} + k_2 \right| = |2+k_2|$$

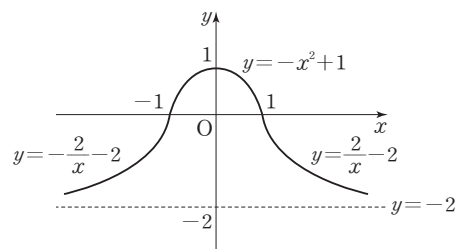
$$f(1) = \left| \frac{2}{1} + k_2 \right| = |2+k_2|$$

이므로 $|2+k_2|=0$ 에서 $k_2=-2$

한편, $-1 \leq x < 1$ 일 때, $y = -x^2+1$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

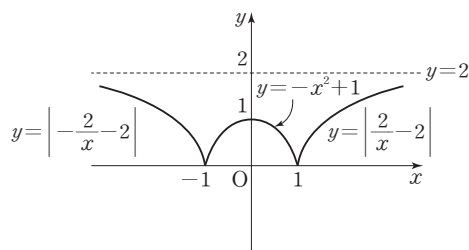
$x \geq 1$ 일 때, $y = \frac{2}{x}-2$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선이 직선 $y = -2$ 이고

$x < -1$ 일 때, $y = -\frac{2}{x}-2$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}-2$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그러므로 함수 $y=f(x)$ 와 그 그래프는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \left| -\frac{2}{x} - 2 \right| & (x < -1) \\ -x^2 + 1 & (-1 \leq x < 1) \\ \left| \frac{2}{x} - 2 \right| & (x \geq 1) \end{cases}$$



그러므로 직선 $y=a$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수인 함수 $g(a)$ 는 다음과 같다.

$$g(a) = \begin{cases} 0 & (a \geq 2) \\ 2 & (1 < a < 2) \\ 3 & (a = 1) \\ 4 & (0 < a < 1) \\ 2 & (a = 0) \\ 0 & (a < 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a=0, 1, 2$ 에서 불연속이므로 구하는 모든 실수 t 의 값의 합은

$$0+1+2=3$$

답 ①

29

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=\frac{8}{3}$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+a) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{8} \left(b - \frac{3}{4}n \right) x = 0$$

$$f(0) = \frac{3}{8} \left(b - \frac{3}{4}n \right) \times 0 = 0$$

에서 $a=0$

$$\text{또한 } \lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}^-} \frac{3}{8} \left(b - \frac{3}{4}n \right) x = b - \frac{3}{4}n$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}^+} (3x-8) = 0$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = 0 \text{에서 } b - \frac{3}{4}n = 0, \text{ 즉}$$

$$b = \frac{3}{4}n \quad (n \text{은 자연수})$$

그러므로 $a+b = \frac{3}{4}n$ (n 은 자연수)이고

$$0 < \frac{3}{4}n < 10 \text{에서 } 0 < n < \frac{40}{3} < 14 \text{이므로}$$

$$a+b = b = \frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \dots, \frac{39}{4}$$

따라서 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수 $p=13$ 이고 모든 실수 b 의 값의 합은 첫째항이 $\frac{3}{4}$ 이고 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 제1항부터 제13항까지의 합이므로

$$q = \frac{13 \left(\frac{3}{4} + \frac{39}{4} \right)}{2} = \frac{273}{4}$$

$$\text{따라서 } q-p = \frac{273}{4} - 13 = \frac{221}{4}$$

답 ①

30

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$

조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) > 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) \times f(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= \{f(2)\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)\}^2 - g(x)}{x^2 + 2f(x) + g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} [\{f(x)\}^2 - g(x)]}{\lim_{x \rightarrow 2} \{x^2 + 2f(x) + g(x)\}} \\ &= \frac{\{f(2)\}^2 - 1}{2^2 + 2f(2) + 1} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } \{f(2)\}^2 - 6f(2) - 16 = 0$$

$$\{f(2)+2\} \{f(2)-8\} = 0$$

$$f(2) > 0 \text{이므로 } f(2) = 8$$

$$\text{따라서 } f(2) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8 + 1 = 9$$

답 ③

31

함수 $f(x)+g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$f(x)+g(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \{(x^2+ax-1)+(2x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \{x^2+(a+2)x\} \\ &= -a-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \{(x+b)+(2x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+b+1) \\ &= b-2 \end{aligned}$$

$$f(-1)+g(-1) = -a-1$$

$$\text{이므로 } -a-1 = b-2$$

$$a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \{(x+b)+(2x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+b+1) \\ &= b+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \{(x^2+ax-1)+(2x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \{x^2+(a+2)x\} \\ &= a+3 \end{aligned}$$

$$f(1)+g(1) = a+3$$

$$\text{이므로 } a+3 = b+4$$

$$a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=1, b=0$$

$$\text{따라서 } 3a+2b = 3+0=3$$

답 ③

32

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = g(1) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + a)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + a) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \\ &= (1+a) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + a)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + a) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \\ &= (1+a) \times 2 = 2a+2 \end{aligned}$$

$$g(1) = (1+a)f(1) = (1+a) \times 0 = 0$$

따라서 $2a+2=0$ 에서 $a=-1$

답 ②

33

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서만 불연속이고 함수 $g_1(x)$ 가 $x=-1$ 에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g_1(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g_1(x) = (-1) \times 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g_1(x) = 1 \times (-1) = -1$$

$$f(-1)g_1(-1) = 0 \times 0 = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g_1(x) \neq f(-1)g_1(-1)$$

따라서 함수 $f(x)g_1(x)$ 는 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이 아니다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서만 불연속이고 함수 $g_2(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로 함수 $f(x)g_2(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g_2(x) = (-1) \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g_2(x) = 1 \times 0 = 0$$

$$f(-1)g_2(-1) = 0 \times 0 = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g_2(x) = f(-1)g_2(-1) \text{ 이 되어}$$

함수 $f(x)g_2(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g_2(x)$ 는 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서만 불연속이고 함수 $g_3(x)$ 가 $x=-1, 1$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x)g_3(x)$ 가 $x=-1, 1$ 에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g_3(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g_3(x) = 0$$

$$f(-1)g_3(-1) = 0 \times 1 = 0$$

이므로 함수 $f(x)g_3(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g_3(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g_3(x) = 0$$

$$f(1)g_3(1) = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g_3(x) \neq f(1)g_3(1)$$

따라서 함수 $f(x)g_3(x)$ 는 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $f(x)g_k(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속인 것은 ㄴ이다.

답 ②

34

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \neq 0 \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(1)}{f(1)} \text{ 이어야 한다.}$$

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x+2a}{-x+3} = \frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-x-1}{x^2+ax+4} = \frac{-2}{a+5}$$

$$\frac{g(1)}{f(1)} = \frac{-2}{a+5}$$

$$\therefore \frac{2a+1}{2} = \frac{-2}{a+5}$$

$$(2a+1)(a+5) = -4$$

$$2a^2+11a+9=0, (a+1)(2a+9)=0$$

이므로

$$a=-1 \text{ 또는 } a=-\frac{9}{2}$$

(i) $a=-1$ 일 때

$f(x) > 0$ 이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ii) $a=-\frac{9}{2}$ 일 때

$x \geq 1$ 에서 $f(x) = x^2 - \frac{9}{2}x + 4 = 0$ 인 실수 x 가 존재하므로 함수

$\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 연속이 아니다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

답 ④

35

조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = g(1) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 4$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때, $x+1 \rightarrow 2-$ 이고 $f(x) = f(x+2)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = k \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{(k+1)f(x+1)\} = k(k+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + (k+1)f(x+1)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} \{(k+1)f(x+1)\}$$

$$= 4 + k(k+1) = k^2 + k + 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 1+$ 일 때, $f(x) = f(x+2)$ 이므로 $x \rightarrow -1+$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -1 + k$$

$x \rightarrow 1+$ 일 때, $x+1 \rightarrow 2+$ 이고 $f(x) = f(x+2)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{(k+1)f(x+1)\} = 3(k+1) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + (k+1)f(x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} \{(k+1)f(x+1)\} \\ &= -1 + k + 3(k+1) = 4k+2 \quad \dots\dots \textcircled{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(1) &= f(1) + (k+1)f(2) \\ &= f(-1) + (k+1)f(0) = 4k+2 \quad \dots\dots \textcircled{B}\end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $k^2+k+4=4k+2$ 이어야 하므로

$$k^2-3k+2=0, (k-1)(k-2)=0$$

$$k=1 \text{ 또는 } k=2$$

조건 (가)에서 $f(-1)=-1+k>0$ 이므로 $k=2$

따라서 $-1 \leq x < 0$ 일 때, $f(x)=x+2$ 이므로

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$

답 ②

36

이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a = a(a-3) \text{이므로}$$

$a(a-3) < 0$, 즉 $0 < a < 3$ 일 때

$$f(a) = 0$$

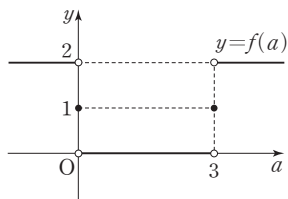
$a(a-3) = 0$, 즉 $a=0$ 또는 $a=3$ 일 때

$$f(a) = 1$$

$a(a-3) > 0$, 즉 $a < 0$ 또는 $a > 3$ 일 때

$$f(a) = 2$$

따라서 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $\frac{1}{2}g(a)-8$ 이 $a=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{a \rightarrow 3-} \left\{ \frac{1}{2}g(a) - 8 \right\} = \frac{1}{2}g(3) - 8 \text{이다.}$$

함수 $f(a) \left\{ \frac{1}{2}g(a) - 8 \right\}$ 이 $a=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{a \rightarrow 3-} f(a) \left\{ \frac{1}{2}g(a) - 8 \right\} = 0 \times \left\{ \frac{1}{2}g(3) - 8 \right\} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 3+} f(a) \left\{ \frac{1}{2}g(a) - 8 \right\} = 2 \times \left\{ \frac{1}{2}g(3) - 8 \right\} = g(3) - 16$$

$$f(3) \left\{ \frac{1}{2}g(3) - 8 \right\} = 1 \times \left\{ \frac{1}{2}g(3) - 8 \right\} = \frac{1}{2}g(3) - 8$$

$$\text{에서 } g(3) - 16 = 0 = \frac{1}{2}g(3) - 8$$

$$\text{따라서 } g(3) = 16$$

답 16

37

$f(x)=x^3+ax+1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 삼차방정식 $f(x)=0$ 은 세 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 하나씩 실근을 가져야 한다.

$$f(-1)f(-2) = -a(-2a-7) < 0, a(2a+7) < 0 \text{에서}$$

$$-\frac{7}{2} < a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 실근을 갖는다.

마찬가지로 $f(0)f(1)=a+2 < 0$ 에서

$$a < -2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

마찬가지로 $f(1)f(2)=(a+2)(2a+9) < 0$ 에서

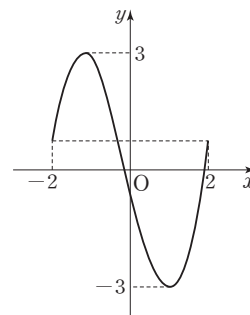
$$-\frac{9}{2} < a < -2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{7}{2} < a < -2$ 이므로 구하는 정수 a 는 -3 이다.

답 ③

38

조건 (가)에 의하여 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)=3$ 과 $f(x)=-3$ 을 만족시키는 x 가 각각 오직 한 개씩 있고 조건 (나)에 의하여 $f(x)=f(x+4)$ 이므로 3과 -3 은 이 구간에서 각각 최댓값과 최솟값이고 이 구간에서 그래프의 개형의 예를 들면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$ 이므로 $f(-2)=f(2)$ 이다. (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$ 이고 $-12 \leq x \leq 12$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 3, -3 이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다. (참)

ㄷ. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 적어도 2개 존재한다. $f(x)=f(x+4)$ 이므로 $-12 \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 적어도 12개 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

정답

본문 61~73쪽

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ③	07 ③	08 11	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ③	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ③	20 ④
21 ②	22 ④	23 ③	24 ④	25 ⑤
26 ⑤	27 689	28 121	29 ③	30 ①
31 ②	32 2	33 ④	34 ③	35 ⑤
36 ②	37 ⑤	38 ③	39 ①	40 ⑤
41 6				

01

$f'(1)=3$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 + \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \right\} \\
 &= 2f'(1)+f'(1) \\
 &= 3f'(1) \\
 &= 3 \times 3 = 9
 \end{aligned}$$

답 ⑤

02

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h)-5}{h}=2$ 에서 $h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

또한 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $x=4$ 에서 연속이다. 그러므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(4+3h)-5\}=0 \text{에서 } f(4)=5$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h)-5}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(4+3h)-f(4)}{3h} \times 3 \right\} \\
 &= 3f'(4)=2
 \end{aligned}$$

에서 $f'(4)=\frac{2}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-5}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x^2-16} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{f(x)-f(4)}{x-4} \times \frac{1}{x+4} \right\} \\
 &= \frac{1}{8} f'(4) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

답 ①

03

함수 $f(x)$ 가 다항함수이므로 $x=2$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=f(2)$ 이므로 $f(2)=4$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}=6 \text{에서 } h \rightarrow 0 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

또한 함수 $g(x)$ 가 다항함수이므로 $x=2$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [f(2+h)\{g(2+3h)-g'(2)\}]$$

$$= 4 \lim_{h \rightarrow 0} \{g(2+3h)-g'(2)\}$$

$$= 4 \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} g(2+3h) - \lim_{h \rightarrow 0} g'(2) \right\}$$

$$= 4\{g(2)-g'(2)\}$$

$$= 0$$

에서 $g(2)=g'(2)$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)\{g(2+3h)-g(2)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(2+3h)-g(2)}{3h} \times 3 \right\}$$

$$= f(2) \times g'(2) \times 3$$

$$= 12g'(2)=6$$

$$\text{이므로 } g'(2)=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

04

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2(x-2) & (x < 2) \\ x^2+ax+b & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x+2)^2(x-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+ax+b) = 4+2a+b$$

$$f(2) = 4+2a+b$$

에서 $4+2a+b=0$

$$\text{즉, } b = -2(a+2) \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x+2)^2(x-2)-0}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x+2)^2 = 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2+ax+b-0}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+a+2) = a+4
 \end{aligned}$$

이므로

$$a+4=16$$

$$a=12$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } b=-28\text{이므로}$$

$$a+b=12+(-28)=-16$$

답 ③

05

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x)+b & (x<2) \\ x^3+ax & (x\geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \{a(1-x)+b\} = -a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^3+ax) = 8+2a$$

$$f(2)=8+2a\text{에서}$$

$$-a+b=8+2a$$

$$b=3a+8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\{a(1-x)+b\} - (8+2a)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\{a(1-x)+3a+8\} - (8+2a)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{a(2-x)}{x-2}$$

$$= -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x^3+ax) - (8+2a)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x^3-8)+a(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)+a(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+2x+4+a) = 12+a$$

$$\text{에서 } -a=12+a$$

$$a=-6$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } b=-10\text{이므로}$$

$$a-b=-6-(-10)=4$$

답 ④

06

$$g(x)=\begin{cases} 4 & (x\leq 1) \\ f(x) & (1<x\leq k) \\ c & (x>k) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, $x=1$, $x=k$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1), \lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$$

다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(1)=4, f(k)=c$$

$$\text{즉, } 1+a+b=4, k^3+ak^2+bk=c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$, $x=k$ 에서도 미분가능하다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{4-4}{x-1} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-4}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^3+ax^2+bx)-(1+a+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \{x^2+(a+1)x+a+b+1\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \{x^2+(a+1)x+4\} \\ &= a+6 \end{aligned}$$

$$a+6=0\text{에서}$$

$$a=-6$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } b=9$$

$$\text{즉, } f(x)=x^3-6x^2+9x\text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} = \lim_{x \rightarrow k-} \frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow k-} \frac{(x^3-6x^2+9x)-(k^3-6k^2+9k)}{x-k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k-} \frac{(x-k)\{x^2+(k-6)x+k^2-6k+9\}}{x-k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k-} \{x^2+(k-6)x+k^2-6k+9\} \\ &= 3k^2-12k+9 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} = \lim_{x \rightarrow k+} \frac{c-f(k)}{x-k}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow k+} \frac{0}{x-k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로

$$3k^2-12k+9=0\text{에서}$$

$$3(k-1)(k-3)=0$$

$$k>1\text{이므로 } k=3$$

$$f(3)=3^3-6\times 3^2+9\times 3=0$$

$$\text{그러므로 } c=0$$

$$\text{따라서 } a-b+c-k=-6-9+0-3=-18$$

답 ③

07

$$f(x)=(x^3+2x)(x^2-x+1)\text{에서}$$

$$f'(x)=(3x^2+2)(x^2-x+1)+(x^3+2x)(2x-1)\text{이므로}$$

$$f'(1)=5\times 1+3\times 1=8$$

답 ③

08

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+3\} = 0$ 이고 다항함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(0)+3=0 \text{에서 } f(0)=-3$$

$$\text{즉, } b=-3$$

$$f(x)=x^3+ax^2+a^2x-3 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+a^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+ax^2+a^2x}{x(3x^2+2ax+a^2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+ax+a^2}{(3x^2+2ax+a^2)^2} \end{aligned}$$

이때 $a=0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{에서 } a^2=2$$

$$\text{따라서 } a^2+b^2=2+(-3)^2=2+9=11$$

답 11

다른 풀이

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+3\} = 0$ 이고 다항함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(0)+3=0 \text{에서 } f(0)=-3$$

$$\text{즉, } b=-3$$

$$f(x)=x^3+ax^2+a^2x-3 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \times \frac{1}{(3x^2+2ax+a^2)^2} \right\}$$

이때 $a=0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(3x^2+2ax+a^2)^2} \\ &= \frac{f'(0)}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } a^2=2$$

$$\text{따라서 } a^2+b^2=2+(-3)^2=2+9=11$$

09

조건 (가)에서 $f(1)-g(1)=0$, $f'(1)-g'(1)=0$ 이므로

삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은 $x=1$ 을 중근으로 갖는다.

다른 한 근을 k 라 하면

$$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-k) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 $g'(1)=-g'(3)$ 이므로 이차함수 $g(x)$ 의 그래프에서

축의 방정식은

$$x=\frac{1+3}{2}=2$$

그러므로 상수 a, b 에 대하여

$$g(x)=a(x-2)^2+b=a(x^2-4x+4)+b$$

로 놓을 수 있다.

$$g'(x)=a(2x-4)$$

$$g'(1)=-2a=4$$

이므로

$$a=-2$$

$$g(x)=-2(x-2)^2+b$$

㉠에서

$$f(x)=(x-1)^2(x-k)+g(x)$$

이므로

$$f(x)=(x-1)^2(x-k)-2(x-2)^2+b$$

$$=(x^2-2x+1)(x-k)-2(x^2-4x+4)+b$$

$$f'(x)=(2x-2)(x-k)+(x^2-2x+1)-2(2x-4)$$

$$f'(-1)=4k+20=8$$

$$k=-3$$

$$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+3)$$

$$\text{따라서 } f(2)-g(2)=5$$

답 ③

참고

① '다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)=0$, $f'(a)=0$ 이면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ 로 나타낼 수 있다.'

다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)+ax+b \text{이고}$$

$$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+a$$

$$f(a)=0, f'(a)=0 \text{에서}$$

$$aa+b=0, a=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0, b=0$ 이므로

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)$$

로 나타낼 수 있다.

② '이차함수 $g(x)$ 에 대하여 $g'(a)=-g'(\beta)$ 이면 이차함수 $g(x)$ 의

그래프에서 축의 방정식은 $x=\frac{a+\beta}{2}$ 이다.'

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$g'(x)=2ax+b$$

$$g'(a)=-g'(\beta) \text{에서}$$

$$g'(a)+g'(\beta)=0$$

$$2a(a+\beta)+2b=0$$

$$a+\beta=-\frac{b}{a}$$

한편, 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프에서 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$ 로

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{a+\beta}{2}$$

가 성립한다.

10

$f(x)=x^3+3x-1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2+3$$

이때 $f'(1)=6$ 이므로 점 $(1, 3)$ 을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인

직선의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{6}(x-1)$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1-3=-\frac{1}{6}(a-1)$$

$$a-1=12$$

$$\text{따라서 } a=13$$

㉔ ③

11

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)=(x^2-1)(x-a)\text{에서}$$

$$f'(x)=2x(x-a)+x^2-1$$

$$f'(1)=2(1-a)$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=2(1-a)(x-1)$$

이 직선이 점 $(3, f(3))$ 을 지나므로

$$f(3)=2(1-a) \times (3-1)=4(1-a)$$

$$\text{한편, } f(3)=4 \times 2 \times (3-a)=24-8a\text{이므로}$$

$$4(1-a)=24-8a$$

$$1-a=6-2a$$

$$\text{따라서 } a=5$$

㉔ ⑤

12

$$f(x)=x^3+3x-2\text{에서 } f'(x)=3x^2+3$$

$$g(x)=x^2+ax+b\text{에서 } g'(x)=2x+a$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 점 $A(1, 2)$ 에서 만나므로 $g(1)=f(1)$ 에서

$$1+a+b=2$$

$$a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(1, 2)$ 에서의 접선이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A 에서의 접선과 일치하므로

$$g'(1)=f'(1)\text{에서}$$

$$2+a=6$$

$$a=4$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } b=-3$$

$$\text{따라서 } g(x)=x^2+4x-3\text{이므로}$$

$$g(-1)=1-4-3=-6$$

㉔ ②

13

$$f(x)=x^2+2x+2\text{라 하면 } f'(x)=2x+2$$

점점의 좌표를 $A(\alpha, \alpha^2+2\alpha+2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=2\alpha+2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=(2\alpha+2)(x-\alpha)$$

$$y=2(\alpha+1)x-\alpha^2+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

같은 방법으로 점 $B(\beta, \beta^2+2\beta+2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=2(\beta+1)x-\beta^2+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

두 접선은 모두 점 $(a, \frac{1}{2}a)$ 를 지나므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\frac{1}{2}a=2(\alpha+1)a-\alpha^2+2, \quad \frac{1}{2}a=2(\beta+1)a-\beta^2+2$$

즉, α, β 는 t 에 대한 이차방정식 $\frac{1}{2}a=2(t+1)a-t^2+2$ 의 근이다.

$$t^2-2at-\frac{3}{2}a-2=0$$

에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2a, \quad \alpha\beta=-\frac{3}{2}a-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이때 직선 AB의 방정식은

$$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=\frac{(\beta^2+2\beta+2)-(\alpha^2+2\alpha+2)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

$$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=\frac{(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

$$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=(\beta+\alpha+2)(x-\alpha)$$

$$y=(\alpha+\beta+2)x-\alpha\beta+2$$

$$\textcircled{3}\text{에서 } y=(2a+2)x+\frac{3}{2}a+4=a\left(2x+\frac{3}{2}\right)+2x+4$$

이므로 직선 AB는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(-\frac{3}{4}, \frac{5}{2})$ 를 지난다.

$$\text{따라서 } p=-\frac{3}{4}, \quad q=\frac{5}{2}\text{이므로 } p+q=-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{7}{4}$$

㉔ ③

14

$$f(x)=x^3+3x\text{에서 } f(0)=0, \quad f(3)=36\text{이므로}$$

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{36-0}{3-0}=12$$

$$f'(x)=3x^2+3\text{이고, 곡선 } y=f(x) \text{ 위의 점 } C(c, f(c)) \quad (0 < c < 3)$$

에서의 접선의 기울기가 12이므로

$$f'(c)=3c^2+3=12\text{에서 } c=\sqrt{3}\text{이고}$$

$$f(\sqrt{3})=6\sqrt{3}$$

그러므로 접선 l 의 방정식은

$$y-6\sqrt{3}=12(x-\sqrt{3})$$

$$y=12x-6\sqrt{3}$$

직선 l 이 곡선 $y=-x^2+6x+k$ 와 서로 다른 두 점 D, E에서 만나므로

$$-x^2+6x+k=12x-6\sqrt{3}$$

$$x^2+6x-6\sqrt{3}-k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=3^2-(-6\sqrt{3}-k)>0$$

$$k>-9-6\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=-6, \quad \alpha\beta=-6\sqrt{3}-k$$

직선 AB와 직선 DE가 서로 평행하고 $\overline{AB}=\overline{DE}$ 이므로

$$|\beta-\alpha|=|3-0|=3$$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-6)^2-4 \times (-6\sqrt{3}-k)=9$$

$$4k=-27-24\sqrt{3}$$

$$k=-\frac{27}{4}-6\sqrt{3}$$

으로 $\textcircled{2}$ 의 조건을 만족시킨다.

$$\text{따라서 } p=-\frac{27}{4}, \quad q=-6\text{이므로}$$

$$p-q=-\frac{27}{4}-(-6)=-\frac{3}{4}$$

㉔ ③

15

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 한다. 삼차함수 $f(x)$ 가 일대일대응이려면 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가 증가하거나 감소해야 한다.

즉, '모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ ' 또는 '모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ '이어야 한다.

$f(x) = x^3 - 12x^2 + ax + 1$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 24x + a$ 로 함수 $f'(x)$ 의 이차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 인 경우는 존재하지 않는다.

그러므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 24x + a \geq 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $3x^2 - 24x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D \leq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 12^2 - 3a \leq 0$$

$$a \geq 48$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 48이다.

답 ④

16

$f(x) = x^3 + kx^2 + 3$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx = x(3x + 2k)$$

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(1, 4)$ 에서 감소하려면 $1 < x < 4$ 일 때 $f'(x) \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$\text{즉, } f'(1) \leq 0, f'(4) \leq 0$$

$$f'(1) = 3 + 2k \leq 0 \text{에서 } k \leq -\frac{3}{2}$$

$$f'(4) = 48 + 8k \leq 0 \text{에서 } k \leq -6$$

두 부등식을 동시에 만족시켜야 하므로

$$k \leq -6$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -6 이다.

답 ①

17

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에서 $f(0) = f'(1)$ 이므로

$$c = 3 + 2a + b \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (나)에서 $f'(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값을 가지므로 함수

$y = 3x^2 + 2ax + b$ 의 그래프의 축이 직선 $x=1$ 이다. 즉,

$$-\frac{a}{3} = 1 \text{에서 } a = -3 \quad \dots\dots ㉡$$

조건 (다)에서 $(x_1 - x_2)\{f(x_1) - f(x_2)\} \leq 0$ 이므로

$x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이고 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 이다.

즉, 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소해야 한다.

그러므로 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이 성립해야 한다.

함수 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$ 이고, 이차항의 계수가 양수이므로, 열린구간 $(-1, 2)$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < f'(-1)$ 이다. $f'(-1) \leq 0$ 이면 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 항상 $f'(x) \leq 0$ 이 성립한다.

$$f'(-1) = 3 - 2a + b \leq 0$$

$$b \leq 2a - 3$$

㉡을 대입하면

$$b \leq -9 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉢에서

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + b - 3$$

그러므로

$$f(3) = 27 - 27 + 3b + b - 3 = 4b - 3$$

이때 ㉢에서 $b \leq -9$ 이므로

$$f(3) \leq -36 - 3 = -39$$

따라서 $f(3)$ 의 최댓값은 -39 이다.

답 ⑤

18

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-3	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f(1) = 1 + 3 - 9 + a = -2 \text{에서}$$

$$a = 3$$

따라서 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값 $f(-3)$ 은

$$f(-3) = -27 + 27 + 27 + 3 = 30$$

답 ⑤

19

$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + a$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x^2 + x - 2)$$

$$= 4x(x-1)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖고, $x=-2$ 와 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$f(-2) = a - \frac{32}{3}, f(0) = a, f(1) = a - \frac{5}{3}$$

이고 모든 극값의 합이 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$3a - \frac{37}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{13}{3}$$

답 ③

20

$$f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 3a)x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2 - 3a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2 - 2ax + a^2 - 3a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 3a) > 0$$

$$-2a^2 + 9a > 0$$

$$2a\left(a - \frac{9}{2}\right) < 0$$

$$0 < a < \frac{9}{2}$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4로 개수는 4이다.

답 ④

21

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수)로 놓으면

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = -f'(-x)$ 이므로

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = -4(-x)^3 - 3a(-x)^2 - 2b(-x) - c$$

$$6ax^2 + 2c = 0 \text{에서 } a=0, c=0 \text{이므로}$$

$$f(x) = x^4 + bx^2 + d$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx$$

조건 (나)에서 $x=2$ 일 때 극솟값을 가지므로

$$f'(2) = 0$$

$$32 + 4b = 0 \text{에서 } b = -8$$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + d$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$$

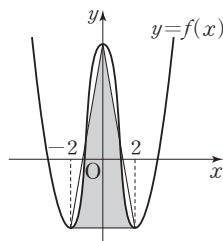
$$= 4x(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=-2$ 와 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.



$[d > 0, f(2) < 0 \text{인 경우}]$

$$\text{이때 } f(0) - f(2) = d - (16 - 32 + d) = 16$$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{2 - (-2)\} \times 16 = 32$$

답 ②

22

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x \geq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 같고, $x < 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 $x > 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭인 연속함수이다.

조건 (가)에서 $f(1) = f'(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $(x-1)^2$ 을 인수로 갖는다.

$$f(x) = (x-1)^2(x^2 + ax + b) \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + ax + b)$$

$$f'(x) = (2x-2)(x^2 + ax + b) + (x-1)^2(2x+a)$$

$$= (x-1)\{4x^2 + (3a-2)x + 2b-a\}$$

조건 (나)에서 함수 $|g(x) - 3|$ 은 $x=k$, $x=-k$ 에서만 미분가능하지 않으며 $k \neq 0$ 이므로 함수 $|g(x) - 3|$ 은 $x=0$ 에서 미분가능하다.

함수 $|g(x) - 3|$ 의 그래프도 y 축에 대하여 대칭이므로 $x=0$ 에서 미분가능하려면 $f'(0) = 0$ 이어야 한다.

$$f'(0) = -2b + a = 0 \text{에서}$$

$$a = 2b$$

그러므로

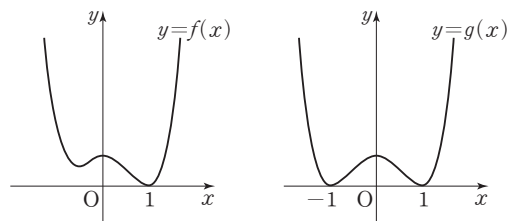
$$f'(x) = (x-1)\{4x^2 + (3a-2)x\}$$

$$= 4x(x-1)\left(x - \frac{2-3a}{4}\right)$$

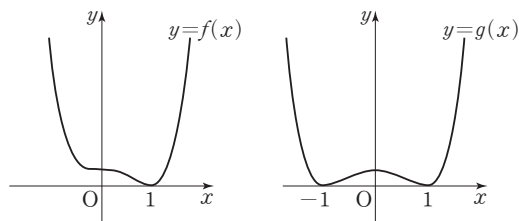
조건 (다)에서 열린구간 $(0, 1)$ 에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2) > 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 는 열린구간 $(0, 1)$ 에서 항상 증가하거나 항상 감소한다. 즉, 극값을 갖지 않는다.

$$\text{따라서 } \frac{2-3a}{4} \leq 0 \text{ 또는 } \frac{2-3a}{4} \geq 1$$

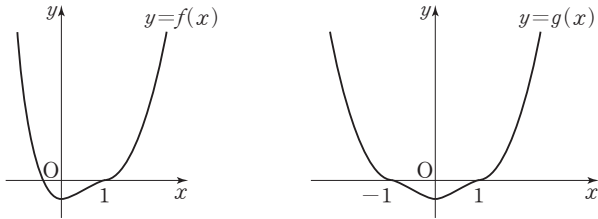
(i) $a > \frac{2}{3}$ 일 때



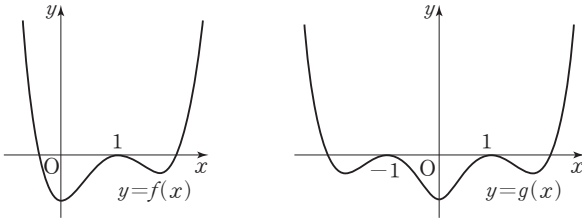
(ii) $a = \frac{2}{3}$ 일 때



(iii) $a = -\frac{2}{3}$ 일 때



(iv) $a < -\frac{2}{3}$ 일 때



- ㄱ. $f(0) > 0$ 이면 (i), (ii)의 경우로 함수 $|g(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)
- ㄴ. (iii)의 경우 함수 $g(x)$ 는 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)
- ㄷ. (i), (ii), (iii), (iv)에서 조건 (나)를 항상 만족시키려면 $f(0) = b \leq 3$
따라서 $f(2) = 4 + 2a + b = 4 + 4b + b = 5b + 4 \leq 19$ 로 $f(2)$ 의 최댓값은 19이다. (참)
- 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

23

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a-20$	↗	a	↘	$a-4$	↗	a

$$f(-2) = -8 - 12 + a = a - 20$$

$$f(0) = a$$

$$f(2) = 8 - 12 + a = a - 4$$

$$f(3) = 27 - 27 + a = a$$

이고 $a-4 > a-20$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최솟값 $a-20$ 을 갖고, $x=0$ 또는 $x=3$ 일 때 최댓값 a 를 갖는다.

따라서 $m = a - 20$, $M = a$ 이므로

$$M + m = 12 \text{에서}$$

$$a + (a - 20) = 12$$

$$a = 16$$

답 ③

24

도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 $x=0$ 에서 x 축에 접하고, $x=3$ 에서 x 축과 만나므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	...	0	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$		↘		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서 $x=3$ 일 때 극소이면서 최솟이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(3)$ 이다.

답 ④

25

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

a 가 양수이므로 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극소이면서 최솟이다.

$$f(2) = 8a - 12a - 1 = -4a - 1 = -5 \text{이므로}$$

$$4a = 4, a = 1$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$$

$$\text{이때 } f(1) = 1 - 3 - 1 = -3, f(4) = 64 - 48 - 1 = 15 \text{이므로}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 15를 갖는다.

따라서 $M = 15$

답 ⑤

26

$$y = 8^x - 3 \times 2^x + 5 = 2^{3x} - 3 \times 2^x + 5$$

$$2^x = t \text{로 치환하면 닫힌구간 } [-2, 2] \text{에서 } \frac{1}{4} \leq t \leq 4$$

$$f(t) = t^3 - 3t + 5 \text{로 놓으면 구하는 값은 닫힌구간 } \left[\frac{1}{4}, 4\right] \text{에서 함수}$$

$f(t)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이다.

$$f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1) = 3(t+1)(t-1)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{4}$	...	1	...	4
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		↘	극소	↗	

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} - \frac{3}{4} + 5 = \frac{273}{64}$$

$$f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$$

$$f(4) = 64 - 12 + 5 = 57$$

이므로 함수 $f(t)$ 는 $t=4$ 일 때 최댓값 57, $t=1$ 일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$57 + 3 = 60$$

답 ⑤

27

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=-2$ 에서 x 축에 접하고, 두 점

$A(3, 0)$, $B(0, 6)$ 을 지나므로

$$f(x) = a(x+2)^2(x-3) \quad (a \text{는 상수})$$

$$f(0) = 6 \text{이므로 } a \times 4 \times (-3) = 6$$

$$\text{에서 } a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-3)$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times (3-t) \times \left\{ -\frac{1}{2}(t+2)^2(t-3) \right\}$$

$$= \frac{1}{4}(t-3)^2(t+2)^2$$

$$= \frac{1}{4}(t^2 - 6t + 9)(t^2 + 4t + 4) \quad (-2 < t < 3)$$

$$S'(t) = \frac{1}{4}(2t-6)(t+2)^2 + \frac{1}{4}(t-3)^2(2t+4)$$

$$= \frac{1}{4}(t-3)(t+2)\{2(t+2) + 2(t-3)\}$$

$$= \frac{1}{2}(t-3)(t+2)(2t-1) \quad (-2 < t < 3)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = \frac{1}{2}$$

$-2 < t < 3$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(-2)	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	(3)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

함수 $S(t)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 \times \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{25}{4} \times \frac{25}{4} = \frac{625}{64}$$

따라서 $p=64$, $q=625$ 이므로

$$p+q = 64 + 625 = 689$$

답 689

28

$f(x) = 2x^3 - ax$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고

$$f'(x) = 6x^2 - a$$

(i) $a \leq 0$ 이면 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 최솟값은 $f(-1)$ 이다.

$$f(-1) = -2 + a = -\frac{32}{27}$$

에서 $a = \frac{22}{27}$ 이므로 $a \leq 0$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a > 0$ 이면 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -\sqrt{\frac{a}{6}}$ 또는 $x = \sqrt{\frac{a}{6}}$ 이고 극솟값

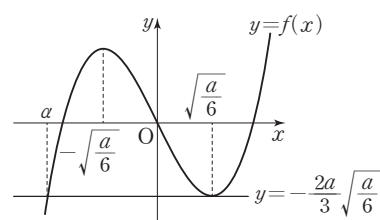
$f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$ 를 갖는다.

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = 2\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^3 - a \times \sqrt{\frac{a}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{6}} \times \left(\frac{a}{3} - a\right) = -\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{6}}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$ 는 $x = \sqrt{\frac{a}{6}}$ 에서 접하

므로 $f(x) - f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = 2\left(x - \sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2(x-a)$ (a 는 상수)



$$2x^3 - ax + \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{6}} = 2\left(x - \sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2(x-a)$$

에서 양변을 전개하여 이차항의 계수를 비교하면

$$a + 2\sqrt{\frac{a}{6}} = 0$$

$$a = -2\sqrt{\frac{a}{6}}$$

$$2x^3 - ax + \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{6}} = 2\left(x - \sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2\left(x + 2\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$$

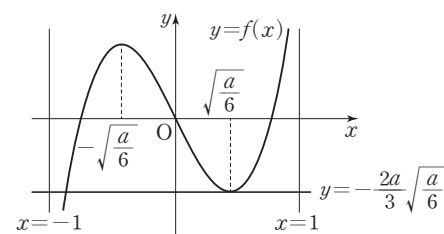
이때 $-2\sqrt{\frac{a}{6}} = -1$ 인 경우 $a = \frac{3}{2}$

$\sqrt{\frac{a}{6}} = 1$ 인 경우 $a = 6$ 이다.

(가) $\sqrt{\frac{a}{6}} < 1$, 즉 $0 < a < 6$ 인 경우

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 최솟값은 $f(-1)$ 또는 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$ 이다.

① $0 < a \leq \frac{3}{2}$ 인 경우

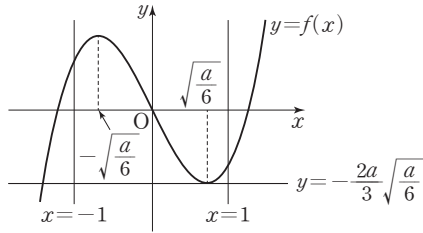


닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 최솟값은 $f(-1)$ 이다.

$$f(-1) = -2 + a = -\frac{32}{27} \text{에서 } a = \frac{22}{27} \text{이므로 } 0 < a \leq \frac{3}{2}$$

을 만족시킨다.

② $\frac{3}{2} < a < 6$ 인 경우



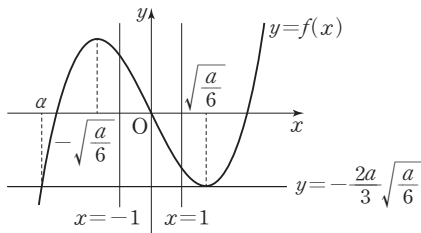
닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 최솟값은 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$ 이다.

$$-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}} = -\frac{32}{27} \text{에서}$$

$$a^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3$$

$a = \frac{8}{3}$ 이고 $\frac{3}{2} < a < 6$ 을 만족시킨다.

(나) $\sqrt{\frac{a}{6}} \geq 1$, 즉 $a \geq 6$ 인 경우



닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 최솟값은 $f(1)$ 이다.

$$f(1) = 2 - a = -\frac{32}{27}$$

$a = \frac{86}{27}$ 으로 $a \geq 6$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = \frac{22}{27}$ 또는 $a = \frac{8}{3}$

그러므로 모든 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{22}{27} + \frac{8}{3} = \frac{22+72}{27} = \frac{94}{27}$$

따라서 $p=27$, $q=94$ 이므로

$$p+q=27+94=121$$

121

29

$f(x) = 2x^3 + 3(a-2)x^2 - 12ax + 16a^2$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 + 6(a-2)x - 12a = 6\{x^2 + (a-2)x - 2a\}$$

$$= 6(x-2)(x+a)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=-a$

ㄱ. $a=1$ 일 때, $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극대이면서 최대이다.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 16$ 에서 최댓값은

$$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 16 = 23 \text{이다.}$$

따라서 $g(1) = 23$ 이다. (참)

ㄴ. (i) $a \leq -2$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned} f(2) &= 16 + 12(a-2) - 24a + 16a^2 \\ &= 16a^2 - 12a - 8 \end{aligned}$$

이므로

$$g(a) = 16a^2 - 12a - 8$$

(ii) $a > -2$ 일 때

① $-2 < a \leq 2$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=-a$ 일 때 극대이면서 최대이다.

$$\begin{aligned} f(-a) &= -2a^3 + 3(a-2)a^2 + 12a^2 + 16a^2 \\ &= a^3 + 22a^2 \end{aligned}$$

이므로

$$g(a) = a^3 + 22a^2$$

② $a > 2$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned} f(-2) &= -16 + 12(a-2) + 24a + 16a^2 \\ &= 16a^2 + 36a - 40 \end{aligned}$$

이므로

$$g(a) = 16a^2 + 36a - 40$$

(i), (ii)에서

$$g(a) = \begin{cases} 16a^2 - 12a - 8 & (a \leq -2) \\ a^3 + 22a^2 & (-2 < a \leq 2) \\ 16a^2 + 36a - 40 & (a > 2) \end{cases}$$

함수 $g(a)$ 는 $a=-2$ 와 $a=2$ 에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$\lim_{a \rightarrow -2-} g(a) = 16 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) - 8 = 80$$

$$\lim_{a \rightarrow -2+} g(a) = (-2)^3 + 22 \times (-2)^2 = 80$$

$$g(-2) = 16 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) - 8 = 80$$

으로 $\lim_{a \rightarrow -2} g(a) = g(-2)$ 를 만족시키므로 함수 $g(a)$ 는 $a=-2$ 에서 연속이다.

$$\lim_{a \rightarrow -2-} \frac{g(a) - g(-2)}{a - (-2)} = \lim_{a \rightarrow -2-} \frac{(16a^2 - 12a - 8) - 80}{a + 2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -2-} \frac{4(a+2)(4a-11)}{a+2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -2-} 4(4a-11)$$

$$= -76$$

$$\lim_{a \rightarrow -2+} \frac{g(a) - g(-2)}{a - (-2)} = \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{(a^3 + 22a^2) - 80}{a + 2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{(a+2)(a^2 + 20a - 40)}{a + 2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -2+} (a^2 + 20a - 40)$$

$$= -76$$

에서 $g'(-2) = -76$ 으로 함수 $g(a)$ 는 $a=-2$ 에서 미분가능하다.

$$\lim_{a \rightarrow -2} g(a) = 2^3 + 22 \times 2^2 = 96$$

$$\lim_{a \rightarrow -2+} g(a) = 16 \times 2^2 + 36 \times 2 - 40 = 96$$

$$g(2) = 2^3 + 22 \times 2^2 = 96$$

으로 $\lim_{a \rightarrow 2} g(a) = g(2)$ 를 만족시키므로 함수 $g(a)$ 는 $a=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{g(a) - g(2)}{a - 2} &= \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{(a^3 + 22a^2) - 96}{a - 2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{(a-2)(a^2 + 24a + 48)}{a - 2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^-} (a^2 + 24a + 48) \\ &= 100 \\ \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{g(a) - g(2)}{a - 2} &= \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{(16a^2 + 36a - 40) - 96}{a - 2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{4(a-2)(4a + 17)}{a - 2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^+} 4(4a + 17) \\ &= 100\end{aligned}$$

에서 $g'(2) = 100$ 으로 함수 $g(a)$ 는 $a=2$ 에서 미분가능하다.
따라서 함수 $g(a)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

$$\therefore g'(a) = \begin{cases} 32a - 12 & (a \leq -2) \\ 3a^2 + 44a & (-2 < a \leq 2) \\ 32a + 36 & (a > 2) \end{cases}$$

$g'(a) = 0$ 에서 $a = 0$

함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	...	-2	...	0	...	2	...
$g'(a)$	-	-76	-	0	+	100	+
$g(a)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

그러므로 함수 $g(a)$ 는 $a=0$ 에서 극솟값을 갖고, 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + a$ 라 하면

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$f(-3) = -9 + 9 + 9 + a = a + 9$$

$$f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 + a = a - \frac{5}{3}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극대, $x = 1$ 에서 극소이므로 삼차방정식

$f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-3) > 0, f(1) < 0$$

$$\text{즉, } a + 9 > 0 \text{이고 } a - \frac{5}{3} < 0 \text{에서 } -9 < a < \frac{5}{3}$$

따라서 정수 a 의 개수는

$$1 - (-9) = 10$$

답 ①

31

삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 - 12x - k = 0$ 의 서로 다른 실근은 함수

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ 라 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6(x-2)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

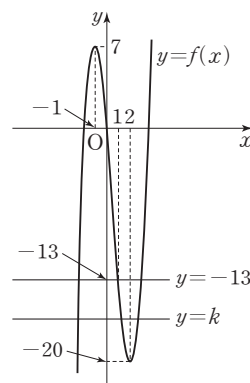
x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$$

$$f(2) = 16 - 12 - 24 = -20$$

$$f(1) = 2 - 3 - 12 = -13$$

방정식 $f(x) = k$ 가 $\alpha < 1 < \beta < \gamma$ 인 세 실근 α, β, γ 를 갖기 위해서는
함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 그림과 같아야 한다.



따라서 $-20 < k < -13$ 이어야 하므로 정수 k 의 개수는
 $-13 - (-20) - 1 = 6$

답 ②

32

접점의 좌표를 $(a, a^3 - 6a^2 + 9a - 3)$ 이라 하면

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 \text{에서}$$

접선의 방정식은

$$y = (3a^2 - 12a + 9)(x - a) + a^3 - 6a^2 + 9a - 3$$

이 접선이 점 $(0, k)$ 를 지나므로

$$\begin{aligned}k &= (3a^2 - 12a + 9) \times (-a) + a^3 - 6a^2 + 9a - 3 \\ &= -2a^3 + 6a^2 - 3\end{aligned}$$

이때 함수 $f(k)$ 는 a 에 대한 방정식 $-2a^3 + 6a^2 - 3 = k$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$h(a) = -2a^3 + 6a^2 - 3$ 이라 하면

$$h'(a) = -6a^2 + 12a = -6a(a-2)$$

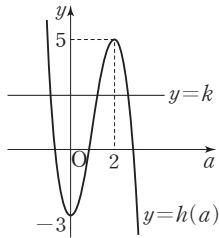
$h'(a) = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 2$

함수 $h(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	...	0	...	2	...
$h'(a)$	-	0	+	0	-
$h(a)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$

$$h(0) = -3, h(2) = -16 + 24 - 3 = 5$$

함수 $h(a) = -2a^3 + 6a^2 - 3$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 $f(k)$ 이다.



$$f(k) = \begin{cases} 1 & (k < -3 \text{ 또는 } k > 5) \\ 2 & (k = -3 \text{ 또는 } k = 5) \\ 3 & (-3 < k < 5) \end{cases}$$

그러므로 함수 $f(k)$ 는 $k = -3$ 과 $k = 5$ 일 때 불연속이다.

$$\text{따라서 } p+q = -3+5=2$$

답 2

33

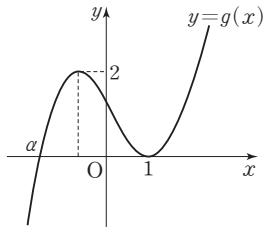
조건 (가)에서

$$f(x) - (2x+1) = (x-1)^2(x-a) \quad (a \text{는 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 방정식 $f(x) - 2x = 3$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(x) - (2x+1) = 2$ 에서 삼차함수 $y=f(x) - (2x+1)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g(x) = f(x) - (2x+1)$ 이라 하면 함수 $y=g(x)$ 는 2를 극값으로 갖는다.

①에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=1$ 에서 x 축에 접하므로 극솟값은 $x=1$ 일 때 0이고, 극댓값이 2, $a < 1$ 이다.



$$g(x) = (x-1)^2(x-a) = (x^2-2x+1)(x-a)$$

$$g'(x) = (2x-2)(x-a) + (x-1)^2 = (x-1)(2x-2a+x-1) = (x-1)(3x-2a-1)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x = \frac{2a+1}{3}$$

$$\text{이때 } \frac{2a+1}{3} < 1 \text{이고, } g\left(\frac{2a+1}{3}\right) = 2 \text{이다.}$$

$$g\left(\frac{2a+1}{3}\right) = \left(\frac{2a+1}{3} - 1\right)^2 \left(\frac{2a+1}{3} - a\right) = \left(\frac{2a-2}{3}\right)^2 \left(\frac{-a+1}{3}\right) = 2$$

$$-\frac{4}{27}(a-1)^3 = 2 \text{에서 } (a-1)^3 = -\frac{27}{2}$$

$$g(x) = f(x) - (2x+1) \text{에서}$$

$$f(0) = g(0) + 1 = -a + 1$$

$$\text{따라서 } \{f(0)\}^3 = (-a+1)^3 = -(a-1)^3 = \frac{27}{2}$$

답 4

34

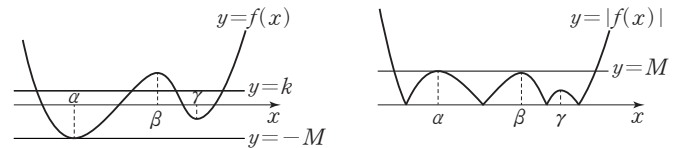
사차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값을 가지므로 방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)를 갖는다. 이때 함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 극소, $x=\beta$ 에서 극대, $x=\gamma$ 에서 극소이다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-k$ 는 서로 다른 세 점에서 만나므로 $-k$ 는 함수 $f(x)$ 의 극값이다.

조건 (나)에서 $k > 0$ 이므로 $-k < 0$ 이고, 조건 (다)에서 $M \geq 0$ 이므로 $-k \neq M$ 이다. 그러므로 $-k$ 는 함수 $f(x)$ 의 두 극솟값 중 큰 값과 같다. 이때 조건 (나)를 만족시키려면 $M > k$ 이어야 한다.

또한 조건 (다)를 만족시키려면 두 극솟값 중 작은 값은 $-M$ 이어야 한다.

$f(\alpha) = -M, f(\beta) = M, f(\gamma) = -k$ 인 경우 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $M > k > 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 는 서로 다른 4개의 점에서 만난다. 그러므로 방정식 $f(x) - k = 0$ 은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $-M$ 은 함수 $f(x)$ 의 두 극솟값 중 작은 값이므로 방정식

$f(x) = -M$, 즉 $f(x) + M = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. $2M > M > 0$ 이므로 방정식 $|f(x)| = 2M$ 은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 3

35

ㄱ. $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a = 3(x-1)^2 + a - 3$$

이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 경우 함수 $f(x)$ 는 증가하는 함수로 방정식 $|f(x) - f(1)| = f(7) - f(1)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha < \beta$)를 가지며 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $x=\alpha$ 에서 극댓값 $f(\alpha)$, $x=\beta$ 에서 극솟값 $f(\beta)$ 를 갖는다. 한편 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-f(1)$ 만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)$ 와 마찬가지로 $x=\alpha$ 에서 극댓값 $g(\alpha)$, $x=\beta$ 에서 극솟값 $g(\beta)$ 를 갖는다.

또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2 \text{이므로 } 1 - \alpha = \beta - 1 \text{이다.}$$

$$M = g(\alpha) = f(\alpha) - f(1)$$

$$= (\alpha^3 - 3\alpha^2 + a\alpha) - (1 - 3 + a)$$

$$= (\alpha^3 - 1) - 3(\alpha^2 - 1) + a(\alpha - 1)$$

$$= (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1 - 3\alpha - 3 + a)$$

$$= (\alpha - 1)(\alpha^2 - 2\alpha - 2 + a)$$

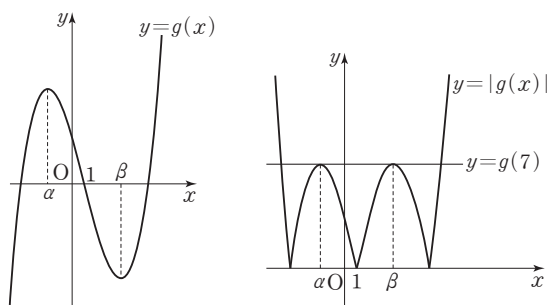
$$\begin{aligned}
 m &= g(\beta) = f(\beta) - f(1) \\
 &= (\beta - 1)(\beta^2 - 2\beta - 2 + a) \\
 &= (\beta - 1)\{(\beta - 1)^2 + a - 3\} \\
 &= (1 - a)\{(1 - a)^2 + a - 3\} \\
 &= -(a - 1)(a^2 - 2a - 2 + a)
 \end{aligned}$$

$m = -M$ 이므로

$$M + m = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $g(1) = 0$ 이고,

ㄷ에서 $|g(\alpha)| = |g(\beta)|$, $1 - a = \beta - 1$ 이다.



방정식 $|g(x)| = g(7)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로
두 함수 $y = |g(x)|$, $y = g(7)$ 의 그래프는 $x = \alpha$, $x = \beta$ 에서 접한다.
함수 $g(x)$ 의 치역은 실수 전체의 집합이고

$$g(k) < 0 \text{ 일 때 } h(k) = 0$$

$$g(k) = 0 \text{ 일 때 } h(k) = 3$$

$$0 < g(k) < g(7) \text{ 일 때 } h(k) = 6$$

$$g(k) = g(7) \text{ 일 때 } h(k) = 4$$

$$g(k) > g(7) \text{ 일 때 } h(k) = 2$$

그러므로 $\{h(k) | k \text{는 실수}\} = \{0, 2, 3, 4, 6\}$ 으로 원소의 개수는 5이다. (참)

ㄷ. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(7)$ 은 $x = \alpha$ 에서 접하고,
 $x = 7$ 에서 만나므로

$$\begin{aligned}
 g(x) - g(7) &= (x - \alpha)^2(x - 7) \\
 &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x - 7)
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = 2(x - \alpha)(x - 7) + (x - \alpha)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g'(\beta) = 2(\beta - \alpha)(\beta - 7) + (\beta - \alpha)^2 = 0$$

$$(\beta - \alpha)(3\beta - \alpha - 14) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \text{ 이고, } \alpha + \beta = 2 \text{ 이므로}$$

$$\alpha - 3\beta = -14$$

$$\alpha - 3(2 - \alpha) = -14$$

$$4\alpha = -8$$

$$\alpha = -2$$

이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2(x + 2)(x - 7) + (x + 2)^2 \\
 &= 3x^2 - 6x - 24
 \end{aligned}$$

이므로

$$g'(0) = -24 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x + 2)(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

$$f(1) = 2 + 3 - 12 + a = a - 7$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 극소이면서 최소이므로 $f(1) > 0$ 이면 조건을 만족시킨다.

$$\text{즉, } a - 7 > 0 \text{ 에서 } a > 7$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 8이다.

답 ②

37

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 를 만족시키므로

$$f(x) - g(x) \geq 0$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= (x^4 - 3x^3 + a) - (x^3 - 8x^2 + 16x + b) \\
 &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + a - b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 16x - 16 \\
 &= 4(x - 2)(x^2 - x + 2)
 \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	극소	↗

$$\begin{aligned}
 h(2) &= 16 - 32 + 32 - 32 + a - b \\
 &= a - b - 16
 \end{aligned}$$

함수 $h(x)$ 는 $x = 2$ 일 때 극소이면서 최소이므로 $h(2) \geq 0$ 이면 조건을 만족시킨다.

$$\text{즉, } a - b - 16 \geq 0$$

$$a - b \geq 16$$

따라서 $a - b$ 의 최솟값은 16이다.

답 ⑤

38

$$f(x) = (x - 1)^3(x - 3) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x - 3) \text{에서}$$

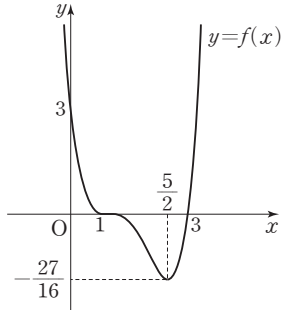
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (3x^2 - 6x + 3)(x - 3) + (x - 1)^3 \\
 &= 3(x - 1)^2(x - 3) + (x - 1)^3 \\
 &= (x - 1)^2(3x - 9 + x - 1) \\
 &= (x - 1)^2(4x - 10)
 \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	$\frac{5}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	극소	$\nearrow$



방정식 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=0$ 의 서로 다른 실근은 방정식

$g(x)=1$ 또는 $g(x)=3$ 의 서로 다른 실근이다.

방정식 $(f \circ g)(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(m)$ 이라 하면

$m < 1$ 일 때 $h(m)=4$

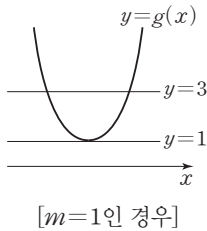
$m=1$ 일 때 $h(m)=3$

$1 < m < 3$ 일 때 $h(m)=2$

$m=3$ 일 때 $h(m)=1$

$m > 3$ 일 때 $h(m)=0$

이므로 조건 (가)에서 $m=1$



조건 (나)에서 $(f \circ g)(x) \geq (f \circ g)(2)$ 이고 $g(x) \geq 1$

이므로 함수 $y=(f \circ g)(x)=f(g(x))$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값을 갖고,

함수 $y=f(x)$ 는 $x=\frac{5}{2}$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$g(2)=\frac{5}{2}$$

$$g(2)=(2-k)^2+1=\frac{5}{2}$$

$$(2-k)^2=\frac{3}{2}$$

$$2-k=\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ 또는 } 2-k=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$k=2-\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ 또는 } k=2+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

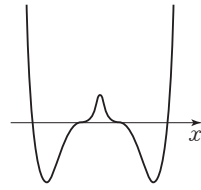
$$\left(2-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(2+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

답 ③

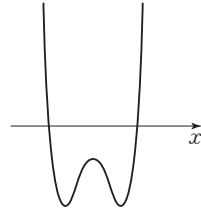
참고

함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

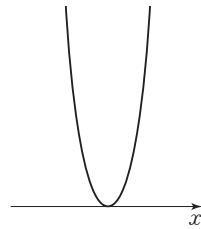
$m < 1$ 일 때



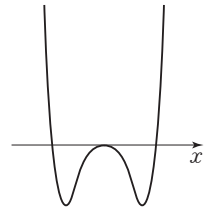
$1 < m < \frac{5}{2}$ 일 때



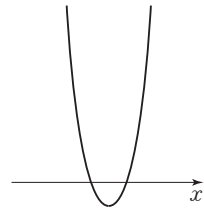
$m=3$ 일 때



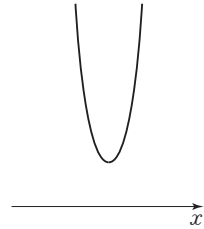
$m=1$ 일 때



$\frac{5}{2} \leq m < 3$ 일 때



$m > 3$ 일 때



39

$x=t^3-at^2+3$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v=3t^2-2at$$

시각 $t=1$ 일 때 점 P의 속도가 2이므로

$$3-2a=2 \text{에서 } a=\frac{1}{2}$$

$$v=3t^2-t$$

그러므로 시각 $t=2$ 에서의 속도는

$$12-2=10$$

답 ①

40

$x=t^3-4t^2-3t+1$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v=3t^2-8t-3$$

$$3t^2-8t-3=0 \text{에서 } (3t+1)(t-3)=0$$

$$t \geq 0 \text{이므로 } t=3$$

$0 < t < 3$ 일 때 $v < 0$ 이고, $t > 3$ 일 때 $v > 0$ 이므로

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=3$ 일 때이다.

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a=6t-8$$

따라서 구하는 가속도는

$$18-8=10$$

답 ⑤

41

두 점 P, Q가 만나는 시각은 $x_1 = x_2$ 에서

$$3t^3 - 3t^2 + 7t = 2t^3 + 4t^2 - 3t$$

$$t^3 - 7t^2 + 10t = 0$$

$$t(t-2)(t-5) = 0$$

$$t=0 \text{ 또는 } t=2 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 처음으로 만나는 순간은 $t=2$ 일 때이다.

$x_1 = 3t^3 - 3t^2 + 7t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v_1 이라 하면

$$v_1 = 9t^2 - 6t + 7$$

$x_2 = 2t^3 + 4t^2 - 3t$ 이므로 시각 t 에서의 점 Q의 속도를 v_2 라 하면

$$v_2 = 6t^2 + 8t - 3$$

$t=2$ 일 때의 점 P의 속도는

$$36 - 12 + 7 = 31$$

$t=2$ 일 때의 점 Q의 속도는

$$24 + 16 - 3 = 37$$

따라서 두 점 P, Q의 속도의 차는

$$37 - 31 = 6$$

답 6

06

다항함수의 적분법

정답

본문 76~85쪽

01 ②	02 ③	03 ②	04 ④	05 95
06 32	07 108	08 ③	09 ③	10 ①
11 ①	12 ④	13 ③	14 ②	15 ①
16 ④	17 ④	18 ④	19 ④	20 ②
21 ⑤	22 ③	23 ④	24 6	25 37
26 5	27 ②	28 426	29 ②	30 ③
31 127				

01

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x^3 + 2x^2 + 1)dx - \int (x^3 - x^2)dx \\ &= \int \{(x^3 + 2x^2 + 1) - (x^3 - x^2)\}dx \\ &= \int (3x^2 + 1)dx \\ &= x^3 + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = x^3 + x + 1$ 이므로

$$f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

답 ②

02

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(1) = 6 + 2 = 8$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 8(x - 1) + f(1)$$

이 직선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = 8 \times (-1) + f(1)$$

$$f(1) = 6$$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$= \int (6x^2 + 2x)dx$$

$$= 2x^3 + x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$f(1) = 6 \text{이므로 } C = 3$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3$ 이므로

$$f(2) = 16 + 4 + 3 = 23$$

답 ③

03

$g(x) = (x^2 - 4)f(x)$ 라 하면 곱의 미분법에 의하여

$$g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 4)f'(x)$$

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



고난도 · 신유형
수능연계완성 3/4주 특강

1등급을 향한 고난도 문항집
신유형과 킬러 문항 완벽 대비

$$\begin{aligned}
& \int \{2xf(x) + (x^2-4)f'(x)\} dx \\
&= \int g'(x) dx \\
&= g(x) + C \\
&= (x^2-4)f(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
&\text{이므로} \\
&(x^2-4)f(x) + C = x^4 - 2x^3 + 8x - 10 \\
&\text{위의 식의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면} \\
&C = 6 \\
&(x^2-4)f(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16 \\
&\text{위의 식의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\
&-3f(1) = 1 - 2 + 8 - 16 \\
&\text{따라서 } f(1) = 3
\end{aligned}$$

㉔ ②

04

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx \\
&= \int_0^2 (3x^2 + 12x - 4) dx \\
&= \left[x^3 + 6x^2 - 4x \right]_0^2 \\
&= 8 + 24 - 8 \\
&= 24
\end{aligned}$$

㉔ ④

05

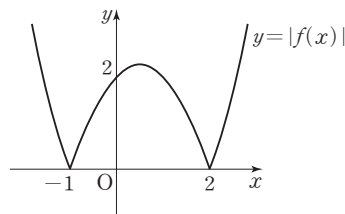
$$\begin{aligned}
&-1 \leq x < 0 \text{일 때} \\
&f(x) = (x+1) - 2x = -x + 1 \\
&x \geq 0 \text{일 때} \\
&f(x) = (x+1) + 2x = 3x + 1 \\
&\text{이므로} \\
&\int_{-1}^3 xf(x) dx = \int_{-1}^0 xf(x) dx + \int_0^3 xf(x) dx \\
&= \int_{-1}^0 x(-x+1) dx + \int_0^3 x(3x+1) dx \\
&= \int_{-1}^0 (-x^2+x) dx + \int_0^3 (3x^2+x) dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 \\
&= -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(27 + \frac{9}{2}\right) \\
&= \frac{92}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{따라서 } p=3, q=92 \text{이므로} \\
&p+q=3+92=95
\end{aligned}$$

㉔ 95

06

$$\begin{aligned}
&f(x) = (x+1)(x-2) \text{에서} \\
&|f(x)| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + x + 2 & (-1 < x < 2) \end{cases}
\end{aligned}$$



$$-1 \leq a \leq 0 \text{이므로 } 2 \leq a+3 \leq 3$$

따라서

$$\begin{aligned}
g(a) &= \int_a^{a+3} |f(x)| dx \\
&= \int_a^2 (-x^2 + x + 2) dx + \int_2^{a+3} (x^2 - x - 2) dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_a^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^{a+3} \\
&= \frac{10}{3} + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 - 2a + \frac{1}{3}(a+3)^3 \\
&\quad - \frac{1}{2}(a+3)^2 - 2(a+3) + \frac{10}{3} \\
&= \frac{2}{3}a^3 + 2a^2 + 2a + \frac{31}{6}
\end{aligned}$$

$$g'(a) = 2a^2 + 4a + 2 = 2(a+1)^2 \geq 0$$

함수 $g(a)$ 는 증가하는 함수이므로 $-1 \leq a \leq 0$ 에서 함수 $g(a)$ 는 최솟값 $g(-1)$, 최댓값 $g(0)$ 을 갖는다.

$$g(-1) = \frac{9}{2}, g(0) = \frac{31}{6} \text{이므로 최댓값과 최솟값의 합은}$$

$$\frac{31}{6} + \frac{9}{2} = \frac{31+27}{6} = \frac{29}{3}$$

따라서 $p=3, q=29$ 이므로

$$p+q=3+29=32$$

㉔ 32

07

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^3 (4x^3 + 6x^2 + 7x) dx &= 2 \int_0^3 6x^2 dx \\
&= 2 \left[2x^3 \right]_0^3 \\
&= 2(54 - 0) \\
&= 108
\end{aligned}$$

㉔ 108

08

조건 (가)에서 $f(x) = ax^3 + bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)

조건 (나)에서 $f(1) = 6$ 이므로

$$a+b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

조건 (가), (다)에서

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 f'(x) dx &= \left[f(x) \right]_{-2}^2 \\
&= f(2) - f(-2) \\
&= 2f(2) = 12
\end{aligned}$$

$f(2) = 6$ 이므로

$$8a+2b=6$$

$$4a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 7$$

따라서 $f(x) = -x^3 + 7x$ 이므로

$$f(3) = -27 + 21 = -6$$

답 ③

09

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이므로}$$

조건 (가)에서

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2(3x^2 + 2ax + b) dx &= \int_{-1}^1 (3x^4 + 2ax^3 + bx^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (3x^4 + bx^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}bx^3 \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}b \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } b = -\frac{9}{5}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$a = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{9}{5} \\ &= \frac{3}{5}(5x^2 - 2x - 3) \\ &= \frac{3}{5}(x-1)(5x+3) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x = -\frac{3}{5}$$

따라서 $x = -\frac{3}{5}$ 일 때 극댓값을 갖는다.

$$\text{즉, } a = -\frac{3}{5} \text{이다.}$$

답 ③

다른 풀이

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 3이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 일 때 극대이고 $x=1$ 일 때 극소이므로

$f'(x) = 3(x-1)(x-a)$ ($a < 1$)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 f'(x) dx &= 3 \int_{-1}^1 x^2(x-1)(x-a) dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 \{x^4 - (a+1)x^3 + ax^2\} dx \\ &= 6 \int_0^1 (x^4 + ax^2) dx \\ &= 6 \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= 6 \left(\frac{1}{5} + \frac{a}{3} \right) = 0 \end{aligned}$$

따라서 $a = -\frac{3}{5}$ 이다.

10

$$f(x) = \int_0^x (3t^2 + 5t - 2) dt$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	$\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 $f(-2)$ 를 갖는다.

$$\begin{aligned} f(-2) &= \int_0^{-2} (3t^2 + 5t - 2) dt \\ &= \left[t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 2t \right]_0^{-2} \\ &= -8 + 10 + 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

답 ①

11

$$\int_1^x (t^3 - 2t) dt = 2x^3 + x - f(x) \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$\int_1^1 (t^3 - 2t) dt = 2 + 1 - f(1)$$

$$0 = 2 + 1 - f(1)$$

$$\text{이므로 } f(1) = 3$$

$$\int_1^x (t^3 - 2t) dt = 2x^3 + x - f(x) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$x^3 - 2x = 6x^2 + 1 - f'(x)$$

$$f'(x) = -x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

$$\text{에서 } f'(1) = -1 + 6 + 2 + 1 = 8$$

$$\text{따라서 } f(1) + f'(1) = 3 + 8 = 11$$

답 ①

12

조건 (가)의

$$\int_0^x f(t) dt = g(x)(x-1) + a(x^2-1) + b \quad \dots\dots ㉠$$

에서 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = -g(0) - a + b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_0^1 f(t) dt = b \quad \dots\dots ㉢$$

조건 (나)에 ㉢을 대입하면 $g(x) = x^2 - bx$

$$g(0) = 0 \text{이므로 ㉡에서}$$

$$a = b \quad \dots\dots ㉣$$

㉢에 ㉣을 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= g(x)(x-1) + a(x^2-1) + a \\ &= g(x)(x-1) + ax^2 \\ &= (x^2 - ax)(x-1) + ax^2 \\ &= x^3 - x^2 + ax \end{aligned}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 2x + a$$

$$= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + a - \frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 1이므로

$$a - \frac{1}{3} = 1$$

$$a = \frac{4}{3}$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 2x + \frac{4}{3}$, $g(x) = x^2 - \frac{4}{3}x$ 이므로

$$f(1) + g(-1) = \left(3 - 2 + \frac{4}{3}\right) + \left(1 + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{14}{3}$$

답 ④

13

$f(t) = 3t^2 + at - 4a$, $F'(t) = f(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (3t^2 + at - 4a) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

$$= F'(0) = f(0)$$

$$= -4a = 12$$

에서 $a = -3$

답 ③

14

$\int_{-1}^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)라 하면

$$f(x) = 4x^3 + 2x + k$$

$$\int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^2 (4t^3 + 2t + k) dt$$

$$= \left[t^4 + t^2 + kt \right]_{-1}^2$$

$$= (16 + 4 + 2k) - (1 + 1 - k)$$

$$= 18 + 3k = k$$

에서 $k = -9$

$$f(x) = 4x^3 + 2x - 9$$

$F'(t) = f(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a}$$

$$= F'(a) = f(a)$$

$$f(a) = 4a^3 + 2a - 9 = -15 \text{에서}$$

$$4a^3 + 2a + 6 = 0$$

$$2a^3 + a + 3 = 0$$

$$(a+1)(2a^2 - 2a + 3) = 0$$

$$\text{이때 } 2a^2 - 2a + 3 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > 0$$

따라서 $a = -1$

답 ②

15

$$xf(x) = 2x^3 - 3x^2 \int_0^1 f'(t) dt + \int_1^x f(t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 6x^2 - 6x \int_0^1 f'(t) dt + f(x)$$

$$f'(x) = 6x - 6 \int_0^1 f'(t) dt$$

이때 $\int_0^1 f'(t) dt = k$ (k 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 6x - 6k$$

$$\int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 (6t - 6k) dt$$

$$= \left[3t^2 - 6kt \right]_0^1$$

$$= 3 - 6k$$

$$3 - 6k = k \text{에서 } k = \frac{3}{7}$$

⑦의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 - 3 \int_0^1 f'(t) dt + \int_1^1 f(t) dt$$

$$= 2 - 3 \times \frac{3}{7} + 0$$

$$= 2 - \frac{9}{7} = \frac{5}{7}$$

$$f'(x) = 6x - \frac{18}{7} \text{에서}$$

$$f(x) = \int \left(6x - \frac{18}{7} \right) dx = 3x^2 - \frac{18}{7}x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(1) = \frac{5}{7} \text{에서}$$

$$f(1) = 3 - \frac{18}{7} + C = \frac{5}{7}$$

$$C = \frac{2}{7}$$

$$\text{이므로 } f(x) = 3x^2 - \frac{18}{7}x + \frac{2}{7} \text{이다.}$$

$F'(t) = f(t)$ 라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-1}^{-1+7h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-1+7h) - F(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(-1+7h) - F(-1)}{7h} \times 7 \right\}$$

$$= 7F'(-1)$$

$$= 7f(-1)$$

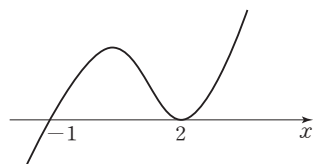
$$= 7\left(3 + \frac{18}{7} + \frac{2}{7} \right)$$

$$= 41$$

답 ①

16

함수 $y = (x+1)(x-2)^2$ 의 그래프는 다음과 같다.



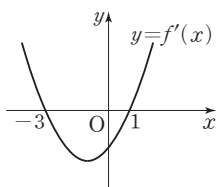
그러므로 곡선 $y=(x+1)(x-2)^2$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)^2 dx &= \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 \\ &= (4 - 8 + 8) - \left(\frac{1}{4} + 1 - 4 \right) \\ &= \frac{27}{4}\end{aligned}$$

답 ④

17

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=-3$, $x=1$ 에서 극값을 가지므로 $f'(-3)=0$, $f'(1)=0$ 이다.



$f'(x)=a(x+3)(x-1)$ ($a>0$)이라 하자.

곡선 $y=f'(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}-\int_{-3}^1 a(x+3)(x-1) dx &= -a \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx \\ &= -a \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_{-3}^1 \\ &= -\frac{32}{3}a = 24\end{aligned}$$

에서 $a=\frac{9}{4}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{9}{4}(x+3)(x-1) \\ &= \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{27}{4}\end{aligned}$$

이므로

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{4}x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

따라서 x 의 계수는 $-\frac{27}{4}$ 이다.

답 ④

18

$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$ 라 하면

$f'(x)=x^3-x=x(x+1)(x-1)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

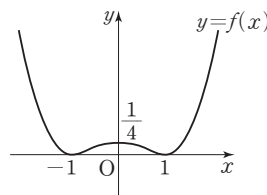
x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}+k$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$-\frac{1}{4}+k$	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대, $x=-1$ 과 $x=1$ 에서 극소이므로 곡선

$y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$ 가 x 축과 서로 다른 두 점에서 접하려면

$$-\frac{1}{4}+k=0, \text{ 즉 } k=\frac{1}{4} \text{ 이어야 한다.}$$

그러므로 $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}$ 이고 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}2 \int_0^1 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) dx &= 2 \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{4}{15}\end{aligned}$$

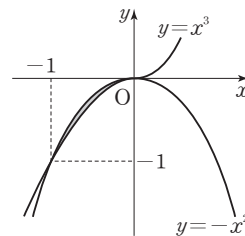
답 ④

19

$x^3=-x^2$ 에서

$x^3+x^2=0$, $x^2(x+1)=0$ 이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$



$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3 \geq -x^2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \{x^3 - (-x^2)\} dx &= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

답 ④

20

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면

$$f(x)-3=3(x-1)(x-3)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 -\int_1^3 \{f(x)-3\} dx &= -\int_1^3 3(x-1)(x-3) dx \\
 &= -3 \int_1^3 (x^2-4x+3) dx \\
 &= -3 \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \\
 &= -3 \left\{ (9-18+9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right\} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

답 ②

21

$$x(x+1)(x-3) = -x(x-3) \text{에서}$$

$$x(x+1)(x-3) + x(x-3) = 0$$

$$x(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

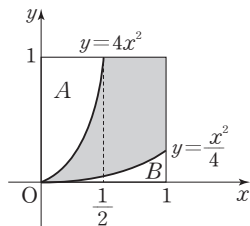
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 &\int_{-2}^0 x(x-3)(x+2) dx + \int_0^3 \{-x(x-3)(x+2)\} dx \\
 &= \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx + \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x) dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 \\
 &= -\left(4 + \frac{8}{3} - 12 \right) + \left(-\frac{81}{4} + 9 + 27 \right) \\
 &= \frac{253}{12}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

22

그림과 같이 색칠한 부분을 제외한 부분의 넓이를 각각 A, B라 하면



곡선 $y=4x^2$ 과 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 x 좌표는

$$4x^2=1 \text{에서 } x=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2) dx \\
 &= \left[x - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{12}$$

$$A+B = \frac{5}{12} \text{이므로 구하는 넓이는}$$

$$1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

답 ③

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{1}{2}} \left(4x^2 - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\
 &= \left[\frac{5}{4}x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[x - \frac{x^3}{12} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \frac{5}{32} + \left(1 - \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{96} \right) \\
 &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

23

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = (3x-5)(x-1) = 0 \text{에서}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	$\frac{5}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대, $x=\frac{5}{3}$ 에서 극소이다.

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 4x^2 + 5x = x \text{에서}$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0, x(x-2)^2 = 0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $f(0)=0$, $f(2)=2$ 이고 $x=2$ 에서 중근을 가지므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 는 $x=2$ 에서 접한다. ㉠

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x+9$ 가 만나는 점을 P라 하면

점 P의 x 좌표는

$$x^3 - 4x^2 + 5x = -x + 9 \text{에서}$$

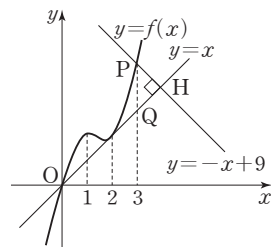
$$x^3 - 4x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$(x-3)(x^2-x+3) = 0$$

$$x=3 \text{이므로 } P(3, 6) \quad \dots\dots ㉡$$

두 직선 $x=3$ 과 $y=x$ 가 만나는 점을 Q, 두 직선 $y=x$ 와 $y=-x+9$

가 만나는 점을 H라 하자.



직각삼각형 PQH에서

점 Q(3, 3)과 직선 $y=-x+9$ 사이의 거리는

$$\overline{QH} = \frac{|3+3-9|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

이고 $\overline{PQ}=6-3=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{PH} &= \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QH}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

직각삼각형 PQH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 곡선 A로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 곡선 A 및 직선 $y=-x+9$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$, 직선 $y=-x+9$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$$S_1 = 2 \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 5x - x) dx \text{이고}$$

$$S_2 = 2 \int_2^3 (x^3 - 4x^2 + 5x - x) dx + 2 \times \frac{9}{4} \text{이다.}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}S_1 + S_2 &= 2 \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 5x - x) dx + 2 \int_2^3 (x^3 - 4x^2 + 5x - x) dx + 2 \times \frac{9}{4} \\ &= 2 \int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 5x - x) dx + 2 \times \frac{9}{4} \\ &= 2 \int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx + \frac{9}{2} \\ &= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^3 + \frac{9}{2} \\ &= 2 \times \left(\frac{81}{4} - 36 + 18 \right) + \frac{9}{2} \\ &= 9\end{aligned}$$

집고

직각삼각형 PQH에서

$$\overline{PQ}=3, \angle PQH = \angle HPQ = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{QH} = \overline{PH} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

따라서 직각삼각형 PQH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{4}$$

24

조건 (가)에서 A, B, C의 공차를 d라 하면 $A=B-d$, $C=B+d$ 로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_a^c |f(x)| dx &= A+B+C \\ &= (B-d)+B+(B+d) \\ &= 3B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx &= A-B+C \\ &= (B-d)-B+(B+d) \\ &= B\end{aligned}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}3 \int_a^c |f(x)| dx - 4 \int_a^c f(x) dx &= 3 \times 3B - 4 \times B \\ &= 5B = 10\end{aligned}$$

에서 $B=2$

$$\int_a^c |f(x)| dx = 3B = 3 \times 2 = 6$$

답 6

25

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^a f(x) dx &= \int_{-1}^a (x+1)(x-1)(x-a) dx \\ &= \int_{-1}^a (x^3 - ax^2 - x + a) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{a}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + ax \right]_{-1}^a \\ &= \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{3} - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{3} - \frac{1}{2} - a \right) \\ &= -\frac{a^4}{12} + \frac{a^2}{2} + \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

이므로 $a^4 - 6a^2 - 8a + 24 = 0$, 즉

$$(a-2)^2(a^2+4a+6)=0, a=2$$

그러므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

함수 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &\quad - \left\{ \left(4 - \frac{16}{3} - 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right\} \\ &= \frac{37}{12}\end{aligned}$$

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+3)$ 이므로

$-1 \leq x \leq 5$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S = 2 \times \frac{37}{12} = \frac{37}{6}$$

$$\text{따라서 } 6S = 6 \times \frac{37}{6} = 37$$

답 37

26

조건 (가)에서 $f'(x)=3x^2+2(1-a)x-a=0$ 의 서로 다른 두 근의 부호가 다르므로 이차방정식 $3x^2+2(1-a)x-a=0$ 의 두 근의 곱이 음수이다. 즉,

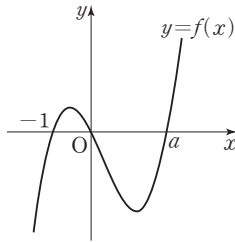
$$-a < 0, a > 0$$

곡선 $y=x^3+(1-a)x^2-ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^3 + (1-a)x^2 - ax = 0 \text{에서}$$

$$x(x+1)(x-a) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = a$$



조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분 중에서 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 넓이가 $\frac{11}{12}$ 이므로

$$\int_{-1}^0 \{x^3 + (1-a)x^2 - ax\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1-a}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-1}^0$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1-a}{3} + \frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{a}{6} = \frac{11}{12}$$

따라서 $a=5$

답 5

27

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 32 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, 27)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 12 = -9$$

이므로 접선의 방정식은 $y - 27 = -9(x - 1)$

$$y = -9x + 36$$

한편, 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ 의 그래프와 접선이 만나는 점의 x 좌표는

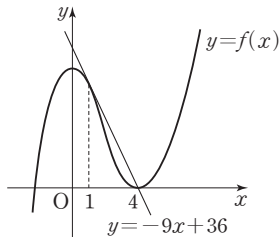
$$x^3 - 6x^2 + 32 = -9x + 36 \text{에서}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

$$(x-1)^2(x-4) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

그러므로 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ 의 그래프와 접선은 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$ 와 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^4 \{-9x + 36 - (x^3 - 6x^2 + 32)\} dx$$

$$= \int_1^4 (-x^3 + 6x^2 - 9x + 4) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x \right]_1^4$$

$$= \left(-64 + 128 - 72 + 16 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 2 - \frac{9}{2} + 4 \right)$$

$$= \frac{27}{4}$$

답 ②

28

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=2x^2-8x+3$ 이 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표는 $x^2-6x+3=0$ 의 두 근이다. 두 근이 α , β ($\alpha < \beta$)이므로

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 3$$

$$0 < \alpha < \beta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 6^2 - 2 \times 3 = 30$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = 6^2 - 4 \times 3 = 24 \text{에서}$$

$$\alpha < \beta \text{이므로 } \beta - \alpha = 2\sqrt{6}$$

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^2 + 6x$$

$$x > 0 \text{일 때 } f'(x) > 0 \text{이고 } f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$f(\alpha) > 0, f(\beta) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②에서 곡선 $y=4x^3+3x^2$ 과 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{\alpha}^{\beta} (4x^3 + 3x^2) dx$$

$$= \left[x^4 + x^3 \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= (\beta^4 + \beta^3) - (\alpha^4 + \alpha^3)$$

$$= (\beta^4 - \alpha^4) + (\beta^3 - \alpha^3)$$

$$= (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2) + (\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)$$

$$= (\beta - \alpha)\{(\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2) + (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)\}$$

$$= 2\sqrt{6}(6 \times 30 + 30 + 3)$$

$$= 426\sqrt{6}$$

따라서 $m=426$

답 426

29

$t=1$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는 $t=1$ 에서 $t=5$ 까지 속도 $v(t)$ 의 그래프와 t 축 및 두 직선 $t=1$, $t=5$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$1 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 7$$

답 ②

30

원점을 동시에 출발한 두 점 P, Q가 $t=a$ ($a > 0$)일 때 만난다고 하면

$$\int_0^a v_1(t) dt = \int_0^a v_2(t) dt \text{에서}$$

$$\int_0^a (t^2 - 2t + 9) dt = \int_0^a \left(2t + \frac{19}{3} \right) dt$$

$$\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t \right]_0^a = \left[t^2 + \frac{19}{3}t \right]_0^a$$

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 + 9a = a^2 + \frac{19}{3}a$$

$$\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3}a = 0$$

$$\frac{1}{3}a(a^2 - 6a + 8) = 0$$

$$\frac{1}{3}a(a-2)(a-4) = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_2^4 \left| 2t + \frac{19}{3} \right| dt &= \int_2^4 \left(2t + \frac{19}{3} \right) dt \\ &= \left[t^2 + \frac{19}{3}t \right]_2^4 \\ &= \left(16 + \frac{76}{3} \right) - \left(4 + \frac{38}{3} \right) \\ &= \frac{74}{3} \end{aligned}$$

③

31

시각 t ($t \geq 0$)에서의 두 점 A, B의 위치를 각각 $s_1(t)$, $s_2(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \int_0^t t(2-t)(4-t) dt \\ &= \int_0^t (t^3 - 6t^2 + 8t) dt \\ &= \frac{t^4}{4} - 2t^3 + 4t^2 \end{aligned}$$

$$s_2(t) = \int_0^t (a - 2t) dt = -t^2 + at$$

$s_1(t) = s_2(t)$ 에서

$$\frac{t^4}{4} - 2t^3 + 4t^2 = -t^2 + at$$

$$\frac{t^4}{4} - 2t^3 + 5t^2 = at$$

출발 후 두 점 A, B가 만나는 횟수는 $t > 0$ 일 때,

방정식 $\frac{t^3}{4} - 2t^2 + 5t = a$ 의 실근의 개수와 같으며 이는

함수 $f(t) = \frac{t^3}{4} - 2t^2 + 5t$ ($t \geq 0$)의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(t) = \frac{t^3}{4} - 2t^2 + 5t \text{에서}$$

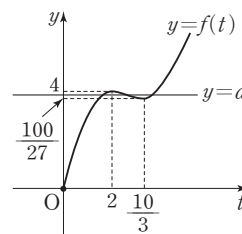
$$f'(t) = \frac{3}{4}t^2 - 4t + 5$$

$f'(t) = 0$ 에서

$$\frac{3}{4}t^2 - 4t + 5 = 0, \quad \frac{1}{4}(t-2)(3t-10) = 0$$

$$t=2 \text{ 또는 } t=\frac{10}{3}$$

$f(2)=4$, $f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{100}{27}$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 모든 a 의 값의 범위는

$$\frac{100}{27} < a < 4$$

따라서 $p=27$, $q=100$ 이므로

$$p+q=127$$

127



QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.

FINAL 실전모의고사

가장 많은 수험생이 선택한 최다 분량, 최다 문항
EBS 대표 FULL 모의고사 시리즈

정답

본문 88~97쪽

01 ②	02 ④	03 144	04 ③	05 ③
06 12	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 15	12 15	13 ④	14 21	15 ②
16 ②	17 ③	18 ②	19 ④	20 ④
21 ③	22 ③	23 ④	24 ③	25 12
26 45	27 ④			

01

모든 자연수 n 에 대하여 $b_n > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 4b_n}{a_n + 2b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \frac{a_n}{b_n} - 4}{\frac{a_n}{b_n} + 2} = \frac{3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} - 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} + 2} \\ &= \frac{3 \times 2 - 4}{2 + 2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

02

 $a_n + b_n = c_n$, $2a_n - b_n = d_n$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$ 이고 $a_n = \frac{c_n + d_n}{3}$, $b_n = \frac{2c_n - d_n}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n + d_n}{3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n}{3} = \frac{5 + 1}{3} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2c_n - d_n}{3} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n}{3} = \frac{2 \times 5 - 1}{3} = 3\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 + 2 \times 3 = 8$$

답 ④

03

 $a_n - \frac{1}{b_n} = x_n$, $a_n^2 + \frac{1}{b_n^2} = y_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{2}{3}$$

$$x_n^2 = \left(a_n - \frac{1}{b_n}\right)^2 = a_n^2 + \frac{1}{b_n^2} - 2 \times \frac{a_n}{b_n} = y_n - 2 \times \frac{a_n}{b_n}$$

이므로

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{y_n - x_n^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_n^2}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{24}\end{aligned}$$

따라서

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}} = \frac{1}{\frac{5}{24}} = \frac{24}{5}$$

이므로

$$30k = 30 \times \frac{24}{5} = 144$$

답 144

04

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n}{S_n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ③

05

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + an} - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + an} + n}{(\sqrt{n^2 + an} - n)(\sqrt{n^2 + an} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + an} + n}{(\sqrt{n^2 + an})^2 - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + an} + n}{an} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + 1}{a} \\ &= \frac{2}{a} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

답 ③

06

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{pn^2 + 6a_n} - 4n)}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{pn^2 + 6a_n} - 4n)(\sqrt{pn^2 + 6a_n} + 4n)}{a_n(\sqrt{pn^2 + 6a_n} + 4n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\{(p-16)n^2 + 6a_n\}}{a_n(\sqrt{pn^2 + 6a_n} + 4n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p-16)n + 6 \times \frac{a_n}{n}}{\frac{a_n}{n}(\sqrt{p + 6 \times \frac{a_n}{n^2}} + 4)} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

⑦이 수렴하므로 $p - 16 = 0$ 에서 $p = 16$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times \frac{a_n}{n}}{\frac{a_n}{n} \left(\sqrt{16 + 6 \times \frac{a_n}{n} + 4} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{16 + 6 \times \frac{a_n}{n} + 4}}$$

$$= \frac{6}{4+4} = \frac{3}{4}$$

따라서 $pq = 16 \times \frac{3}{4} = 12$

답 12

07

$\frac{2}{2n+1} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 에서 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{2}{2n+1} > 0$

이므로

$$\sqrt{n(n+1)} < \frac{1}{a_n} < \frac{2n+1}{2}$$

$$\sqrt{n(n+1)} - n < \frac{1}{a_n} - n < \frac{1}{2}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n(n+1)} - n \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - na_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} - n \right) = \frac{1}{2}$$

답 ①

08

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$$

$$S_n = \frac{n\{1 + (2n-1)\}}{2} = n^2$$

이므로 $S_{n+1} < b_n < S_{n+2} - a_n$ 에서

$$(n+1)^2 < b_n < (n+2)^2 - (2n-1)$$

$$n^2 + 2n + 1 < b_n < n^2 + 2n + 5$$

$$2n+1 < b_n - n^2 < 2n+5$$

$$\frac{2n+1}{3n+1} < \frac{b_n - n^2}{3n+1} < \frac{2n+5}{3n+1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n+1} = \frac{2}{3}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계

에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - n^2}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

답 ④

09

$$2n^2 + n < n^2 a_n + n b_n < 2n^2 + n + 1$$

..... ㉠

$$2n^2 - 3n < n^2 a_n - n b_n < 2n^2 - 3n + 1$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서

$$4n^2 - 2n < 2n^2 a_n < 4n^2 - 2n + 2$$

$$\frac{2n^2 - n}{n^2} < a_n < \frac{2n^2 - n + 1}{n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 1}{n^2} = 2$ 이므로 수열의 극한의 대소

관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

㉡에서

$$-(2n^2 - 3n + 1) < -n^2 a_n + n b_n < -(2n^2 - 3n) \quad \dots\dots ㉢$$

이므로 ㉠, ㉢에서

$$4n - 1 < 2n b_n < 4n + 1$$

$$\frac{4n-1}{2n} < b_n < \frac{4n+1}{2n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n} = 2$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계

에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 + 2 = 4$

답 ⑤

10

$$a_n = 4 \times 3^{n-1} \text{이므로}$$

$$a_{2n} = 4 \times 3^{2n-1} = \frac{4}{3} \times 9^n$$

$$a_{n+1}^2 = (4 \times 3^n)^2 = 16 \times 9^n$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n-1} + a_{n+1}^2}{a_{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \times 9^n + 16 \times 9^n}{\frac{4}{3} \times 9^n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + 16}{\frac{4}{3} + \left(\frac{1}{9}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{49}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{49}{4}$$

답 ③

11

모든 자연수 n 에 대하여 $3^{2n} > 0$ 이므로

$$a_n = \frac{(-x^2 + 5x + 5)^n}{3^{2n}} = \left(\frac{-x^2 + 5x + 5}{9} \right)^n$$

실수 x 에 대하여 등식 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 가 성립하도록 하려면

$$-1 < \frac{-x^2 + 5x + 5}{9} \leq 1 \text{이어야 한다. 즉,}$$

$$-9 < -x^2 + 5x + 5 \leq 9$$

(i) $-9 < -x^2 + 5x + 5$ 에서

$$x^2 - 5x - 14 < 0, (x+2)(x-7) < 0$$

$$-2 < x < 7 \quad \dots\dots ㉠$$

(ii) $-x^2+5x+5 \leq 9$ 에서

$$x^2-5x+4 \geq 0, (x-1)(x-4) \geq 0$$

$$x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-2 < x \leq 1 \text{ 또는 } 4 \leq x < 7$$

따라서 구하는 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1, 4, 5, 6$ 이고 그 합은

$$-1+0+1+4+5+6=15$$

답 15

12

(i) $\{f(x)\}^2 < 1$ 일 때, 즉 $-1 < \frac{x-1}{3} < 1, -2 < x < 4$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\{f(x)\}^2]^n = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{2n+1} + 3f(x) + 1}{\{f(x)\}^{2n} + 1} \\ = 3f(x) + 1 = x$$

(ii) $\{f(x)\}^2 = 1$ 일 때, 즉 $x = -2$ 또는 $x = 4$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n} = 1 \text{이고}$$

$$f(-2) = -1, f(4) = 1 \text{이므로}$$

$$g(-2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(-2)\}^{2n+1} + 3f(-2) + 1}{\{f(-2)\}^{2n} + 1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1} + 3 \times (-1) + 1}{(-1)^{2n} + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$g(4) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(4)\}^{2n+1} + 3f(4) + 1}{\{f(4)\}^{2n} + 1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1} + 3 \times 1 + 1}{1^{2n} + 1} = \frac{5}{2}$$

(iii) $\{f(x)\}^2 > 1$ 일 때, 즉 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\{f(x)\}^{2n}} = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{2n+1} + 3f(x) + 1}{\{f(x)\}^{2n} + 1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 3\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}^{2n-1} + \left\{\frac{1}{f(x)}\right\}^{2n}}{1 + \left\{\frac{1}{f(x)}\right\}^{2n}} \\ = f(x) = \frac{x-1}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & (x < -2 \text{ 또는 } x > 4) \\ -\frac{3}{2} & (x = -2) \\ \frac{5}{2} & (x = 4) \\ x & (-2 < x < 4) \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{5}{2} \text{에서}$$

$x < -2$ 또는 $x > 4$ 일 때

$$\frac{x-1}{3} = \frac{5}{2}, x = \frac{17}{2}$$

$$g(4) = \frac{5}{2} \text{에서 } x = 4$$

$-2 < x < 4$ 일 때

$$x = \frac{5}{2}$$

따라서 방정식 $g(x) = \frac{5}{2}$ 의 모든 실근의 합은

$$\frac{17}{2} + 4 + \frac{5}{2} = 15$$

답 15

13

곡선 $y = k\sqrt{x}$ 가 직선 $y = 4^n x + 1$ 과 만나려면 그림과 같이 $k > 0$ 이어야 하고, 한 점에서 만나려면 접해야 한다.

$$k\sqrt{x} = 4^n x + 1 \text{에서}$$

$$k^2 x = (4^n x + 1)^2 \\ = 4^{2n} x^2 + 2 \times 4^n x + 1 \\ = 2^{4n} x^2 + 2^{2n+1} x + 1$$

$$2^{4n} x^2 + (2^{2n+1} - k^2) x + 1 = 0$$

위의 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 위의 이차방정식의 판별식을

D 라 하면 $D = 0$ 에서

$$D = (2^{2n+1} - k^2)^2 - 4 \times 2^{4n} \\ = (2^{4n+2} - 2 \times 2^{2n+1} k^2 + k^4) - 2^{4n+2} \\ = k^4 - 2^{2n+2} k^2 = 0$$

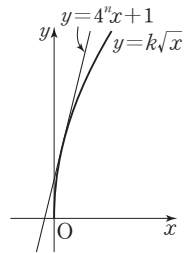
$$k^2(k^2 - 2^{2n+2}) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k^2 = 2^{2n+2} \text{에서 } k = 2^{n+1}$$

$$\text{즉, } a_n = 2^{n+1} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2^{n-1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 2^{n+2}}{2^{n-1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4}{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 12$$

답 ④



14

$$\text{연립방정식 } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ xy = \frac{1}{\sqrt{4n+5}} \end{cases} \text{의 해가 } x = a_n, y = b_n \text{이므로}$$

$$a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\sqrt{n}}, a_n b_n = \frac{1}{\sqrt{4n+5}}$$

$$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{4n+5}}$$

$$= \frac{\sqrt{4n+5} + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{4n+5}}$$

$$(a_n - b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2a_n b_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{4n+5}}$$

$$= \frac{\sqrt{4n+5} - 2\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{4n+5}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \times \left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times (a_n - b_n)^2}{(a_n + b_n)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times \frac{\sqrt{4n+5}-2\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{4n+5}}}{\frac{\sqrt{4n+5}+2\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{4n+5}}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{4n+5}-2\sqrt{n})}{\sqrt{4n+5}+2\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{4n+5}-2\sqrt{n})(\sqrt{4n+5}+2\sqrt{n})}{(\sqrt{4n+5}+2\sqrt{n})^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{4n+5+4n+2 \times \sqrt{4n+5} \times 2\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{8n+5+4\sqrt{4n^2+5n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{8+\frac{5}{n}+4\sqrt{4+\frac{5}{n}}} \\
&= \frac{5}{8+4 \times 2} = \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

따라서 $p=16$, $q=5$ 이므로

$$p+q=16+5=21$$

21

15

원이 직선 $y=\frac{x}{2n}$ 에 접하고 점 P_n 을 지나므로 원은 점 P_n 에서 직선

$y=\frac{x}{2n}$ 에 접한다. 점 P_n 의 x 좌표가 $\sqrt{2n}$ 이므로 y 좌표는

$$y=\frac{\sqrt{2n}}{2n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OP_n}=\sqrt{(\sqrt{2n})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}$$

원과 x 축의 교점을 Q_n 이라 하면 $\overline{OP_n}=\overline{OQ_n}$ 이므로 점 Q_n 의 x 좌표는 $\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}$ 이다. 원의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면 원의 중심의 좌표

$$\text{는 } \left(\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}, r_n\right)$$

이 점과 직선 $y=\frac{x}{2n}$, 즉 $x-2ny=0$ 사이의 거리가 r_n 이므로

$$r_n=\frac{\left|\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}-2nr_n\right|}{\sqrt{1+4n^2}}$$

$$\sqrt{4n^2+1}r_n=\left|\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}-2nr_n\right|$$

$$\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}<2nr_n\text{이라 가정하면}$$

$$\sqrt{4n^2+1}r_n=-\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}+2nr_n$$

$$(\sqrt{4n^2+1}-2n)r_n=-\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{4n^2+1}-2n>0$, $r_n>0$,

$$\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}>0\text{이므로 위의 등식은 성립하지 않는다.}$$

$$\text{따라서 } \sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}\geq 2nr_n\text{이고}$$

$$\sqrt{4n^2+1}r_n=\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}-2nr_n$$

$$(\sqrt{4n^2+1}+2n)r_n=\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}$$

$$r_n=\frac{\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$$

$$r_n^2=\left(\frac{\sqrt{2n^2+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4n^2+1}+2n}\right)^2=\frac{2n^2+\frac{1}{2}}{8n^2+1+4n\sqrt{4n^2+1}}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2 = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+\frac{1}{2}}{8n^2+1+4n\sqrt{4n^2+1}} \\
&= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{2n^2}}{8+\frac{1}{n^2}+4\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{8+4 \times 2} \pi = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

2

16

$c_n=a_n-b_n$, $d_n=2a_n-3b_n$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{2}{5}, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{3}{2}\text{이고}$$

$$3c_n-d_n=3(a_n-b_n)-(2a_n-3b_n)=a_n$$

$$2c_n-d_n=2(a_n-b_n)-(2a_n-3b_n)=b_n$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 각각 수렴한다.

따라서

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (3c_n-d_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (2c_n-d_n) \\
&= \left(3\sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} d_n\right) + \left(2\sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} d_n\right) \\
&= 5\sum_{n=1}^{\infty} c_n - 2\sum_{n=1}^{\infty} d_n \\
&= 5 \times \frac{2}{5} - 2 \times \frac{3}{2} = -1
\end{aligned}$$

2

17

$(n^2+2n)x^2-2(n+1)x+1=0$ 에서

$(nx-1)\{(n+2)x-1\}=0$ 이고 $\alpha_n>\beta_n$ 이므로

$$\alpha_n=\frac{1}{n}, \beta_n=\frac{1}{n+2}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n-\beta_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\dots\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

3

18

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

$$a_{20} = 2a_{10} \text{에서 } a + 19d = 2(a + 9d)$$

따라서 $a = d$

$$S_{20} = 2S_{10} + 300 \text{에서}$$

$$\frac{20(2a + 19d)}{2} = 2 \times \frac{10(2a + 9d)}{2} + 300$$

$$2a + 19d = 2a + 9d + 30$$

$$10d = 30 \text{에서 } d = 3$$

$$a_n = 3 + (n-1) \times 3 = 3n \text{이므로}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n 3k = 3 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

②

19

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2)$ 가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$

$b_n = a_n - 2$ 라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이고 $a_n = b_n + 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 2) = 0 + 2 = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + a_n^2}{1 + a_n} = \frac{2 + 2^2}{1 + 2} = 2$$

④

20

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (a_n - 2)$ 가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (a_n - 2) = 0$ 에서

$n \rightarrow \infty$ 일 때 $2^n \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2^n (a_n - 2) \times \frac{1}{2^n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (a_n - 2) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \end{aligned}$$

$b_n = a_n - 2$ 라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이고 $a_n = b_n + 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 2) = 0 + 2 = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} + 4^{n+1} a_n}{(4^n - 1) a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^2 + 4 a_n}{1 - \frac{1}{4^n}} \\ &= \frac{16 + 4 \times 2}{(1 - 0) \times 2} = 12 \end{aligned}$$

④

21

$b_n = a_n - \sqrt{n^2 + 3n + 5}$ 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$b_n = a_n - \sqrt{n^2 + 3n + 5}$ 에서 $a_n = b_n + \sqrt{n^2 + 3n + 5}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + \sqrt{n^2 + 3n + 5} - n)$$

그런데

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n)(\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 5}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{3}{1 + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + \sqrt{n^2 + 3n + 5} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n) \\ &= 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

③

22

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ 이다.

$f(r) = \frac{2r^2 - r + a}{3}$ 라 하면

$$f(r) = \frac{2}{3} \left(r - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{24}$$

$$-1 < r < 1 \text{일 때 } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{a}{3} - \frac{1}{24} \leq f(r) < f(-1) = \frac{a}{3} + 1$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2r^2 - r + a}{3} \right)^n$ 이 수렴하려면

$$\frac{a}{3} - \frac{1}{24} > -1 \text{이고 } \frac{a}{3} + 1 \leq 1 \text{이어야 한다.}$$

$$-\frac{23}{8} < a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0$ 이므로 구하는 모든 정수 a 의 개수는 3이다.

③

23

n 이 홀수일 때 $n = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)라 하면 $3n = 6k + 3$ 이므로 $3n$ 을 6으로 나눈 나머지는 3이다.

n 이 짝수일 때 $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)이라 하면 $3n = 6k$ 이므로 $3n$ 을 6으로 나눈 나머지는 0이다.

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{3}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \cdots \\ &= \frac{3}{3} + \frac{3}{3^3} + \frac{3}{3^5} + \cdots \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{3}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

답 ④

24

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($-1 < r < 1$)이라 하면 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째 항이 1이고 공비가 r^2 인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{1-r^2}$$

$$\frac{1}{1-r} : \frac{1}{1-r^2} = 5 : 3 \text{에서}$$

$$\frac{5}{1-r^2} = \frac{3}{1-r}$$

$$5(1-r) = 3(1+r)(1-r)$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ 에서 $1-r \neq 0$ 이다.

$$5 = 3(1+r), \quad r = \frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_n^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-r^2} \\ &= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 3 + \frac{9}{5} = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

답 ③

25

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각

r, s ($-1 < r < 1$, $-1 < s < 1$)이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{1-s}$$

$$\text{조건 (가)에서 } 3 \times \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-s}, \quad 3(1-s) = 2(1-r)$$

$$s = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 첫째항이 2이고 공비가

rs ($-1 < rs < 1$)인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{2}{1-rs}$$

$$\frac{2}{1-rs} = 3 \text{에서 } rs = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$r\left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad 2r^2 + r - 1 = 0$$

$$(r+1)(2r-1) = 0$$

$$-1 < r < 1 \text{이므로 } r = \frac{1}{2} \text{이고 } \textcircled{1} \text{에서 } s = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 6 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \times 6 = 12$$

답 12

26

$B_1(5, 10)$ 이고 직선 B_1A_2 의 기울기는 -2 이므로 직선 B_1A_2 의 방정식은

$$y = -2(x-5) + 10$$

$$-2(x-5) + 10 = \frac{x}{2} \text{에서 } x = 8$$

따라서 $A_2(8, 4)$

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{(10-5)^2 + (5-10)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{A_1A_2} = \sqrt{(10-8)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{B_1A_2} = \sqrt{(5-8)^2 + (10-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } L_1 = 5\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$$

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{OA_1} : \overline{OA_2} = 10 : 8 = 5 : 4 \text{이므로}$$

삼각형 $A_nB_nA_{n+1}$ 과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}A_{n+2}$ 는 서로 닮음이고 닮음비가 $5 : 4$ 이다.

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ 은 첫째항이 $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ 이고 공비가 $\frac{4}{5}$ 인 등비급수이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 25\sqrt{2} + 20\sqrt{5}$$

따라서 $p = 25$, $q = 20$ 이므로

$$p + q = 25 + 20 = 45$$

답 45

27

선분 A_1C_1 은 공통, $\overline{C_1B_1} = \overline{C_1A_2}$, $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1A_2A_1 = \frac{\pi}{2}$ 이므로

삼각형 $A_1C_1B_1$ 과 삼각형 $A_1C_1A_2$ 는 합동인 삼각형이다.

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\overline{A_1A_2} = 5$$

$$\overline{OA_1} = 13 \text{이므로}$$

$$\overline{OA_2} = 13 - 5 = 8$$

삼각형 A_1OB_1 과 삼각형 C_1OA_2 는 닮은 삼각형이므로

$$\overline{OA_1} : \overline{OB_1} = \overline{OC_1} : \overline{OA_2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시킨다.

$$\overline{C_1B_1} = \overline{C_1A_2} = x \text{라 하면 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$13 : 12 = (12-x) : 8$$

$$12(12-x) = 13 \times 8, \quad 12-x = \frac{26}{3}, \quad x = \frac{10}{3}$$

$$\overline{C_1B_1} = \overline{C_1A_2} = \frac{10}{3}$$

$$S_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{C_1B_1} \times \overline{A_1B_1} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 5 = \frac{50}{3}$$

또한 삼각형 A_1OB_1 과 삼각형 A_2OB_2 는 닮은 삼각형이고 닮음비는

$$\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} = \frac{8}{13} \text{이다.}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{50}{3}$ 이고 공비가 $\left(\frac{8}{13}\right)^2$ 인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{50}{3}}{1 - \left(\frac{8}{13}\right)^2} = \frac{50}{3} \times \frac{169}{105} = \frac{1690}{63}$$

답 ④

정답

본문 101~112쪽

01 ③	02 ②	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ⑤	07 72	08 ②	09 ②	10 ①
11 ③	12 5	13 ④	14 ①	15 ⑤
16 ②	17 ①	18 ⑤	19 ⑤	20 ②
21 ④	22 ④	23 ④	24 ②	25 ①
26 ④	27 ②	28 ③	29 ②	30 ③
31 ②	32 24	33 ⑤	34 ③	35 ③
36 ②				

01

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+2x^2)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\{(1+x)(1+2x)\}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \\ &= 1 + 2 \times 1 = 3\end{aligned}$$

답 ③

02

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{e^{x-1} - 1} & (x \neq 1) \\ 4(a+b+1) & (x=1) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{e^{x-1} - 1} = 4(a+b+1)$$

(i) $x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } a+b+1=0 \text{에서 } b=-a-1$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{e^{x-1} - 1} = 0 \text{에서}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{e^{x-1} - 1} = 2+a=0, a=-2$$

$$b = -a - 1 = 1$$

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$f(5) = 25 - 10 + 1 = 16$$

답 ②

03

점 Q의 y좌표는 $2f(t)$ 이므로 $Q(f(t), 2f(t))$

$\overline{AQ}^2 = \overline{PQ}^2$ 에서

$$\begin{aligned}\{f(t)-1\}^2 + \{2f(t)\}^2 &= \{f(t)-t\}^2 + \{2f(t)-\ln t\}^2 \\ \{f(t)\}^2 - 2f(t) + 1 + 4\{f(t)\}^2 &= \{f(t)\}^2 - 2tf(t) + t^2 + 4\{f(t)\}^2 - 4f(t)\ln t + (\ln t)^2 \\ (2t-2+4\ln t)f(t) &= t^2 - 1 + (\ln t)^2\end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{t^2 - 1 + (\ln t)^2}{2t - 2 + 4\ln t} \quad (t \neq 1)$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1 + (\ln t)^2}{2t - 2 + 4\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1 + \frac{(\ln t)^2}{t-1}}{2 + \frac{4\ln t}{t-1}}\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \frac{2+1 \times 0}{2+4} = \frac{1}{3}$$

답 ②

04

직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(6)-f(3)}{6-3} = \frac{\log_2 6 - \log_2 3}{3} = \frac{\log_2 2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{a \ln 2} = \frac{1}{3}, a \ln 2 = 3, \ln 2^a = 3$$

$$\text{따라서 } 2^a = e^3$$

답 ⑤

05

$$1 + \ln x \leq f(x) \leq e^{x-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에 $x=1$ 을 대입하면 $1 \leq f(1) \leq 1$ 이므로

$$f(1) = 1$$

(i) $x > 1$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } \ln x \leq f(x) - 1 \leq e^{x-1} - 1$$

$$x-1 > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$$

(ii) $x < 1$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } \ln x \leq f(x) - 1 \leq e^{x-1} - 1$$

$$x-1 < 0 \text{이므로}$$

$$\frac{e^{x-1}-1}{x-1} \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

$$\text{이므로 } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$$

$$g(x) = (2x + \ln x)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)f(x) + (2x + \ln x)f'(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}g'(1) &= (2+1)f(1) + (2+0)f'(1) \\ &= 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5\end{aligned}$$

답 ⑤

06

$$\neg. f(0)=2, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \neq f(0)$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (참)

$$\neg. g(x)=xf(x) \text{라 하면}$$

$$g(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & (x>0) \\ 2x & (-1<x \leq 0) \end{cases}$$

$$g(0)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln(1+x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x = 0$$

따라서 함수 $y=xf(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

$$\neg. h(x)=x^k f(x) \text{ (} k \text{는 자연수)라 하면}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^{k-1} \ln(1+x) & (x>0) \\ 2x^k & (-1<x \leq 0) \end{cases}$$

$$h(0)=0 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{k-1} \ln(1+x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x^k = 0 \text{이므로 함수 } h(x) \text{는 } x=0 \text{에서 연속이다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{k-1} \ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} x^{k-2} \ln(1+x) \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x^k}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x^{k-1} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$k=1$ 일 때 ㉠의 값은 1이고 ㉡의 값은 2이므로 미분가능하지 않다.

$k \geq 2$ 일 때 ㉠의 값은 0이고 ㉡의 값도 0이므로 미분가능하다.

따라서 함수 $y=x^k f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하도록 하는 자연수 k 의 최솟값은 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ⑤

07

$$x^2-2x+a=0 \text{에 } x=-1 \text{을 대입하면}$$

$$(-1)^2-2 \times (-1)+a=0$$

$$\text{따라서 } a=-3$$

$$x^2-2x-3=0 \text{에서 } (x+1)(x-3)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\text{따라서 } \csc \theta = 3$$

$$1+\cot^2 \theta = \csc^2 \theta = 3^2 = 9, \cot^2 \theta = 8 \text{이므로}$$

$$a^2 \cot^2 \theta = 9 \times 8 = 72$$

답 72

08

두 직선 $y=mx$, $y=(2m+2)x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = m, \tan \beta = 2m+2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} |\tan(\alpha-\beta)| &= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{m - (2m+2)}{1 + m(2m+2)} \right| \\ &= \frac{|m+2|}{2m^2+2m+1} \end{aligned}$$

$$\text{이고 } \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{이므로}$$

$$2m^2+2m+1 = |m+2|$$

$$(i) m \geq -2 \text{일 때}$$

$$2m^2+2m+1 = m+2, 2m^2+m-1=0$$

$$(m+1)(2m-1)=0$$

$$\text{따라서 } m=-1 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

$$(ii) m < -2 \text{일 때}$$

$$2m^2+2m+1 = -m-2, 2m^2+3m+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=3^2-4 \times 2 \times 3 < 0$ 이므로 실근을 갖지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } m \text{의 값은 } -1 \text{과 } \frac{1}{2} \text{이고 그 합은}$$

$$-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

답 ②

09

$$\sin(\alpha+\beta) - 2 \cos \beta = \frac{4}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2(\alpha+\beta) - 4 \sin(\alpha+\beta) \cos \beta + 4 \cos^2 \beta = \frac{16}{25} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\cos(\alpha+\beta) + 2 \sin \beta = \frac{7}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\cos^2(\alpha+\beta) + 4 \cos(\alpha+\beta) \sin \beta + 4 \sin^2 \beta = \frac{49}{25} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

두 식 ㉠, ㉡을 더하면

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + 4 \sin^2 \beta + 4 \cos^2 \beta \\ - 4 \{ \sin(\alpha+\beta) \cos \beta - \cos(\alpha+\beta) \sin \beta \} = \frac{65}{25} \end{aligned}$$

$$5 - 4 \sin(\alpha+\beta-\beta) = \frac{13}{5}$$

$$4 \sin \alpha = 5 - \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

답 ②

참고

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

10

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - x^2 \cos \frac{1}{2x} \right) \text{에서 } \frac{1}{2x} = t \text{로 놓으면 } x = \frac{1}{2t} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - x^2 \cos \frac{1}{2x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos t}{(2t)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{4t^2(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 t}{4t^2(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{4} \times \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos t} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \times 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

답 ①

11

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a\pi(x+1)}{\pi x} = b$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos a\pi(x+1) = 0$$

$\cos a\pi = 0$ 이고 $0 < a < 1$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a\pi(x+1)}{\pi x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi(x+1)}{\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi x}{2}}{\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2} \times 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

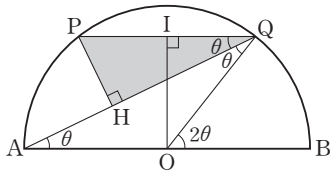
이므로 $b = -\frac{1}{2}$

따라서 $a+b = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

답 ③

12

반원의 중심을 O라 하자.



$\angle QAB = \theta$ 이므로

$\angle AQO = \angle AQP = \theta$, $\angle QOB = 2\theta$, $\angle OQP = 2\theta$

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{QI} = \cos 2\theta \text{이므로 } \overline{PQ} = 2 \cos 2\theta$$

이때 $\overline{PH} = \overline{PQ} \sin \theta = 2 \cos 2\theta \times \sin \theta$,

$\overline{QH} = \overline{PQ} \cos \theta = 2 \cos 2\theta \times \cos \theta$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{QH} = 2 \cos^2 2\theta \times \sin \theta \cos \theta$$

$\frac{\pi}{4} - \theta = t$ 라 하면 $\pi - 4\theta = 4t$, $2\theta = \frac{\pi}{2} - 2t$, $\theta = \frac{\pi}{4} - t$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{(\pi - 4\theta)^2} &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{2 \cos^2 2\theta \sin \theta \cos \theta}{(\pi - 4\theta)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{(4t)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2 \sin^2 2t \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{16t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=1$ 이므로

$$p+q=4+1=5$$

답 5

13

$f(x) = \sin x \cos x$ 에서 $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ 에서 $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$

(i) $\cos x + \sin x = 0$ 인 경우

$$\tan x = -1 \text{이므로 } x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{4}\pi$$

(ii) $\cos x - \sin x = 0$ 인 경우

$$\tan x = 1 \text{이므로 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi$$

(i), (ii)에서 모든 실수 x 의 값은 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ 이고 그 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 4\pi$$

답 ④

14

$f(x) = x - \sin x$ 에서 $f'(x) = 1 - \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\} = 1^2 \times \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ①

15

두 점 A, P를 잇는 선분을 그었을 때

$\angle OPA = \frac{\pi}{2}$, $\angle OAP = \theta$ 이고 $\overline{OA} = 6$ 에서 $\overline{OP} = 6 \sin \theta$ 이므로

$$f(\theta) = (6 \sin \theta + 1) \cos \theta$$

$$f'(\theta) = 6 \cos^2 \theta + (6 \sin \theta + 1) \times (-\sin \theta)$$

$$= 6 \cos^2 \theta - 6 \sin^2 \theta - \sin \theta$$

$$\text{따라서 } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

16

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times \tan x - x \times \sec^2 x}{\tan^2 x} \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 \times \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \times \sec^2 \frac{\pi}{4}}{\tan^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\pi}{4} \times 2}{1} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

답 ②

17

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3 \text{에서 } f(1)=2, f'(1)=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(g(x))-2}{x-2} = 6 \text{에서 } h(x)=f(g(x)) \text{라 하면}$$

함수 $h(x)$ 는 미분가능하고 $h(2)=2, h'(2)=6$

$h(2)=f(g(2))=2$ 에서 $f(1)=2$ 이고 $f(x)$ 는 일대일대응이므로

$$g(2)=1$$

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x) \text{에서}$$

$$h'(2)=f'(g(2))g'(2), 6=f'(1)g'(2)$$

$$f'(1)=3 \text{이므로 } g'(2)=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+a}{x-2} = b \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하}$$

므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$g(2)+a=0$$

$$g(2)=1 \text{이므로 } a=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+a}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) \text{이므로}$$

$$b=2$$

$$\text{따라서 } a+b=-1+2=1$$

답 ①

18

$$f(\log_2(x+1))=g(2^x-1) \text{에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f(1)=g(1)$$

$$f(\log_2(x+1))=g(2^x-1) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(\log_2(x+1)) \times \frac{1}{(x+1)\ln 2} = g'(2^x-1) \times 2^x \ln 2$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1) \times \frac{1}{2\ln 2} = g'(1) \times 2\ln 2$$

$$\text{따라서 } f'(1)=4(\ln 2)^2 \times g'(1) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x)) \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

(i) $\textcircled{8}$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$h(1)=f(g(1))=f(f(1))=f(1)=1$$

(ii) $\textcircled{8}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(f(1))g'(1)=f'(1)g'(1)$$

$$g'(1)=2 \text{이므로 } \textcircled{7} \text{에서 } f'(1)=8(\ln 2)^2$$

$$\text{따라서 } h'(1)=8(\ln 2)^2 \times 2=16(\ln 2)^2 \text{이므로}$$

$$\frac{h'(1)}{h(1)}=16(\ln 2)^2$$

답 ⑤

19

$$\tan \theta=2 \text{이므로 } \sin \theta \neq 0, \cos \theta \neq 0$$

$$\frac{dx}{d\theta}=4 \cos^3 \theta \times (-\sin \theta), \frac{dy}{d\theta}=4 \sin^3 \theta \times \cos \theta \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4 \sin^3 \theta \times \cos \theta}{4 \cos^3 \theta \times (-\sin \theta)}$$

$$= -\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = -\tan^2 \theta = -4$$

답 ⑤

20

점 P는 매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x=\frac{t}{t^2+1}, y=\frac{t+1}{t^2+1}$ 과 직선

$y=3x$ 의 교점이므로

$$\frac{t+1}{t^2+1} = 3 \times \frac{t}{t^2+1}$$

$$t+1=3t \text{에서 } t=\frac{1}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1-t \times 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2+1-(t+1) \times 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}}{\frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}} = \frac{-t^2-2t+1}{-t^2+1}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{4}-2 \times \frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{4}+1} = -\frac{1}{3}$$

답 ②

21

$x^2+xy+2y^2=4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+y+x \times \frac{dy}{dx} + 4y \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+4y} \quad (\text{단, } x+4y \neq 0)$$

$$\frac{-2x-y}{x+4y} = \frac{3}{2} \text{에서 } -4x-2y=3x+12y$$

$$\text{따라서 } y = -\frac{x}{2}$$

$$y = -\frac{x}{2} \text{를 } x^2+xy+2y^2=4 \text{에 대입하면}$$

$$x^2+x \times \left(-\frac{x}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = 4, x^2=4$$

$$\text{따라서 } x=2 \text{ 또는 } x=-2$$

P(2, -1), Q(-2, 1)로 놓을 수 있고 이때 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(-2-2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

답 ④

22

$$f(x)=a\pi x + \sin \pi x \text{에서 } f(1)=a\pi$$

$$f(1)=2\pi \text{이므로 } a=2$$

$$f(x)=2\pi x + \sin \pi x$$

$$f'(x)=2\pi + \pi \cos \pi x$$

$$f'(1)=2\pi + \pi \cos \pi = 2\pi - \pi = \pi$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(x))=x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=1$$

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

$x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(1))=\frac{1}{f'(1)}$$

$$g'(2\pi)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\pi}$$

23

$$f(e^x - e^{-x}) = x^3 + 2x \text{에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(e^0 - e^{-0}) = 0^3 + 0 \text{에서 } f(0) = 0 \text{이므로 } g(0) = 0$$

$$f(e^x - e^{-x}) = x^3 + 2x, g(f(x)) = x \text{에서}$$

$$g(f(e^x - e^{-x})) = g(x^3 + 2x)$$

$$g(x^3 + 2x) = e^x - e^{-x}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x^3 + 2x) \times (3x^2 + 2) = e^x + e^{-x}$$

위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$g'(0) \times 2 = 1 + 1, g'(0) = 1$$

따라서 $g(0) + g'(0) = 0 + 1 = 1$

24

$$f(g(t)) = t \text{이고 } f(t) \text{의 역함수가 존재하므로 } g(t) = f^{-1}(t)$$

즉, $g(t)$ 는 $f(t)$ 의 역함수이다.

$$g(2) = a \text{라 하면 } f(a) = 2 \text{이므로}$$

$$a^3 - 4a^2 + 6a - 2 = 2 \text{에서}$$

$$a^3 - 4a^2 + 6a - 4 = 0, (a-2)(a^2 - 2a + 2) = 0$$

a 는 실수이므로 $a=2$

따라서 $f(2) = 2, g(2) = 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 6 \text{에서 } f'(2) = 2$$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(2) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}$$

$$h'(t) = g'(g(t))g'(t) \text{이므로}$$

$$h'(2) = g'(g(2))g'(2) = g'(2)g'(2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

25

$$y' = a^x \ln a \text{이므로 점 } P(t, a^t) \text{에서의 접선의 기울기는 } a^t \ln a$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = a^t \ln a \times (x - t) + a^t$$

$$0 = a^t \ln a \times (x - t) + a^t \text{에서 } x = t - \frac{1}{\ln a}$$

$$Q\left(t - \frac{1}{\ln a}, 0\right)$$

$$H(t, 0) \text{이므로 } \overline{QH} = t - \left(t - \frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}$$

$$\frac{1}{\ln a} = 2 \text{에서 } \ln a = \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \sqrt{e}$

26

점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2e}$ 이므로

$$\text{점 } P(a, b) \text{에서 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{1}{t}}{2t + 2} = \frac{t + 1}{2t(t + 1)} = \frac{1}{2t}$$

$$\frac{1}{2t} = \frac{1}{2e} \text{에서 } t = e$$

$t = e$ 일 때 $a = e^2 + 2e, b = e + 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2e}(x - e^2 - 2e) + e + 1$$

$$y = \frac{1}{2e}x - \frac{e}{2} - 1 + e + 1$$

$$y = \frac{1}{2e}x + \frac{e}{2} \text{이므로 } k = \frac{e}{2}$$

27

$$y = \sin^2 x \text{에서 } y' = 2 \sin x \cos x$$

$x = t$ 에서의 접선을 l 이라 하면 l 의 기울기는 $2 \sin t \cos t$

따라서 곡선 위의 점 $P(t, \sin^2 t)$ 에서의 접선 l 에 수직인 직선의 기울

기는 $-\frac{1}{2 \sin t \cos t}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y - \sin^2 t = -\frac{1}{2 \sin t \cos t}(x - t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 의 y 절편이 $g(t)$ 이므로

$$g(t) = \sin^2 t + \frac{t}{2 \sin t \cos t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sin^2 t + \frac{t}{2 \sin t \cos t} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sin^2 t + \frac{1}{2} \times \frac{t}{\sin t} \times \frac{1}{\cos t} \right)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

28

함수 $f(x)$ 가 $x = -3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-3) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + a) - (x + 1) \times 2x}{(x^2 + a)^2} = \frac{-x^2 - 2x + a}{(x^2 + a)^2}$$

$$f'(-3) = \frac{-(-3)^2 - 2 \times (-3) + a}{\{(-3)^2 + a\}^2} = 0 \text{에서 } a = 3$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2 + 3)^2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$ (극소)	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ (극대)	$\searrow$

따라서 $M = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{6}$ 이므로

$$M+m = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

답 ③

29

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 정의역에서 항상 증가하려면 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - \cos x + x \sin x + 2ax \\ &= x \sin x + 2ax = x(\sin x + 2a) \end{aligned}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } \sin x + 2a \geq 0, \sin x \geq -2a$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로 } -2a \leq -1 \text{ 에서 } a \geq \frac{1}{2}$$

$a = \frac{1}{2}$ 일 때 $f'(x) = 0$ 이 되는 양수 x 는 $\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \dots$ 이고 나머지 경우는 모두 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.

따라서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ②

30

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

(i) $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{에서} \\ (16 \times 0 + 7)e^0 &= (0^2 + a \times 0 + b)e^0, b = 7 \end{aligned}$$

(ii) $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(16x + 7)e^{-2x} - 7}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(16e^{-2x} + 7 \times \frac{e^{-2x} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 16e^{-2x} + 7 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-2x} - 1}{x} \\ &= 16 + 7 \times (-2) = 2 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + ax + b)e^x - 7}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + ax + 7)e^x - 7}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ (x + a)e^x + 7 \times \frac{e^x - 1}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a)e^x + 7 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= a + 7 \end{aligned}$$

$$2 = a + 7 \text{ 에서 } a = -5$$

$$\text{이때 } f'(x) = \begin{cases} (-32x + 2)e^{-2x} & (x < 0) \\ (x^2 - 3x + 2)e^x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$x \geq 0$ 인 범위에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x - 1)(x - 2) = 0, x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

또한 $x < 0$ 인 범위에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 없다. 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	1	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 갖고, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 집합 $\{a \mid x=a \text{에서 함수 } f(x) \text{는 극값을 갖는다.}\}$ 의 원소는 1과 2이므로 모든 원소의 합은 3이다.

답 ③

31

$$f(x) = (\ln x)^2, f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, f''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

$f''(e) = 0$ 이고 $x=e$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀐다.

변곡점의 좌표는 $(e, 1)$ 이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{e}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{e}(x - e) + 1, y = \frac{2}{e}x - 1$$

x 축과 만나는 점은 $A\left(\frac{e}{2}, 0\right)$, y 축과 만나는 점은 $B(0, -1)$

따라서 세 점 O, A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{e}{2} \times 1 = \frac{e}{4}$$

답 ②

32

땅의 가로 길이를 x ($x > 2$), 세로 길이를 h ($h > 1$)이라 하면

$$(x - 2)(h - 1) = 8$$

$$h = \frac{8}{x - 2} + 1 = \frac{x + 6}{x - 2}$$

직사각형 모양의 땅의 넓이를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = x \times \frac{x + 6}{x - 2} = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 6)(x - 2) - (x^2 + 6x)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 12}{(x - 2)^2} = \frac{(x + 2)(x - 6)}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

$x > 2$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 6$ 이고

$x = 6$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$x = 6$ 에서 $f(x)$ 는 극소이면서 최솟값을 갖는다.

$$\text{최솟값은 } f(6) = \frac{6^2 + 6 \times 6}{6 - 2} = 18$$

$$a = 6, b = 18 \text{ 이므로 } a + b = 24$$

답 24

33

$$\neg. f'(x) = \cos x - x \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \cos(-x) - (-x) \sin(-x) \\ &= \cos x - x \sin x = f'(x) \end{aligned}$$

따라서 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다. (참)

$$\neg. f'(x) = \cos x - x \sin x = x \cos x \left(\frac{1}{x} - \tan x \right) \quad (x \neq 0)$$

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ 에서 $a \cos a > 0$ 이므로 $f'(a) = 0$ 이면 $\tan a = \frac{1}{a}$ 이다.
(참)

ㄷ. $3 < \pi < 4$ 이므로 $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$ 이고

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프는 증가한다.

$\tan \frac{3}{4} < \tan \frac{\pi}{4} < \tan 1$ 이고

$\frac{1}{\frac{3}{4}} - \tan \frac{3}{4} > \frac{4}{3} - \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} > 0$ 이므로

$f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \cos \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\frac{3}{4}} - \tan \frac{3}{4}\right) > 0$

$\frac{1}{1} - \tan 1 < 1 - \tan \frac{\pi}{4} = 0$ 이므로 $f'(1) < 0$

$f'\left(\frac{3}{4}\right) > 0$, $f'(1) < 0$ 이고 도함수 $f'(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ 에서

$f'(c) = 0$ 인 c 가 존재하고 $x = c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극댓값을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

34

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos t = \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t - \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 = \cos^2 t + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2 t - 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t = \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin t + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos t$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = \sin^2 t + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 t + 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t \cos t$$

점 P의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} \\ &= \sqrt{1 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

이므로 $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $m = 1$ 이므로

$$a + m = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

답 ③

35

$x \ln x \leq x + kx^2$ 에서 $x > 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{x} + k$$

$$\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \leq k$$

$f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x}$ 이라 하자.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $2 - \ln x = 0$ 이므로 $x = e^2$

$x = e^2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x = e^2$ 에서 $f(x)$ 는 극대이면서 최댓값을 갖는다.

$$f(e^2) = \frac{2 - 1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

$f(x) \leq \frac{1}{e^2}$ 이므로 양의 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq k$ 가 항상 성립하려면

$\frac{1}{e^2} \leq k$ 이어야 한다. 따라서 실수 k 의 최솟값은 $\frac{1}{e^2}$ 이다.

답 ③

36

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$(x+2)^2 + e^x = ne^x$ 에서 $e^x > 0$ 이므로 $(x+2)^2 e^{-x} = n - 1$

$h(x) = (x+2)^2 e^{-x}$ 이라 하면

$$h'(x) = (2x + 4 - x^2 - 4x - 4)e^{-x} = -x(x+2)e^{-x}$$

$h'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 이다.

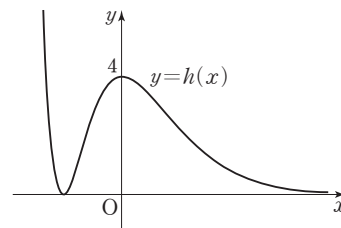
함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $h(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극소이고 극솟값은 $h(-2) = 0$

함수 $h(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이고 극댓값은 $h(0) = 4$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)^2 e^{-x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)^2 e^{-x} = 0$ 이므로 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = n - 1$ 의 서로 다른 교점의 개수가 a_n 이므로

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 3, a_5 = 2,$$

$$a_6 = a_7 = \cdots = a_{10} = 1$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 17$$

답 ②

09 적분법

정답

본문 115~128쪽

01 ⑤	02 ①	03 ②	04 15	05 ④
06 ③	07 ③	08 4	09 ①	10 ③
11 ②	12 21	13 ⑤	14 8	15 ⑤
16 ②	17 ③	18 ③	19 ③	20 ①
21 ①	22 24	23 ①	24 10	25 ②
26 ④	27 587	28 ③	29 ③	30 ①
31 4	32 ①	33 19	34 3	35 ④
36 51	37 ②	38 ①	39 ③	40 ④
41 77	42 ④			

01

$$f'(x) = 2^x(1+2^x) \ln 2 = 2^x \ln 2 + 4^x \ln 2 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (2^x \ln 2 + 4^x \ln 2) dx$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} \times \ln 2 + \frac{4^x}{\ln 4} \times \ln 2 + C$$

$$= 2^x + \frac{1}{2} \times 4^x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(0) = 0 \text{ 이므로 } 2^0 + \frac{1}{2} \times 4^0 + C = 0 \text{ 에서 } C = -\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2^x + \frac{1}{2} \times 4^x - \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 2 + \frac{1}{2} \times 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

02

$$f'(x) = \sec^2 x \csc^2 x$$

$$= (\tan^2 x + 1) \csc^2 x$$

$$= \tan^2 x \csc^2 x + \csc^2 x$$

$$= \sec^2 x + \csc^2 x$$

이므로

$$f(x) = \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx$$

$$= \tan x - \cot x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4} + C = 0 \text{ 에서 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \tan x - \cot x \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} - \cot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

03

$$e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 2x - 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{d}{dx} \{e^{-x} f(x)\} = 2x - 1 \text{ 이므로}$$

$$e^{-x} f(x) = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(1) = e \text{ 이므로 위의 등식의 양변에 } x=1 \text{ 을 대입하면}$$

$$e^{-1} f(1) = 1 - 1 + C = 1 \text{ 에서 } C = 1$$

$$e^{-x} f(x) = x^2 - x + 1 \text{ 에서}$$

$$f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$$

$$f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x$$

$$= (x^2 + x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x(x+1)e^x = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$\text{따라서 } M = f(-1) = \frac{3}{e}, m = f(0) = 1 \text{ 이므로}$$

$$M + m = \frac{3}{e} + 1$$

답 ②

04

$$f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}} \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$= \int \frac{(2x-1)+2}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$= \int \left(\sqrt{2x-1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \right) dx$$

$$2x-1=t \text{ 로 놓으면 } 2 = \frac{dt}{dx} \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int \left(\sqrt{2x-1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2} \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2x-1)^{\frac{1}{2}} + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(1) = \frac{7}{3} \text{ 이므로 } \frac{1}{3} + 2 + C = \frac{7}{3} \text{ 에서 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2x-1)^{\frac{1}{2}} \text{ 이므로}$$

$$f(5) = \frac{1}{3} \times 9^{\frac{3}{2}} + 2 \times 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times 27 + 2 \times 3 = 9 + 6 = 15$$

답 15

다른 풀이

$$f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}} \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}} dx = \int \frac{(2x-1)+2}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\sqrt{2x-1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \right) dx \\
&\sqrt{2x-1}=t \text{로 놓으면} \\
&\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{dt}{dx}, \text{ 즉 } \frac{1}{t} = \frac{dt}{dx} \text{이므로} \\
&f(x) = \int \left(\sqrt{2x-1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \right) dx = \int \left\{ \left(t + \frac{2}{t} \right) \times t \right\} dt \\
&= \int (t^2 + 2) dt = \frac{1}{3} t^3 + 2t + C \\
&= \frac{1}{3} (\sqrt{2x-1})^3 + 2\sqrt{2x-1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
&f(1) = \frac{7}{3} \text{이므로 } \frac{1}{3} + 2 + C = \frac{7}{3} \text{에서 } C=0 \\
&\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2x-1)^{\frac{1}{2}} \text{이므로} \\
&f(5) = \frac{1}{3} \times 9^{\frac{3}{2}} + 2 \times 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times 27 + 2 \times 3 = 9 + 6 = 15
\end{aligned}$$

05

$$\begin{aligned}
&f'(x) = e^{-x} \cos x \text{이므로 } f(x) = \int e^{-x} \cos x \, dx \\
&u(x) = \cos x, \, v'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면} \\
&u'(x) = -\sin x, \, v(x) = -e^{-x} \text{이므로} \\
&f(x) = \int e^{-x} \cos x \, dx \\
&= -e^{-x} \cos x - \int \{ (-e^{-x}) \times (-\sin x) \} dx \\
&= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx \\
&\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \sin x - \int (-e^{-x}) \cos x \, dx \\
&= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx \\
&\text{이므로} \\
&\int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x} \cos x - (-e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx) \\
&= e^{-x} (\sin x - \cos x) - \int e^{-x} \cos x \, dx \\
&f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
&f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{이므로 } C=0 \\
&\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \text{이므로} \\
&f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{6}} \left\{ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{6}} \left(-\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{6}} \left(\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&\text{에서} \\
&f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

06

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \frac{(x+1) \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \text{에서} \\
&f(x) = \int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx = \int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x^2} dx \\
&\int \frac{\ln x}{x} dx \text{에서 } \ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \text{이므로} \\
&\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C_1 \\
&= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수}) \\
&\int \frac{\ln x}{x^2} dx \text{에서 } u(x) = \ln x, \, v'(x) = \frac{1}{x^2} \text{로 놓으면} \\
&u'(x) = \frac{1}{x}, \, v(x) = -\frac{1}{x} \text{이므로} \\
&\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수}) \\
&f(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
&f(1) = 0 \text{이므로 } -1 + C = 0 \text{에서 } C=1 \\
&\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \text{이므로} \\
&f(e) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \frac{(x+1) \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \text{에서} \\
&f(x) = \int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx \\
&\ln x = t \text{로 놓으면 } x = e^t \text{이고 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \text{이므로} \\
&f(x) = \int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx \\
&= \int \left(t + \frac{t}{e^t} \right) dt = \frac{1}{2} t^2 + \int t e^{-t} dt \\
&\int t e^{-t} dt \text{에서 } u(t) = t, \, v'(t) = e^{-t} \text{으로 놓으면} \\
&u'(t) = 1, \, v(t) = -e^{-t} \text{이므로} \\
&\int t e^{-t} dt = -t e^{-t} - \int (-e^{-t}) dt \\
&= -t e^{-t} - e^{-t} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
&f(x) = \frac{1}{2} t^2 - t e^{-t} - e^{-t} + C \\
&= \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&f(1) = 0 \text{이므로 } -1 + C = 0 \text{에서 } C=1 \\
&\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \text{이므로} \\
&f(e) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

답 ④

07

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int \frac{d}{dx} \{x(x-3)e^{x^2-1}\} dx \\
 &= x(x-3)e^{x^2-1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
 f(1) &= 0 \text{이므로} \\
 1 \times (1-3)e^{1^2-1} + C &= -2 + C = 0 \text{에서 } C = 2 \\
 \text{따라서 } f(x) &= x(x-3)e^{x^2-1} + 2 \text{이므로} \\
 f(-1) &= -1 \times (-1-3)e^{(-1)^2-1} + 2 = 6
 \end{aligned}$$

답 ③

08

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int (\sin x + 2) \cos x \, dx \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \int (\sin x + 2) \cos x \, dx = (\sin x + 2) \cos x \\
 \sin x + 2 &\geq 1 \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = 0 \\
 x &= \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \\
 \text{함수 } f(x) \text{의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.}
 \end{aligned}$$

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	(2π)
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int (\sin x + 2) \cos x \, dx \text{에서} \\
 \sin x + 2 &= t \text{로 놓으면 } \cos x = \frac{dt}{dx} \text{이므로} \\
 f(x) &= \int (\sin x + 2) \cos x \, dx = \int t \, dt \\
 &= \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\sin x + 2)^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
 \text{함수 } f(x) \text{의 극솟값이 } 0 \text{이므로} \\
 f\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \frac{1}{2}(-1+2)^2 + C = \frac{1}{2} + C = 0 \text{에서 } C = -\frac{1}{2} \\
 \text{따라서 } f(x) &= \frac{1}{2}(\sin x + 2)^2 - \frac{1}{2} \text{이므로 함수 } f(x) \text{의 극댓값은} \\
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1+2)^2 - \frac{1}{2} = 4
 \end{aligned}$$

답 4

09

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x)}{x} &= 2 \int \frac{f'(x)}{x} dx - (\ln x)^2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} &= \frac{2f'(x)}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \\
 \text{위의 등식의 양변에 } x^2 \text{을 곱하여 정리하면} \\
 xf'(x) - f(x) &= 2xf'(x) - 2x \ln x \\
 xf'(x) + f(x) &= 2x \ln x \\
 \{xf(x)\}' &= 2x \ln x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 xf(x) &= \int 2x \ln x \, dx \\
 u(x) &= \ln x, \quad v'(x) = 2x \text{로 놓으면} \\
 u'(x) &= \frac{1}{x}, \quad v(x) = x^2 \text{이므로} \\
 xf(x) &= \int 2x \ln x \, dx \\
 &= x^2 \ln x - \int \left(x^2 \times \frac{1}{x}\right) dx \\
 &= x^2 \ln x - \int x \, dx \\
 &= x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1) &= -\frac{1}{2} \text{이므로 위의 등식의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\
 f(1) &= -\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \text{에서 } C = 0 \\
 \text{따라서} \\
 xf(x) &= x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 \\
 f(x) &= x \ln x - \frac{1}{2}x \\
 \text{이므로} \\
 f(e) &= e - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}
 \end{aligned}$$

답 ①

10

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \frac{x(x+1)}{x^3} dx - \int_1^e \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2+x}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^e = 1
 \end{aligned}$$

답 ③

11

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2 \cos x + 1) \cos x \text{라 하면} \\
 f(-x) &= \{2 \cos(-x) + 1\} \cos(-x) \\
 &= (2 \cos x + 1) \cos x = f(x) \\
 \text{이므로 곡선 } y &= (2 \cos x + 1) \cos x \text{는 } y \text{축에 대하여 대칭이다. 즉,} \\
 \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (2 \cos x + 1) \cos x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos x + 1) \cos x \, dx \\
 \text{따라서} \\
 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \, dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (2 \cos x + 1) \cos x \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \sin^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos^2 x + \cos x) \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + \cos x) \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 + \cos x) \, dx \\
 &= \left[2x + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

12

$$\begin{aligned}
 & \int_1^8 \frac{x+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1} dx - \int_1^8 \frac{2\{f(x)\}^{-1}}{f(x)+\{f(x)\}^{-1}+1} dx \\
 &= \int_1^8 \frac{\{f(x)\}^3+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1} dx - \int_1^8 \frac{2}{\{f(x)\}^2+f(x)+1} dx \\
 &= \int_1^8 \left[\frac{\{f(x)\}^3+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1} - \frac{2}{\{f(x)\}^2+f(x)+1} \right] dx \\
 &= \int_1^8 \frac{\{f(x)\}^3-1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1} dx \\
 &= \int_1^8 \frac{\{f(x)-1\}[\{f(x)\}^2+f(x)+1]}{\{f(x)\}^2+f(x)+1} dx \\
 &= \int_1^8 \{f(x)-1\} dx \\
 &= \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1) dx \\
 &= \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - x \right]_1^8 \\
 &= \left(\frac{3}{4} \times 16 - 8 \right) - \left(\frac{3}{4} - 1 \right) = \frac{17}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 $p=4$, $q=17$ 이므로

$$p+q=4+17=21$$

답 21

13

$$\begin{aligned}
 & \int_0^4 \frac{x}{x^2-x+3} dx + \int_4^0 \frac{1-x}{x^2-x+3} dx \\
 &= \int_0^4 \frac{x}{x^2-x+3} dx - \int_0^4 \frac{1-x}{x^2-x+3} dx \\
 &= \int_0^4 \left(\frac{x}{x^2-x+3} - \frac{1-x}{x^2-x+3} \right) dx \\
 &= \int_0^4 \frac{2x-1}{x^2-x+3} dx \\
 &= \left[\ln |x^2-x+3| \right]_0^4 \\
 &= \ln 15 - \ln 3 = \ln 5
 \end{aligned}$$

답 ⑤

14

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{k}{3}\pi} \sin^3 \frac{x}{k} dx = \int_0^{\frac{k}{3}\pi} \sin \frac{x}{k} (1 - \cos^2 \frac{x}{k}) dx \\
 & \text{에서 } \cos \frac{x}{k} = t \text{로 놓으면 } -\frac{1}{k} \sin \frac{x}{k} = \frac{dt}{dx} \text{이고} \\
 & x=0 \text{일 때 } t=1, x=\frac{k}{3}\pi \text{일 때 } t=\frac{1}{2} \text{이므로} \\
 & \int_0^{\frac{k}{3}\pi} \sin^3 \frac{x}{k} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{k} (1 - \cos^2 \frac{x}{k}) dx \\
 &= \int_1^{\frac{1}{2}} \{-k(1-t^2)\} dt \\
 &= k \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t^2) dt \\
 &= k \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= k \left(1 - \frac{1}{3} \right) - k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) = \frac{5k}{24}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{k}{3}\pi} \sin^3 \frac{x}{k} dx = \frac{5}{3} \text{이므로 } \frac{5k}{24} = \frac{5}{3}$$

따라서 $k=8$

답 8

15

$$\int_1^0 f(x^2) dx = k \text{로 놓으면 } f(x) = \sqrt{x} e^{x^{-1}} + k \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 k &= \int_1^0 f(x^2) dx \\
 &= \int_1^0 (x e^{x^2-1} + k) dx \\
 &= \int_1^0 x e^{x^2-1} dx + \int_1^0 k dx \\
 &= \int_1^0 x e^{x^2-1} dx - k
 \end{aligned}$$

$$x^2-1=t \text{로 놓으면 } 2x = \frac{dt}{dx} \text{이고}$$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=0$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 k &= \int_1^0 x e^{x^2-1} dx - k \\
 &= \int_0^{-1} \frac{1}{2} e^t dt - k \\
 &= \left[\frac{1}{2} e^t \right]_0^{-1} - k \\
 &= \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} - k
 \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}
 2k &= \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} \\
 k &= \frac{1}{4e} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \sqrt{x} e^{x^{-1}} + \frac{1}{4e} - \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{4e} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4e}$$

답 ⑤

16

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 2x \ln(x+1) dx + \int_0^1 \ln(x+1) dx \\
 &= \int_0^1 (2x+1) \ln(x+1) dx \\
 & u(x) = \ln(x+1), v'(x) = 2x+1 \text{로 놓으면} \\
 & u'(x) = \frac{1}{x+1}, v(x) = x^2+x \text{이므로} \\
 & \int_0^1 (2x+1) \ln(x+1) dx \\
 &= \left[(x^2+x) \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \left\{ (x^2+x) \times \frac{1}{x+1} \right\} dx \\
 &= 2 \ln 2 - \int_0^1 x dx \\
 &= 2 \ln 2 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\
 &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

17

$$\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$$

$$\frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } -\frac{1}{x^2} = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$x=1 \text{일 때 } t=1, x=2 \text{일 때 } t=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \int_1^2 \left\{ -\frac{1}{x} \times e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right\} dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}} (-te^t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 te^t dt \end{aligned}$$

$$u(t)=t, v'(t)=e^t \text{으로 놓으면}$$

$$u'(t)=1, v(t)=e^t \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 te^t dt = \left[te^t \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt \\ &= e - \frac{\sqrt{e}}{2} - \left[e^t \right]_{\frac{1}{2}}^1 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e}) \\ &= \frac{\sqrt{e}}{2} \end{aligned}$$

18

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \cos x + \sin x) \sin x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \sin x \cos x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx$$

$$\text{이므로 } \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx \text{에서}$$

$$u(x)=x, v'(x)=2 \sin x \cos x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=1, v(x)=\sin^2 x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx &= \left[x \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{3}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \cos x + \sin x) \sin x dx \\ = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

다른 풀이1

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \cos x + \sin x) \sin x dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \sin x \cos x + \sin^2 x) dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \end{aligned}$$

$$(2 \sin x \cos x = \sin 2x \text{이므로})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 2x dx \text{에서 } u(x)=x, v'(x)=\sin 2x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=1, v(x)=-\frac{1}{2} \cos 2x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 2x dx &= \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{2}{3}\pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin^2 x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \cos x + \sin x) \sin x dx \\ = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

다른 풀이2

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \cos x + \sin x) \sin x dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \sin x \cos x + \sin^2 x) dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx \text{에서}$$

$$u(x)=\sin^2 x, v'(x)=1 \text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=2 \sin x \cos x, v(x)=x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx &= \left[x \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx \\ &= \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x \cos x + \sin x) \sin x dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx + \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \cos x dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

19

$$\int_2^x xf(t)dt = x \sin \frac{\pi}{6}x + a \cos \frac{\pi}{6}x \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$0 = 2 \sin \frac{\pi}{3} + a \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{a}{2} \text{에서 } a = -2\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } \int_2^x xf(t)dt = x \sin \frac{\pi}{6}x - 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6}x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)dt + xf(x) = \sin \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{6}x \cos \frac{\pi}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \sin \frac{\pi}{6}x$$

위의 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} 0 + 2f(2) &= \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

따라서

$$f(2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$$

20

$$\int_1^x (x-t)f'(t)dt = x \ln x + ax^2 + b \text{에서}$$

$$\int_1^x xf'(t)dt - \int_1^x tf'(t)dt = x \ln x + ax^2 + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = a + b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = \ln x + 1 + 2ax$$

$$\int_1^x f'(t)dt = \ln x + 1 + 2ax \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + 2a \text{에서 } a = -\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } \int_1^x f'(t)dt = \ln x + 1 - x \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right) - f(1) = f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(t)dt \\ = \ln 2 + 1 - 2 = \ln 2 - 1$$

답 ③

21

$$\int_2^x f(t)dt = (3x^2 + 4)e^x + f(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$0 = 16e^2 + f(2) \text{에서 } f(2) = -16e^2$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \{6xe^x + (3x^2 + 4)e^x\} + f'(x) = e^x(3x^2 + 6x + 4) + f'(x)$$

$$f'(x) - f(x) = -(3x^2 + 6x + 4)e^x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

함수 $g(x) = e^{-x}f(x)$ 에서

$$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서}$$

$$e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = e^{-x}\{f'(x) - f(x)\} \\ = -(3x^2 + 6x + 4)$$

$$g'(x) = -(3x^2 + 6x + 4)$$

즉,

$$g(x) = -\int (3x^2 + 6x + 4)dx$$

$$= -x^3 - 3x^2 - 4x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(2) = -16e^2 \text{에서 } g(2) = e^{-2}f(2) = -16 \text{이므로 위의 등식의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$g(2) = -8 - 12 - 4 + C$$

$$-16 = -28 + C, C = 12$$

$$\text{따라서 } g(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \text{이므로}$$

$$g(1) = -1 - 3 - 4 + 12 = 4$$

답 ①

22

함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} \int_{\frac{1}{2}}^x f(t)dt = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} \int_{\frac{1}{2}}^x f(t)dt = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{2} F'\left(\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{1}{2} \times a \times \frac{5}{2} \times \ln \frac{1}{2} \\ = -\frac{5}{4} a \ln 2 = -1$$

$$\text{에서 } a = \frac{4}{5 \ln 2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{4}{5 \ln 2} (x+2) \ln x \text{이므로}$$

$$f(8) = \frac{4}{5 \ln 2} \times 10 \ln 8 = \frac{4}{5 \ln 2} \times 10 \times 3 \ln 2 = 24$$

답 24

23

함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x} \int_{k-x}^{k+x} f(t)dt \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{F(k+x) - F(k-x)}{x} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(k+x) - F(k) - F(k-x) + F(k)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \times \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(k+x) - F(k)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(k-x) - F(k)}{-x} \right\} \\ = -1 \times \{F'(k) + F'(k)\} = -2f(k)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x} \int_{k-x}^{k+x} f(t)dt = -4 \text{이므로}$$

$$-2f(k) = -4 \text{에서 } f(k) = 2$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + a}{x^2 + a + 1} \text{이므로}$$

$$\frac{k^2 + ak + a}{k^2 + a + 1} = 2, k^2 + ak + a = 2k^2 + 2a + 2$$

$$k^2 - ak + a + 2 = 0$$

위의 k 에 대한 이차방정식을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 곱이 8이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + 2 = 8, a = 6$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{x^2 + 6x + 6}{x^2 + 7} \text{이므로}$$

$$f(-1) = \frac{1 - 6 + 6}{1 + 7} = \frac{1}{8}$$

답 ①

참고

$$a = 6 \text{이면 } k^2 - 6k + 8 = 0, (k-2)(k-4) = 0$$

$$k = 2 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값은 2, 4이다.

답 ①

24

함수 $tf'(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\int_4^{x+4} (t-x)f'(t)dt &= \int_4^{x+4} tf'(t)dt - x \int_4^{x+4} f'(t)dt \\ &= G(x+4) - G(4) - x\{f(x+4) - f(4)\}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_4^{x+4} (t-x)f'(t)dt = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_4^{x+4} (t-x)f'(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x+4) - G(4) - x\{f(x+4) - f(4)\}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x+4) - G(4)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\{f(x+4) - f(4)\}}{x} \\ &= G'(4) - \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x+4) - f(4)\} \\ &= G'(4) - \{f(4) - f(4)\} \\ &= 4f'(4) = 1\end{aligned}$$

$$\text{여기서 } f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{ax+8}{\sqrt{x}} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x} - (ax+8) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{ax-8}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{4a-8}{16} = \frac{1}{4} \text{에서 } a=3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3x+8}{\sqrt{x}} \text{이므로}$$

$$f(4) = \frac{3 \times 4 + 8}{2} = 10$$

답 10

25

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n+k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+k} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)}{1 + \frac{k}{n}} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx\end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{1+x} = \frac{dt}{dx} \text{이고}$$

$$x=0 \text{일 때 } t=0, x=1 \text{일 때 } t=\ln 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n+k}} &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2)^2\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n+k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+k} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)}{1 + \frac{k}{n}} \right\} \\ &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2)^2\end{aligned}$$

26

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(1 + \frac{k}{2n}\right) \pi \cos \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \pi \right\} \\ &= 2\pi \int_0^1 \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2}x\right) \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ \sin \frac{\pi}{2}x = t \text{로 놓으면 } \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x = \frac{dt}{dx} \text{이고} \\ x=0 \text{일 때 } t=0, x=1 \text{일 때 } t=1 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(1 + \frac{k}{2n}\right) \pi \cos \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \pi \right\} \\ &= 2\pi \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ &= 2\pi \times \frac{2}{\pi} \int_0^1 t dt \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= 4 \times \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(1 + \frac{k}{2n}\right) \pi \cos \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \pi \right\} \\ &= 2\pi \int_0^1 \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2}x\right) \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ \text{이때 } 2 \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}x &= \sin \pi x \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(1 + \frac{k}{2n}\right) \pi \cos \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \pi \right\} \\ &= 2\pi \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ &= \pi \int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1\end{aligned}$$

$$= \pi \times \left\{ \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi} \right) \right\} = 2$$

다른 풀이2

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(1 + \frac{k}{2n} \right) \pi \cos \left(1 - \frac{k}{2n} \right) \pi \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(\pi + \frac{k\pi}{2n} \right) \cos \left(\pi - \frac{k\pi}{2n} \right) \right\} \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi + x) \cos(\pi - x) dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx \\ &= 4 \int_0^1 t dt \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= 4 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

다른 풀이3

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(1 + \frac{k}{2n} \right) \pi \cos \left(1 - \frac{k}{2n} \right) \pi \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(\pi + \frac{k\pi}{2n} \right) \cos \left(\pi - \frac{k\pi}{2n} \right) \right\} \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi + x) \cos(\pi - x) dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx \\ &\text{이때 } 2 \sin x \cos x = \sin 2x \text{ 이므로} \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{n} \sin \left(1 + \frac{k}{2n} \right) \pi \cos \left(1 - \frac{k}{2n} \right) \pi \right\} \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \times \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = 2 \end{aligned}$$

27

$y = \sqrt{x}$ 에서 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로 점 $P_k(x_k, \sqrt{x_k})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_k}}(x - x_k) + \sqrt{x_k}$$

위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_k}} \times (-x_k) + \sqrt{x_k} = \frac{1}{2}\sqrt{x_k}$$

$$Q_k\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{x_k}\right) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_k Q_k} &= \sqrt{(x_k - 0)^2 + \left(\sqrt{x_k} - \frac{1}{2}\sqrt{x_k}\right)^2} \\ &= \sqrt{x_k^2 + \frac{1}{4}x_k} \end{aligned}$$

점 P_k 를 지나고 점 P_k 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하

면 $\frac{1}{2\sqrt{x_k}} \times m = -1$ 에서

$$m = -2\sqrt{x_k}$$

점 P_k 를 지나고 점 P_k 에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y = -2\sqrt{x_k}(x - x_k) + \sqrt{x_k}$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$2\sqrt{x_k}x = 2x_k\sqrt{x_k} + \sqrt{x_k} \text{에서}$$

$$x = x_k + \frac{1}{2}$$

$$R_k\left(x_k + \frac{1}{2}, 0\right) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_k R_k} &= \sqrt{\left\{x_k - \left(x_k + \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + (\sqrt{x_k} - 0)^2} \\ &= \sqrt{x_k + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$S_k = \frac{1}{2} \times \overline{P_k Q_k} \times \overline{P_k R_k}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{x_k^2 + \frac{1}{4}x_k} \times \sqrt{x_k + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x_k \left(x_k + \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{1}{4}\right) \sqrt{x_k}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{3k}{n}\right) + \frac{1}{4} \right\} \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{3k}{n}\right) + \frac{1}{4} \right\} \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left[\left\{ \left(1 + \frac{3k}{n}\right) + \frac{1}{4} \right\} \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^4 \left(x + \frac{1}{4}\right) x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \frac{1}{6} \times \left(\frac{64}{5} + \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= \frac{32}{15} + \frac{2}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{36} = \frac{407}{180}$$

따라서 $p=180$, $q=407$ 이므로

$$p+q=180+407=587$$

587

28

$$\int (x-1)e^{1-x} dx$$

$$= -(x-1)e^{1-x} - \int (-e^{1-x}) dx$$

$$= -(x-1)e^{1-x} - e^{1-x} + C$$

$$= -xe^{1-x} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이고 $0 \leq x < 1$ 에서 $(x-1)e^{1-x} < 0$,

$$x \geq 1 \text{에서 } (x-1)e^{1-x} \geq 0$$

이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 |(x-1)e^{1-x}| dx \\ &= \int_0^1 \{-(x-1)e^{1-x}\} dx + \int_1^2 (x-1)e^{1-x} dx \\ &= \left[xe^{1-x} \right]_0^1 + \left[-xe^{1-x} \right]_1^2 \\ &= (1-0) + (-2e^{-1}+1) \\ &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

답 ③

29

$x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a = 0$ 에서 $\sqrt{x} = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (2a-1)t - 2a = 0$$

$$(t-1)(t+2a) = 0$$

이때 $a > 0$ 이고 $t \geq 0$ 이므로

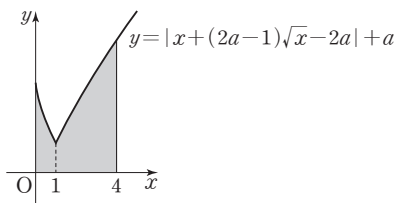
$$t=1, \text{ 즉 } x=1$$

$$0 \leq x < 1 \text{에서 } x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a < 0,$$

$$x \geq 1 \text{에서 } x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a \geq 0$$

이고, 곡선 $y = |x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a| + a$ 는 곡선

$y = |x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a|$ 를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



곡선 $y = |x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a| + a$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 15이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \{|x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a| + a\} dx \\ &= \int_0^4 |x + (2a-1)\sqrt{x} - 2a| dx + \int_0^4 a dx \\ &= \int_0^1 \{-x - (2a-1)x^{\frac{1}{2}} + 2a\} dx + \int_1^4 \{x + (2a-1)x^{\frac{1}{2}} - 2a\} dx + \int_0^4 a dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{2(2a-1)}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2ax \right]_0^1 \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2(2a-1)}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2ax \right]_1^4 + \left[ax \right]_0^4 \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{4a-2}{3} + 2a \right) \\ &\quad + \left(8 + \frac{32a-16}{3} - 8a \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{4a-2}{3} - 2a \right) + 4a \\ &= 8a + 3 = 15 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{3}{2}$$

답 ③

30

곡선 $y=g(x)$ 가 점 $(\sqrt{3}, 0)$ 을 지나므로

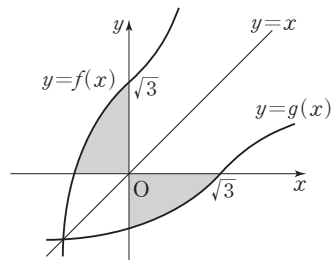
$$g(\sqrt{3})=0, f(0)=\sqrt{3}$$

$$f(x)=\tan x + a \text{에서}$$

$$f(0)=a=\sqrt{3}$$

즉, $f(x)=\tan x + \sqrt{3}$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 그림과 같고 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



$f(x)=0$ 에서

$$\tan x + \sqrt{3} = 0, \tan x = -\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{이므로} \right)$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (\tan x + \sqrt{3}) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3} \right) dx \\ &= \left[-\ln |\cos x| + \sqrt{3}x \right]_{-\frac{\pi}{3}}^0 \\ &= (-\ln 1 + 0) - \left(-\ln \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2 \end{aligned}$$

답 ①

31

$$x^2 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} \text{에서 } x^2 - \sqrt{x} = 0$$

$\sqrt{x} = t$ 로 놓으면

$$t^4 - t = 0, t(t-1)(t^2+t+1) = 0$$

$$t=0 \text{ 또는 } t=1, \text{ 즉 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

단한구간 $[0, 1]$ 에서 $x^2 + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x}$ 이므로 두 곡선

$y=x^2 + \sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |(x^2 + \sqrt{x}) - 2\sqrt{x}| dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=1$ 이므로

$$p+q=3+1=4$$

답 4

32

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 이므로

$$\sin 2x \cos x = 2 \sin x \cos^2 x$$

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 곡선 $y = \sin 2x \cos x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌

표를 a 라 하고 A 의 넓이를 S_1 , B 의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_1 = \int_0^a (\sin 2x \cos x - ax) dx,$$

$$S_2 = \int_a^{\frac{\pi}{2}} (ax - \sin 2x \cos x) dx$$

A 의 넓이와 B 의 넓이가 서로 같으므로

$$S_1 - S_2 = 0, \text{ 즉}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a (\sin 2x \cos x - ax) dx - \int_a^{\frac{\pi}{2}} (ax - \sin 2x \cos x) dx \\ = \int_0^a (\sin 2x \cos x - ax) dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x \cos x - ax) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x \cos x - ax) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x \cos^2 x - ax) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ax dx$$

$$\text{이때 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x dx \text{에서 } \cos x = t \text{로 놓으면 } -\sin x = \frac{dt}{dx}$$

이고 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x dx = \int_1^0 (-2t^2) dt = \left[-\frac{2}{3} t^3 \right]_1^0 = \frac{2}{3}$$

$$\text{한편, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} ax dx = \left[\frac{a}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2} \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8} a \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x \cos^2 x - ax) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ax dx \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{8} a = 0 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{16}{3\pi^2}$$

①

33

$$f(x) = \frac{17}{4} - 2^x - 2^{-x} \text{이라 하면}$$

$$f(-x) = \frac{17}{4} - 2^{-x} - 2^x = f(x)$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이다.

$\frac{17}{4} - 2^x - 2^{-x} = k$ 를 만족시키는 x 의 값 중 양수의 값을 a 라 하면

$$\int_{-a}^a \{f(x) - k\} dx = S_1, \int_0^a \{f(x) - k\} dx = \frac{1}{2} S_1$$

$$S_1 = 2S_2 \text{이므로 } \frac{1}{2} S_1 = S_2$$

$$\text{즉, } \int_0^a \{f(x) - k\} dx = \int_a^2 \{k - f(x)\} dx \text{이므로}$$

$$\int_0^a \{f(x) - k\} dx - \int_a^2 \{k - f(x)\} dx$$

$$= \int_0^a \{f(x) - k\} dx + \int_a^2 \{f(x) - k\} dx$$

$$= \int_0^2 \{f(x) - k\} dx = 0$$

$$\int_0^2 \left(\frac{17}{4} - 2^x - 2^{-x} - k \right) dx$$

$$= \left[\frac{17}{4} x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} - kx \right]_0^2$$

$$= \left(\frac{17}{2} - \frac{4}{\ln 2} + \frac{1}{4 \ln 2} - 2k \right) - \left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \right)$$

$$= \frac{17}{2} - \frac{15}{4 \ln 2} - 2k = 0$$

$$k = \frac{17}{4} - \frac{15}{8 \ln 2}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{17}{4}, q = -\frac{15}{8} \text{이므로}$$

$$8 \times (p+q) = 8 \times \left\{ \frac{17}{4} + \left(-\frac{15}{8} \right) \right\} = 19$$

19

34

x 축 위의 점 $(t, 0)$ ($\frac{1}{k} \leq t \leq k$)를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자

른 단면은 한 변의 길이가 $\frac{1}{t+1}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를

$S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$$

이고 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{1}{k}}^k S(t) dt = \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{(t+1)^2} dt$$

입체도형의 부피가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{(t+1)^2} dt &= \int_{\frac{1}{k+1}}^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{k+1}}^{k+1} \\ &= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{\frac{1}{k+1} + 1} \\ &= \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$k+1 = 2k-2$$

$$\text{따라서 } k=3$$

3

35

x 축 위의 점 $(t, 0)$ ($e \leq t \leq e^2$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른

단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{t} \ln t$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$

라 하면

$$S(t) = (\sqrt{t} \ln t)^2 = t(\ln t)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_e^{e^2} t(\ln t)^2 dt$$

$$u(t) = (\ln t)^2, v'(t) = t \text{로 놓으면}$$

$$u'(t) = \frac{2 \ln t}{t}, v(t) = \frac{1}{2} t^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_e^{e^2} t(\ln t)^2 dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^2 (\ln t)^2 \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \ln t dt \\
 &= \left(2e^4 - \frac{e^2}{2} \right) - \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{2} t dt \\
 &= \left(2e^4 - \frac{e^2}{2} \right) - \left(e^4 - \frac{e^2}{2} \right) + \left[\frac{1}{4} t^2 \right]_e^{e^2} \\
 &= e^4 + \left(\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4} \right) = \frac{5}{4} e^4 - \frac{e^2}{4}
 \end{aligned}$$

답 ④

36

$f(x) = \sin x \sqrt{\cos x}$ 에서

$$f'(x) = \cos x \sqrt{\cos x} + \sin x \times \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$f'(\alpha) = 0$ 에서

$$2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 과 연립하여 풀면

$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

이다. x 축 위의 점 $(t, 0)$ ($\frac{\pi}{6} \leq t \leq \alpha$)를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sin t \sqrt{\cos t}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = (\sin t \sqrt{\cos t})^2 = \sin^2 t \cos t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\alpha} \sin^2 t \cos t dt$$

$\sin t = s$ 로 놓으면 $\cos t = \frac{ds}{dt}$ 이고

$$t = \frac{\pi}{6} \text{일 때 } s = \frac{1}{2}, t = \alpha \text{일 때 } s = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\alpha} \sin^2 t \cos t dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} s^2 ds = \left[\frac{1}{3} s^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{2}{27}$, $q = -\frac{1}{24}$ 이므로

$$\frac{2}{p} - \frac{1}{q} = 27 - (-24) = 51$$

답 51

37

$\frac{dx}{dt} = 10t^{\frac{1}{4}}$, $\frac{dy}{dt} = 5t^{\frac{1}{2}} - 5$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= (10t^{\frac{1}{4}})^2 + (5t^{\frac{1}{2}} - 5)^2 \\
 &= 100t^{\frac{1}{2}} + (25t - 50t^{\frac{1}{2}} + 25)
 \end{aligned}$$

$$= 25(t + 2t^{\frac{1}{2}} + 1) = 25(t^{\frac{1}{2}} + 1)^2$$

따라서 $t=1$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt &= \int_1^4 |5(t^{\frac{1}{2}} + 1)| dt \\
 &= \left[\frac{10}{3} t^{\frac{3}{2}} + 5t \right]_1^4 \\
 &= \left(\frac{80}{3} + 20 \right) - \left(\frac{10}{3} + 5 \right) = \frac{115}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

38

$\frac{dx}{dt} = 4 \cos t + 4 \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 4 \sin t \cos t$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= (4 \cos t + 4 \sin t)^2 + (4 \sin t \cos t)^2 \\
 &= 16 + 32 \sin t \cos t + 16 \sin^2 t \cos^2 t \\
 &= \{4(1 + \sin t \cos t)\}^2
 \end{aligned}$$

단한구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 에서 $\sin t \cos t \geq 0$ 이므로

$$4(1 + \sin t \cos t) > 0 \text{이다.}$$

$t = \frac{\pi}{4}$ 에서 $t = \frac{\pi}{2}$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4(1 + \sin t \cos t) dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4 dt + 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt
 \end{aligned}$$

$4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt$ 에서 $\sin t = s$ 로 놓으면 $\cos t = \frac{ds}{dt}$ 이고

$t = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $s = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4 dt + 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt \\
 &= \left[4t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 4 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 s ds \\
 &= \pi + 4 \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \pi + 1
 \end{aligned}$$

답 ①

39

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ 2 \ln \left(\cos \frac{t}{2} \right) \right\}$$

$$= 2 \times \frac{-\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\tan \frac{t}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} - 1 \right)^2 + \left(-\tan \frac{t}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} \sec^4 \frac{t}{2} - \sec^2 \frac{t}{2} + 1 + \tan^2 \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sec^4 \frac{t}{2} - \sec^2 \frac{t}{2} + \sec^2 \frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{4} \sec^4 \frac{t}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서 $t = \frac{2}{3}\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left| \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \right| dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} dt \\
&= \left[\tan \frac{t}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \\
&= \tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6} \\
&= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

40

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = x - \frac{1}{4x}$$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}
\int_1^e \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2} dx \\
&= \int_1^e \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}} dx \\
&= \int_1^e \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx \\
&= \int_1^e \left|x + \frac{1}{4x}\right| dx \\
&= \int_1^e \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \ln |x| \right]_1^e \\
&= \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{2e^2 - 1}{4}
\end{aligned}$$

41

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)^2} dx \\
&= \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-3}} dx \\
&= \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)^2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 \left| \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \right| dx \\
&= \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right]_1^4 \\
&= \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{5} - 1\right) = \frac{67}{10}
\end{aligned}$$

따라서 $p=10$, $q=67$ 이므로

$$p+q=10+67=77$$

답 77

42

$$f(x) = 2x\sqrt{x} = 2x^{\frac{3}{2}} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

이므로 $x = \frac{1}{3}$ 에서 $x = a$ ($a > \frac{1}{3}$)까지의 곡선 $y = 2x\sqrt{x}$ 의 길이는

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{3}}^a \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_{\frac{1}{3}}^a \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2} dx \\
&= \int_{\frac{1}{3}}^a \sqrt{9x+1} dx \\
9x+1 &= t \text{로 놓으면 } 9 = \frac{dt}{dx} \text{이고} \\
x = \frac{1}{3} \text{일 때 } t &= 4, \quad x = a \text{일 때 } t = 9a+1 \text{이므로} \\
\int_{\frac{1}{3}}^a \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_4^{9a+1} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{9} dt \\
&= \left[\frac{1}{9} \times \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_4^{9a+1} \\
&= \frac{2}{27} (9a+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{27} = \frac{38}{27}
\end{aligned}$$

$$(9a+1)^{\frac{3}{2}} = 3^3$$

$$\sqrt{9a+1} = 3$$

$$9a+1=9$$

$$\text{따라서 } a = \frac{8}{9}$$

답 ④

답 ③

답 ④



실전편

실전 모의고사 1회

본문 130~137쪽

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ③	08 ③	09 ②	10 ②
11 ②	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 8	17 29	18 4	19 14	20 9
21 383	22 31	23 ③	24 ③	25 ②
26 ④	27 ①	28 ③	29 7	30 57

01

$$(\sqrt[3]{4})^{\log_2 27} = (\sqrt[3]{2^2})^{\log_2 3^3} = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{3 \log_2 3} = 2^{2 \log_2 3} \\ = 2^{\log_2 9} = 9^{\log_2 2} = 9$$

답 ⑤

02

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1 \text{에서} \\ f'(x) = 6x^2 + 8x \\ \text{따라서 } f'(1) = 6 + 8 = 14$$

답 ③

03

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{이 성립해야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x + a) = 4 + a$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2 \text{에서}$$

$$2 = 4 + a$$

$$\text{따라서 } a = -2$$

답 ①

04

$$\tan \theta = \frac{a}{2} = -2 \text{에서 } a = -4$$

원의 반지름의 길이는 원점과 점 $(2, -4)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{\cos \theta} = \frac{-4}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -4\sqrt{5}$$

답 ①

05

세 수 $4, a, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 4b \quad \dots\dots ㉠$$

세 수 $\log_2 3, \log_2 a, \log_2 (b+1)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \log_2 a = \log_2 3 + \log_2 (b+1)$$

$$\log_2 a^2 = \log_2 \{3(b+1)\}$$

$$a^2 = 3(b+1) \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } 4b = 3(b+1), b = 3$$

$$b = 3 \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면 } a^2 = 12$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } ab = 2\sqrt{3} \times 3 = 6\sqrt{3}$$

답 ⑤

06

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, f(3) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + f(3) = 1 + 1 + 0 = 2$$

답 ①

07

 $g(k) = l$ 이라 하면

$$(f \circ g)(k) = f(g(k)) = f(l) = 2 \text{에서 } 1 \leq \sqrt{l} < 2$$

$$1 \leq l < 4$$

그런데 l 의 값은 정수이므로 $l = 1$ 또는 $l = 2$ 또는 $l = 3$

$$g(k) = 1 \text{에서 } 0 < \sqrt[3]{k} < 1 \text{이므로 } 0 < k < 1$$

$$g(k) = 2 \text{에서 } 1 \leq \sqrt[3]{k} < 2 \text{이므로 } 1 \leq k < 8$$

$$g(k) = 3 \text{에서 } 2 \leq \sqrt[3]{k} < 3 \text{이므로 } 8 \leq k < 27$$

$$\text{따라서 } 0 < k < 27$$

$$\alpha = 0, \beta = 27 \text{이므로 } \alpha + \beta = 0 + 27 = 27$$

답 ③

08

$$\int_a^x f(t) dt = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 $x = a$ 를 대입하면

$$\int_a^a f(t) dt = a^3 + 2a^2 - a - 2 = 0$$

$$a^3 + 2a^2 - a - 2 = a^2(a+2) - (a+2)$$

$$= (a+2)(a^2-1)$$

$$= (a+2)(a-1)(a+1) = 0$$

에서 $a > 0$ 이므로 $a = 1$ ㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

$$\text{따라서 } a + f(1) = 1 + (3 + 4 - 1) = 7$$

답 ③

09

함수 $y = 2^{x+a}$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $y = 2^a$ 이므로점 A의 좌표는 $(0, 2^a)$ 함수 $y = \log_2(x+1) - a$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 $x = 2^a - 1$ 이므로점 B의 좌표는 $(2^a - 1, 0)$

$\angle AOB=90^\circ$ 이므로 세 점 A, B, O를 지나는 원의 지름은 선분 AB이다.

$$\pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2=\frac{13}{4}\pi\text{이므로 }\overline{AB}^2=13$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \\ &= (2^a)^2 + (2^a - 1)^2 = 13\end{aligned}$$

$2^a = t$ ($t > 0$)이라 하면

$$t^2 + (t-1)^2 = 13$$

$$2t^2 - 2t - 12 = 0, \quad t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t+2)(t-3) = 0$$

$t > 0$ 이므로 $t = 3$

따라서 $2^a = 3$ 에서 $a = \log_2 3$

답 ②

10

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

또한 $f(x)$ 는 다항함수로 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

마찬가지로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = k$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이다.

그러므로 $f(x)$ 는 $x, x-1$ 을 인수로 가진다.

$f(x) = x(x-1)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(x-1)(ax+b)\} = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \{x(ax+b)\} = a+b$$

이므로 $k = -b = a+b$

이때 k 는 양수이므로

$$a = -2b, \quad a > 0, \quad b < 0$$

..... ㉠

$$\begin{aligned}f(x-1) &= (x-1)(x-1-1)(ax-a+b) \\ &= (x-1)(x-2)(ax-a+b)\end{aligned}$$

$$f(x)f(x-1) = x(x-1)^2(x-2)(ax+b)(ax-a+b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2} = 4\text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{x(x-2)(ax+b)(ax-a+b)\} = -(a+b)b = 4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a = 4, \quad b = -2, \quad k = 2$$

따라서 $f(x) = x(x-1)(4x-2)$ 이므로

$$f(k) = f(2) = 2 \times 1 \times 6 = 12$$

답 ②

11

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 3a_2 - S_1$$

$$= 3a_2 - a_1$$

$$= 3 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4$$

(우변) = 4

이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$(k+2)a_{k+1} - S_k = k+3$$

$$(k+2)a_{k+1} - S_k + a_{k+1} - a_{k+1} = k+3$$

$$(\boxed{k+3})a_{k+1} - S_{k+1} = k+3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_{k+2} = a_{k+1} + \frac{1}{k+3} \text{에서 } a_{k+1} = a_{k+2} - \frac{1}{k+3} \text{이므로}$$

㉠에 이 식을 대입하면

$$(k+3)\left(a_{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) - S_{k+1} = k+3$$

$$(k+3)a_{k+2} - 1 - S_{k+1} = k+3$$

$$(k+3)a_{k+2} - S_{k+1} = \boxed{k+4}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+2)a_{n+1} - S_n = n+3$$

이다.

이상에서 $f(k) = k+3, g(k) = \frac{1}{k+3}, h(k) = k+4$ 이므로

$$\frac{f(12) \times g(2)}{h(2)} = \frac{15 \times \frac{1}{5}}{6} = \frac{1}{2}$$

답 ②

12

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 이차함수 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 3이고, $f'(x)$ 가 $x=1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$f'(x) = 3(x-1)^2 - 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 - 6x + 2) dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = 6 \text{에서 } C = 6$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$$

$f(1) = 1 - 3 + 2 + 6 = 6$ 이므로 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$$y - 6 = -(x - 1)$$

$$y = -x + 7$$

이 접선이 점 $(-10, a)$ 를 지나므로

$$a = -(-10) + 7 = 17$$

답 ④

13

점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$\overline{AB} = \log_2(a+1) - \log_4 a$$

$$= \log_4(a+1)^2 - \log_4 a$$

$$= \log_4 \frac{(a+1)^2}{a}$$

$t > 0$ 일 때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{(t+1)^2}{t} = \frac{t^2 + 2t + 1}{t} = t + \frac{1}{t} + 2 \geq 2\sqrt{t \times \frac{1}{t}} + 2 = 4$$

이때 등호는 $t = \frac{1}{t}$, 즉 $t=1$ 일 때 성립한다.

즉, $a > 0$ 일 때 $\overline{AB} = \log_4 \frac{(a+1)^2}{a}$ 의 최솟값은 $a=1$ 일 때 1이다.

따라서 $0 < a < 1$ 일 때 $\overline{AB} > 1$ 이므로 자연수 k 는 2, 3, 4, ...이고 $l=2$ 이다.

자연수 k ($k=2, 3, 4, \dots$)에 대하여 두 점 A_k, D_k 의 x 좌표를 각각 a_k, b_k 라 하면 두 점 A_k, D_k 의 y 좌표는 서로 같으므로

$$\log_2(a_k+1) = \log_2 b_k$$

$$(a_k+1)^2 = b_k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB 의 길이가 자연수 k 일 때 점 B 를 B_k 라 하면

$$\overline{A_k B_k} = \log_4 \frac{(a_k+1)^2}{a_k} = k \text{에서 } \frac{(a_k+1)^2}{a_k} = 4^k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+9} \frac{C_k D_k}{C_k A_k} &= \sum_{k=2}^{11} \frac{b_k}{a_k} = \sum_{k=2}^{11} \frac{(a_k+1)^2}{a_k} \\ &= \sum_{k=2}^{11} 4^k = \frac{4^2(4^{10}-1)}{4-1} = \frac{2^{24}-16}{3} \end{aligned}$$

답 ④

참고

$$\overline{AB} = \log_4 \frac{(a+1)^2}{a} = k \text{에서 } \frac{(a+1)^2}{a} = 4^k \quad (k=2, 3, 4, \dots)$$

$$a^2 + 2a + 1 = 4^k a, \quad a^2 + 2(1-2^{2k-1})a + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= -(1-2^{2k-1}) \pm \sqrt{(1-2^{2k-1})^2 - 1} \\ &= (2^{2k-1}-1) \pm \sqrt{(2^{2k-1}-1)^2 - 1} \end{aligned}$$

$2^{2k-1}-1=p$ 라 하면 $k \geq 2$ 이므로 $p \geq 7$ 이다.

따라서 $k=2, 3, 4, \dots$ 일 때, $0 < a < 1$ 을 만족시키는

$a = p - \sqrt{p^2-1}$ 의 값이 반드시 존재한다.

14

방정식 $\tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) - \sin 2nx = 0$ 의 실근은 두 함수

$y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right), y = \sin 2nx$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

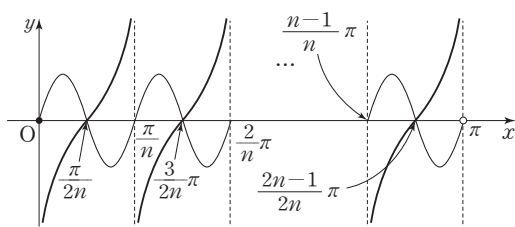
함수 $y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) = \tan n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)$ 의 그래프는 함수

$y = \tan nx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$ 만큼 평행이동한 것이고,

함수 $y = \tan nx$ 의 주기는 $\frac{\pi}{n}$ 이다.

또한 함수 $y = \sin 2nx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ 이다.

따라서 $0 \leq x < \pi$ 에서 두 함수 $y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right), y = \sin 2nx$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 두 그래프가 만나는 점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3}{2n}\pi, \frac{5}{2n}\pi, \dots, \frac{2n-1}{2n}\pi$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\pi}{2n} \{1+3+5+\dots+(2n-1)\} \\ &= \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n (2k-1) = \frac{\pi}{2n} \left\{ 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \\ &= \frac{\pi}{2n} \times n^2 = \frac{\pi}{2} n \end{aligned}$$

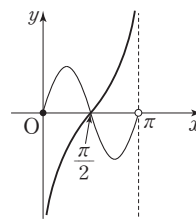
이므로

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} \frac{\pi}{2} k = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{12} k = \frac{\pi}{2} \times \frac{12 \times 13}{2} = 39\pi$$

답 ⑤

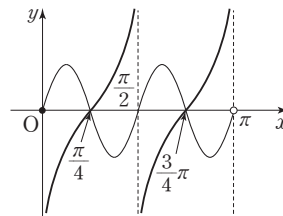
참고

$n=1$ 일 때 두 함수 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right), y = \sin 2x$ 의 그래프는 다음과 같다.



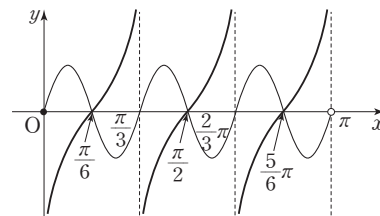
두 그래프의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 $a_1 = \frac{\pi}{2}$

$n=2$ 일 때 두 함수 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right), y = \sin 4x$ 의 그래프는 다음과 같다.



두 그래프의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ 이므로 $a_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi = \pi$

$n=3$ 일 때 두 함수 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \tan 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right), y = \sin 6x$ 의 그래프는 다음과 같다.



두 그래프의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$a_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

⋮

따라서 $n=k$ 일 때 $a_k = \frac{k}{2}\pi$

15

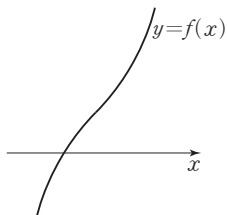
$$f(x) = x^3 - 3ax + a^2 + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$$

(i) $a \leq 0$ 일 때

$f'(x) \geq 0$ 에서 $f(x)$ 는 증가하는 함수이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(1)$ 이다.

$$g(a) = f(1) = 1 - 3a + a^2 + a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$



(ii) $a > 0$ 일 때

$f'(x) = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$ 에서 $x = -\sqrt{a}$ 또는 $x = \sqrt{a}$ 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

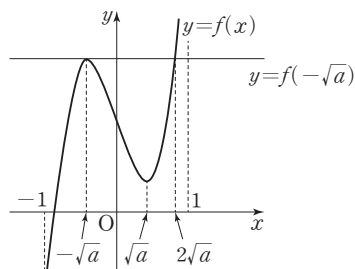
x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$f(-\sqrt{a}) = -a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} + a^2 + a = 2a\sqrt{a} + a^2 + a \text{ 이고}$$

$$f(x) - f(-\sqrt{a}) = x^3 - 3ax - 2a\sqrt{a} = (x + \sqrt{a})^2(x - 2\sqrt{a})$$

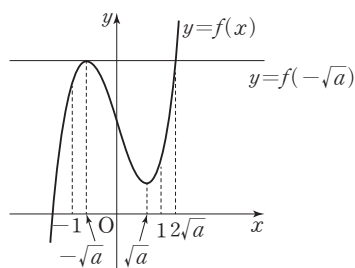
$$\text{이므로 } f(-\sqrt{a}) = f(2\sqrt{a})$$

(가) $0 < 2\sqrt{a} \leq 1$, 즉 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 일 때



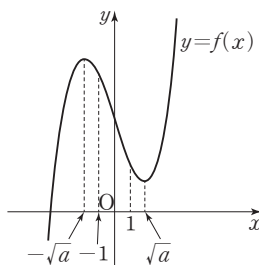
$$g(a) = f(1) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

(나) $\sqrt{a} \leq 1 < 2\sqrt{a}$, 즉 $\frac{1}{4} < a \leq 1$ 일 때



$$g(a) = f(-\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} + a^2 + a = a(\sqrt{a} + 1)^2$$

(다) $1 < \sqrt{a}$ 일 때, 즉 $a > 1$ 일 때



$$g(a) = f(-1) = -1 + 3a + a^2 + a = a^2 + 4a - 1$$

$$\text{그러므로 (i), (ii)에서 } g(a) = \begin{cases} (a-1)^2 & (a \leq \frac{1}{4}) \\ a(\sqrt{a}+1)^2 & (\frac{1}{4} < a \leq 1) \\ a^2+4a-1 & (a > 1) \end{cases}$$

$$\neg. g(2) = 4 + 8 - 1 = 11 \text{ (참)}$$

ㄴ. 함수 $g(a)$ 는 $a < \frac{1}{4}$ 일 때 감소하고 $a > \frac{1}{4}$ 일 때 증가하므로

$a = \frac{1}{4}$ 일 때 극소이면서 최소가 된다. 따라서 최솟값은

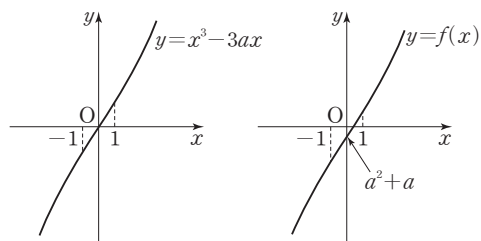
$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ (참)}$$

ㄷ. 함수 $f(x) = x^3 - 3ax + a^2 + a$ 의 그래프는 함수 $y = x^3 - 3ax$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $a^2 + a$ 만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y = x^3 - 3ax$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은

$$a^2 + a \geq 0, \text{ 즉 } a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 0 \text{일 때}$$

$$h(a) = g(a)$$

$-1 < a < 0$ 일 때 $f(x)$ 는 증가하는 함수이므로



$$h(a) = |f(-1)| = |a^2 + 4a - 1| \text{ 이므로}$$

$$h(a) = \begin{cases} (a-1)^2 & (a \leq -1) \\ |a^2 + 4a - 1| & (-1 < a < 0) \\ (a-1)^2 & (0 \leq a \leq \frac{1}{4}) \\ a(\sqrt{a}+1)^2 & (\frac{1}{4} < a \leq 1) \\ a^2+4a-1 & (a > 1) \end{cases}$$

$$\text{에서 } h\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{4} - 2 - 1\right| = \frac{11}{4}, h(1) = 1 \times 4 = 4$$

$$\text{그러므로 } h\left(-\frac{1}{2}\right) + h(1) = \frac{27}{4} \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, ㄴ 이다.

답 ③

16

$$\int_0^1 (4x^3 + 6x^2 + 5) dx = \left[x^4 + 2x^3 + 5x \right]_0^1 = 1 + 2 + 5 = 8$$

답 8

17

$S_{n+2} - S_n = 3a_{n+1} - a_n$ 에서

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 3a_{n+1} - a_n$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

$$S_{10} = \frac{10 \times (a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \times (1 + a_{10})}{2} = 150$$

이므로 $a_{10} = 29$

29

18

$x = 2t^3 - 2t^2$ 에서 점 P의 시간 t 에서의 속도 v 는

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 4t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v = 0 \text{에서 } 2t(3t - 2) = 0$$

$$t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}$$

$0 < t < \frac{2}{3}$ 일 때 $v < 0$, $t > \frac{2}{3}$ 일 때 $v > 0$ 이므로 출발 후 $t = \frac{2}{3}$ 일 때 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 4$$

이므로 $t = \frac{2}{3}$ 일 때 가속도는

$$12 \times \frac{2}{3} - 4 = 8 - 4 = 4$$

4

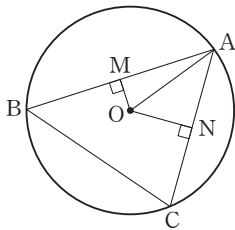
19

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에서

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$

$$R = \frac{\overline{AB}}{2 \sin C} = \frac{8\sqrt{2}}{2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}} = 6$$

원의 중심 O에서 두 현 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자.



직각삼각형 OAM에서

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\overline{OM} : \overline{ON} = 1 : 2 \text{이므로 } \overline{ON} = 4$$

직각삼각형 OAN에서

$$\overline{AN} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{ON}^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } \overline{AC} = 2\overline{AN} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{이므로 사인법칙에서 } \frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R$$

$$\sin B = \frac{\overline{AC}}{2R} = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \sin^2 B = \frac{5}{9}$$

$$p = 9, q = 5 \text{이므로 } p + q = 9 + 5 = 14$$

14

20

삼차방정식 $x^3 - px^2 + (2p^2 - 3p)x + q + 1 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$f(x) = x^3 - px^2 + (2p^2 - 3p)x + q + 1$ 이라 하면 방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지고, 함수 $f(x)$ 의 두 극값의 부호가 다르다.

$f'(x) = 3x^2 - 2px + (2p^2 - 3p) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = p^2 - 3(2p^2 - 3p) > 0$$

$$-5p^2 + 9p > 0, p(5p - 9) < 0$$

$$0 < p < \frac{9}{5}$$

p 는 정수이므로 $p = 1$

$f(x) = x^3 - x^2 - x + q + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + q + 1 = q + \frac{32}{27}$$

$$f(1) = 1 - 1 - 1 + q + 1 = q$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$$q\left(q + \frac{32}{27}\right) < 0 \text{에서 } -\frac{32}{27} < q < 0$$

q 는 정수이므로 $q = -1$

$$\text{따라서 } 10p + q = 10 \times 1 - 1 = 9$$

9

21

$a_{18} = 32$ 이므로 $a_{17} = 16$ 또는 $a_{17} = 2^{32}$ 이다.

그런데 $a_1 = 1$ 이므로 a_n 의 정의에 의하여 $a_{17} = 2^{32}$ 은 성립할 수 없다.

따라서 $a_{17} = 16$ 이므로 $p \geq 16$ 이다.

$p = 16$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	2	4	8	16	32	5	10	20	$\log_2 20$	...

이때 $a_{10} = \log_2 20$ 이 되어 그 값이 무리수이므로 $a_{18} = 32$ 가 될 수 없다.

따라서 a_{18} 의 값이 $32 = 2^5$ 이 되려면 p 의 최솟값 m 이 2^k (k 는 자연수) 꼴이 되어야 하고 우선 다음 조건을 모두 만족시켜야 한다.

(i) $m = 2^k > 16$

(ii) $\log_2 2m = \log_2 2^{k+1} = k + 1$ 이므로 $a_{18} = 32$ 가 되려면 $k + 1$ 의 값은 2의 거듭제곱꼴이어야 한다.

(i), (ii)를 모두 만족시키는 k 의 값은 7, 15, 31, 63, ...

그런데 $k = 15$, 즉 $m = 2^{15}$ 이면 $a_{17} = 2^{16}$, $a_{18} = 16$ 이므로 만족시키지 않는다.

또한 $k = 31, 63, \dots$ 이면 $a_{18} > 32$ 이므로 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 p 의 최솟값은 $k = 7$ 일 때이므로 $m = 2^7 = 128$ 이고 그때의 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
a_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	8	16	32	64	128	256	8	16	32	...

따라서 조건을 만족시키는 p 의 값의 범위는 $2^7 \leq p < 2^8$ 이다.

자연수 p 의 최댓값 $M=255$ 이므로

$$M+m=255+128=383$$

답 383

22

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 0을 가지므로 $a < 2$ 인 상수 a 에 대하여

$$f(x) = (x-2)^2(x-a)$$

로 나타낼 수 있다.

$\{(x-2)f(x)\}' = f(x) + (x-2)f'(x)$ 이므로 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \{f(x) + (x-2)f'(x)\} dx \\ &= \int \{(x-2)f(x)\}' dx \\ &= (x-2)f(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } g(x) &= (x-2)^3(x-a) + C \\ &= (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(x-a) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x^2 - 12x + 12)(x-a) + (x-2)^3 \\ &= 3(x-2)^2(x-a) + (x-2)^3 \\ &= (x-2)^2\{3(x-a) + x-2\} \\ &= (x-2)^2(4x-3a-2) \end{aligned}$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=2 \text{ 또는 } x=\frac{3a+2}{4}$$

$$a < 2 \text{에서 } x=\frac{3a+2}{4} < 2 \text{이므로}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{3a+2}{4}$	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $g(x)$ 는 $x=\frac{3a+2}{4}$ 에서 극소이면서 최소이므로

조건 (다)에서

$$x=\frac{3a+2}{4}=\frac{1}{2} \text{에서 } a=0$$

$$f(x) = x(x-2)^2$$

$$g(x) = x(x-2)^3 + C$$

이고

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{27}{8}\right) + C = -\frac{27}{16} + C = -\frac{3}{4}$$

$$\text{에서 } C = \frac{15}{16}$$

$$g(x) = x(x-2)^3 + \frac{15}{16}$$

$$\text{따라서 } f(1) + g(1) = 1 + \left(-1 + \frac{15}{16}\right) = \frac{15}{16}$$

이므로 $p=16$, $q=15$ 이고

$$p+q=16+15=31$$

답 31

23

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+6n}-2n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2+6n)-4n^2}{\sqrt{4n^2+6n}+2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{\sqrt{4n^2+6n}+2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{4+\frac{6}{n}}+2} \\ &= \frac{6}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ③

24

점 Q_n 의 y 좌표는 a^n 이므로 점 Q_n 의 x 좌표를 a 라 하면

$$a^{-2a} = a^n \text{에서 } -2a = n \text{이므로 } a = -\frac{n}{2}$$

$$\overline{P_n Q_n} = n - \left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{3}{2}n \text{이므로 } l_n = \frac{3}{2}n$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n l_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{3}{2}n \times \frac{3}{2}(n+1)} \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{4}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{4}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{4}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{4}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

답 ③

25

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx \text{에서}$$

$$\sqrt{x}+1=t \text{로 놓으면 } \sqrt{x}=t-1, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{dt}{dx} \text{이고}$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx &= \int_1^2 \left(2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{2(t-1)}{t} dt \\ &= 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= 2 \left[t - \ln |t| \right]_1^2 \\ &= 2(2 - \ln 2) - 2(1 - 0) \\ &= 2 - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

답 ②

26

함수 $y=f(f(x))$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(f(f(x)))=x$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(f(x))) \times f'(f(x)) \times f'(x) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 \leq x \leq 1$ 일 때, $0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{4} \text{이므로 } x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{6} \text{이므로 } x = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로 } g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

①에 $x = \frac{1}{3}$ 을 대입하면

$$g'\left(f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) \times f'\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \times f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times f'\left(\frac{1}{2}\right) \times f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \times \frac{\sqrt{3}}{4}\pi = 1$$

$$\text{따라서 } g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{16}{\sqrt{6}\pi^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3\pi^2}$$

답 ④

27

$f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, $g(x) = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)이라 하자.

곡선 $y=f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록인 곡선이고 곡선 $y=g(x)$ 는 $x \geq 0$ 인 실수 전체의 집합에서 위로 볼록인 곡선이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 오직 한 점 $P(t, f(t))$ 에서 만나면 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같다.

즉, $f(t) = g(t)$, $f'(t) = g'(t)$ 이다.

$$f(t) = g(t) \text{에서 } e^{\frac{t}{3}} = \sqrt{at} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}, g'(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} \text{이므로 } f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}$$

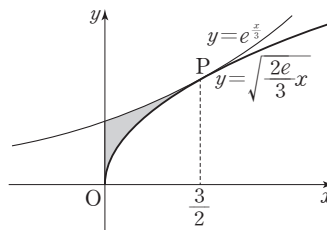
$$e^{\frac{t}{3}} = \frac{3\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\sqrt{at} = \frac{3\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}, t = \frac{3}{2}$$

$t = \frac{3}{2}$ 을 ①에 대입하여 풀면

$$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3a}{2}}, a = \frac{2}{3}e$$

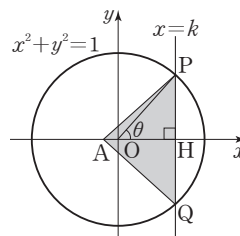


따라서 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$, $y=\sqrt{\frac{2e}{3}x}$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{x}{3}} - \sqrt{\frac{2e}{3}x} \right) dx \\ &= \left[3e^{\frac{x}{3}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2e}{3}x} x \sqrt{x} \right]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= (3\sqrt{e} - \sqrt{e}) - 3 \\ &= 2\sqrt{e} - 3 \end{aligned}$$

답 ①

28



직선 $x=k$ 가 x 축과 만나는 점을 H 라 하고, 원점 O 에 대하여

$\angle POH = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면 점 P의 좌표를 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 로 놓을 수 있다. 이때

$$\overline{PQ} = 2 \sin \theta, \overline{AH} = \frac{1}{6} + \cos \theta$$

삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \times \left(\frac{1}{6} + \cos \theta \right) \\ &= \left(\frac{1}{6} + \cos \theta \right) \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= (-\sin \theta) \times \sin \theta + \left(\frac{1}{6} + \cos \theta \right) \cos \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta + \frac{1}{6} \cos \theta - 1 \\ &= \frac{1}{6} (3 \cos \theta - 2) (4 \cos \theta + 3) \end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } S'(\theta) = 0 \text{에서 } \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$\cos \theta = \frac{2}{3}$ 를 만족시키는 θ 의 값을 α 라 하면

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	...	α	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		↗	극대(최대)	↘	

실전 모의고사 2회

본문 138~145쪽

01 ④	02 ④	03 ②	04 ③	05 ③
06 ①	07 ①	08 ②	09 ②	10 ③
11 ②	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ⑤
16 60	17 10	18 80	19 8	20 35
21 330	22 32	23 ③	24 ③	25 ④
26 ②	27 ③	28 ⑤	29 15	30 5

01

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{2^4} \times (2^{-1})^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \\
 &= 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \\
 &= 2^1 = 2
 \end{aligned}$$

답 ④

02

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 (3x^2 - 2x + 1) dx &= 2 \int_0^2 (3x^2 + 1) dx \\
 &= 2 \left[x^3 + x \right]_0^2 \\
 &= 2 \times (8 + 2) = 20
 \end{aligned}$$

답 ④

03

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} (3a_k - b_k) &= 3 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k \\
 &= 3 \times 5 - 8 = 7
 \end{aligned}$$

답 ②

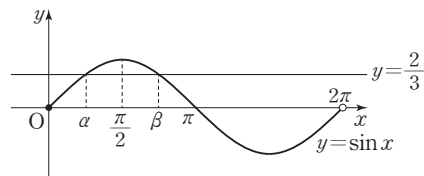
04

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \text{ 이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 1 + 2 = 3
 \end{aligned}$$

답 ③

05

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ 이므로} \\
 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \tan x &= 2 \text{ 에서} \\
 3 \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} &= 2 \\
 \sin x &= \frac{2}{3} \quad (\text{단, } \cos x \neq 0) \\
 0 \leq x < 2\pi \text{ 에서 } \sin x = \frac{2}{3} \text{ 의 두 실근을 } \alpha, \beta \text{ 라 하면} \\
 \sin(\pi - x) &= \sin x \text{ 이므로} \\
 \alpha + \beta &= \pi
 \end{aligned}$$



답 ③

06

시간 t 일 때의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 라 하면
 $v_1(t) = f'(t) = t^2 + 2t + 1$, $v_2(t) = g'(t) = 6t - 3$
 $v_1(t) = v_2(t)$ 에서 $t^2 + 2t + 1 = 6t - 3$, $t^2 - 4t + 4 = 0$
 $(t-2)^2 = 0$

$$t = 2$$

시간 t 일 때의 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$ 라 하면
 $a_1(t) = v_1'(t) = 2t + 2$, $a_2(t) = v_2'(t) = 6$
 따라서 $t = 2$ 일 때, 두 점 P, Q의 가속도의 합은
 $a_1(2) + a_2(2) = 6 + 6 = 12$

답 ①

07

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x \text{ 이므로}$$

$$(\log_2 x)^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x - 8 = 0 \text{ 에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8 = 0$$

$$(\log_2 x - 4)(\log_2 x + 2) = 0$$

$$\log_2 x = 4 \text{ 또는 } \log_2 x = -2$$

$$x = 2^4 \text{ 또는 } x = 2^{-2} \text{ ㉡}$$

㉡은 ㉠을 모두 만족시키므로 모든 실근의 곱은

$$2^4 \times 2^{-2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

답 ①

다른 풀이

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x \text{ 이므로}$$

$$(\log_2 x)^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x - 8 = 0 \text{ 에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8 = 0 \text{ ㉠}$$

$$\log_2 x = t \text{ 라 하면}$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \text{ ㉡}$$

이차방정식 ㉡의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times (-8) > 0$$

이므로 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 ㉠도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉠의 서로 다른 두 실근을 α , β 라 하면 ㉡의 서로 다른 두 실근은

$\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$ 이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2$$

$$\log_2 \alpha \beta = 2$$

$$\alpha \beta = 2^2 = 4$$

따라서 모든 실근의 곱은 4이다.

08

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)+2}{h} = 1$ 에서 $h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(2+2h)+2\} = f(2)+2=0$ 에서 $f(2) = -2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} \times 2 = 2f'(2) = 1$$

이므로 $f'(2) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2)-xf(x)+xf(x)-2f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x\{f(x)-f(2)\}+(x-2)f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{-x\{f(x)-f(2)\}}{x-2} + f(x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (-x) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= -2f'(2) + f(2) \\ &= -2 \times \frac{1}{2} + (-2) = -3 \end{aligned}$$

답 ②

09

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$\angle CDA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 19 \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

삼각형 ACD에서 $\overline{AD} = x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos 120^\circ \\ &= 4 + x^2 - 4x \times \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ &= 4 + x^2 - 4x \times (-\cos 60^\circ) \\ &= 4 + x^2 + 2x \end{aligned} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$x^2 + 2x + 4 = 19, \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = 3$$

$$\text{즉, } \overline{AD} = 3$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{\sqrt{19}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$R = \frac{\sqrt{19}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{이므로 } R^2 = \frac{19}{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{AD} + R^2 = 3 + \frac{19}{3} = \frac{28}{3}$$

답 ②

10

세 함수 $f(x)$, $f(x)-a$, $f(x)+a$ 는 모두 $x=1$, $x=2$ 에서만 연속이 아니므로 함수 $g(x) = f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$ 가 불연속인 x

의 값이 오직 한 개가 되도록 하려면 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속, $x=2$ 에서 연속 또는 $x=1$ 에서 연속, $x=2$ 에서 불연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속일 때

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$$

$$= f(2)\{f(2)-a\}\{f(2)+a\}$$

가 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\} &= 2 \times (2-a)(2+a) \\ &= 2(4-a^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\} = 0 \times (0-a)(0+a) = 0$$

$$f(2)\{f(2)-a\}\{f(2)+a\} = 2 \times (2-a)(2+a) = 2(4-a^2)$$

에서

$$a^2 - 4 = 0 \text{이므로 } a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

(ii) 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$$

$$= f(1)\{f(1)-a\}\{f(1)+a\}$$

가 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\} = 0 \times (0-a)(0+a) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\} &= -1 \times (-1-a)(-1+a) \\ &= a^2 - 1 \end{aligned}$$

$$f(1)\{f(1)-a\}\{f(1)+a\} = -1 \times (-1-a)(-1+a) = a^2 - 1$$

에서

$$a^2 - 1 = 0 \text{이므로 } a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = -2$ 또는 $a = 2$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이고 $x=1$ 에서 불연속이다.

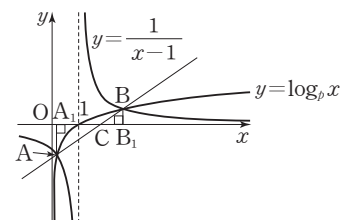
또 $a = -1$ 또는 $a = 1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 $x=2$ 에서 불연속이다. 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값은 $-2, -1, 1, 2$ 의 4개이고 최댓값은 2이다.

따라서 $n=4$, $m=2$ 이므로

$$n+m = 4+2 = 6$$

답 ③

11



두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A_1 , B_1 이라 하면 삼각형 ACA_1 과 삼각형 BCB_1 은 서로 닮은 도형이므로

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=2 \text{에서 } \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}=2 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \log_p a = -2 \log_p b \text{이므로}$$

$$\log_p a = \log_p b^{-2} = \log_p \frac{1}{b^2} \text{에서}$$

$$a = \frac{1}{b^2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 두 점 A, B가 곡선 $y = \frac{1}{x-1}$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{a-1} = -\frac{2}{b-1} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧에 ⑦을 대입하면

$$\frac{1}{\frac{1}{b^2}-1} = -\frac{2}{b-1}$$

$$\frac{b^2}{1-b^2} = \frac{-2}{b-1}$$

$$b^2(b-1) = 2(b^2-1)$$

$$b > 1 \text{이므로}$$

$$b^2 = 2(b+1)$$

$$b^2 - 2b - 2 = 0 \text{에서}$$

$$b = 1 + \sqrt{3}$$

따라서

$$ab = \frac{1}{b^2} \times b = \frac{1}{b} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

12

곡선 $y = 2x^2 - 1$ 과 직선 $y = ax + 1$ 이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면 α, β 는 이차방정식 $2x^2 - ax - 2 = 0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \alpha\beta = -1$$

점 (0, 1)을 점 C라 하면

삼각형 ABO의 넓이는 두 삼각형 ACO,

CBO의 넓이의 합이므로

$$S(a) = \frac{1}{2} \times 1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times 1 \times (-\beta)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

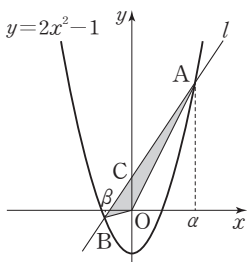
$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{4} + 4}$$

따라서

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a+1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{4} + 4}}{a+1}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{a^2}}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{1}{4}$$

답 ①



13

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1^5 + 1^7 = 2$$

$$(\text{우변}) = \frac{1}{8} \times 1^4 \times (1+1)^4 = \frac{1}{8} \times 2^4 = 2$$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$a_m + b_m = \frac{1}{8} m^4 (m+1)^4$$

이다. $n=m+1$ 일 때

$$a_{m+1} + b_{m+1}$$

$$= \frac{1}{8} m^4 (m+1)^4 + \boxed{(m+1)^5 + (m+1)^7}$$

$$= \frac{1}{8} (m+1)^4 \{m^4 + 8(m+1) + 8(m+1)^3\}$$

$$= \frac{1}{8} (m+1)^4 \{m^4 + (4m+4)(2m^2+4m+4)\}$$

$$= \frac{1}{8} (m+1)^4 [m^4 + \boxed{4m+4}] \{(m+2)^2 + m^2\}]$$

$$= \frac{1}{8} (m+1)^4 [m^4 + \{(m+2)^2 - m^2\} \{(m+2)^2 + m^2\}]$$

$$= \frac{1}{8} (m+1)^4 \{m^4 + (m+2)^4 - m^4\}$$

$$= \frac{1}{8} (m+1)^4 (m+2)^4$$

$$= \frac{1}{8} \{ \boxed{(m+1)(m+2)} \}^4$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + b_n = \frac{1}{8} n^4 (n+1)^4$$

이다.

이상에서

$$f(m) = (m+1)^5 + (m+1)^7$$

$$g(m) = 4m+4$$

$$h(m) = (m+1)(m+2)$$

이므로

$$f(1) = 2^5 + 2^7 = 160$$

$$g(3) = 12 + 4 = 16$$

$$h(5) = 6 \times 7 = 42$$

$$\text{따라서 } f(1) + g(3) + h(5) = 160 + 16 + 42 = 218$$

답 ⑤

14

함수 $f(x) = a \cos b\pi x$ 의 그래프는 주기가 $\frac{2}{b}$ 이다.

$f(0) = a$ 이므로 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$$A(0, a), B\left(\frac{1}{2b}, 0\right), C\left(\frac{3}{2b}, 0\right), D\left(\frac{1}{b}, -a\right)$$

$\overline{BD} = \overline{DC}$ 이고 $\angle BDC = 90^\circ$ 이므로 삼각형 BDC는 직각이등변삼각형이다. 이때 원점 O에 대하여 $\angle ABO = \angle DBC = \angle BAO$ 이므로 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

$$\text{그러므로 } a = \frac{1}{2b} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\overline{AB}=\overline{BD}$ 에서 두 삼각형 ABC, BDC의 넓이는 같다.

즉,

(삼각형 ADC의 넓이)

$=(\text{삼각형 ABC의 넓이})+(\text{삼각형 BDC의 넓이})$

$=2 \times (\text{삼각형 ABC의 넓이})$

$$=2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{b} \times a$$

$$=\frac{a}{b}=18$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } \frac{1}{2b^2}=18, b^2=\frac{1}{36}$$

$$b>0\text{이므로 } b=\frac{1}{6}$$

$$b=\frac{1}{6}\text{을 } \textcircled{1}\text{에 대입하면 } a=3$$

$$\text{따라서 } a+b=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$$

답 ④

15

ㄱ. $f(x)=x^2(x-t)^2$ 에서

$$f'(x)=2x(x-t)^2+2x^2(x-t)$$

$$=2x(x-t)\{(x-t)+x\}$$

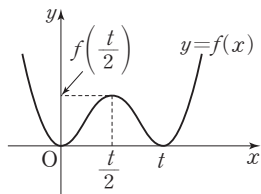
$$=2x(x-t)(2x-t)$$

$$f'(x)=0\text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=t \text{ 또는 } x=\frac{t}{2}$$

$t \neq 0$ 일 때 $x=\frac{t}{2}$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌

므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{t}{2}$ 에서 극댓값을 가진다. (참)

ㄴ. $t>0$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$f\left(\frac{t}{2}\right)=\left(\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{t}{2}-t\right)^2=\left(\frac{t}{2}\right)^4\text{이므로}$$

$$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}\text{에서 } t=2$$

따라서

(i) $0<t<2$ 일 때

$$\left(\frac{t}{2}\right)^4<\frac{t}{2}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프

와 직선 $y=\frac{t}{2}$ 는 서로 다

른 두 점에서 만나므로 $g(t)=2$

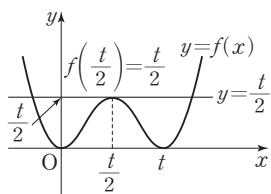
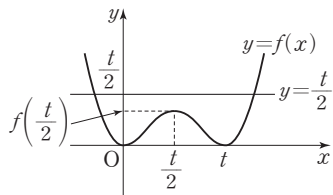
(ii) $t=2$ 일 때

$$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=\frac{t}{2}$ 는 서로 다른 세 점에서

만나므로 $g(t)=3$



(iii) $t>2$ 일 때

$$\left(\frac{t}{2}\right)^4>\frac{t}{2}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=\frac{t}{2}$ 는 서로 다른 네 점에서

만나므로 $g(t)=4$

또한 $t=0$ 일 때 함수 $f(x)=x^4$ 의 그래프와 직선 $y=0$ 은 한 점에서

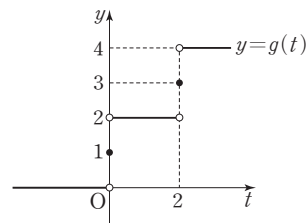
서 만나므로 $g(t)=1$ 이고 $t<0$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직

선 $y=\frac{t}{2}$ 는 만나지 않으므로 $g(t)=0$ 이다.

따라서 부등식 $\lim_{t \rightarrow a-} g(t) < \lim_{t \rightarrow a+} g(t)$ 를 만족시키는 모든 실수

a 는 0, 2이므로 그 합은 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



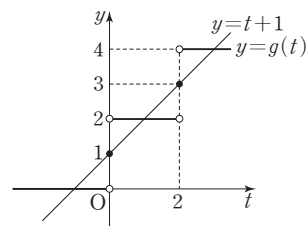
방정식 $t+1-g(t)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수

$y=t+1, y=g(t)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

그림과 같이 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=t+1$ 은 5개의 점

에서 만나므로 방정식 $t+1-g(t)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는

5이다. (참)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$$f'(x)=2x+4$$

$$g(x)=\int f'(x)dx+\int f(x)dx$$

$$=\int \{f'(x)+f(x)\}dx$$

$$=\int \{(2x+4)+(x^2+4x+3)\}dx$$

$$=\int (x^2+6x+7)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $g(0)=C=3$ 이므로

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+3$$

$$\text{따라서 } g(3)=9+27+21+3=60$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int f'(x) dx + \int f(x) dx \\
 &= f(x) + C_1 + \int (x^2 + 4x + 3) dx \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수}) \\
 &= x^2 + 4x + 3 + C_1 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수}) \\
 &= \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 7x + 3 + C_1 + C_2 \\
 \text{이때 } g(0) &= 3 \text{이므로 } C_1 + C_2 = 0 \\
 \text{따라서 } g(x) &= \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 7x + 3 \text{이므로} \\
 g(3) &= 9 + 27 + 21 + 3 = 60
 \end{aligned}$$

17

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4^x - 2^{x+2} + 3 \\
 &= 2^{2x} - 4 \times 2^x + 3 \\
 &= (2^x - 2)^2 - 1 \\
 -2 \leq x \leq 2 \text{에서 } \frac{1}{4} \leq 2^x &\leq 4 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 -1 , $x=2$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다.

따라서 $M=3$, $m=-1$ 이므로

$$M^2 + m^2 = 3^2 + (-1)^2 = 9 + 1 = 10$$

답 10

18

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 10 \\
 a_2 &= a_1 + 3 = 10 + 3 = 13 \\
 a_3 &= a_2 + 3 = 13 + 3 = 16 \\
 a_4 &= \log_2 a_3 = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4 \\
 a_5 &= \log_2 a_4 = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \\
 a_6 &= \log_2 a_5 = \log_2 2 = 1 \\
 \log_2 1 &= 0 \text{으로 자연수가 아니므로} \\
 a_7 &= a_6 + 3 = 1 + 3 = 4 \\
 a_8 &= 2 \\
 a_9 &= 1 \\
 a_{10} &= 4 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

에서 $n \geq 4$ 일 때 수열 $\{a_n\}$ 은 $4, 2, 1$ 이 반복되므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} a_k &= 10 + 13 + 16 + (4 + 2 + 1) \times 5 + 4 + 2 \\
 &= 39 + 35 + 6 = 80
 \end{aligned}$$

답 80

19

$S_p = T_p$ 이므로

$$\int_0^{a_p} (x^3 - px^2) dx = 0$$

이다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{a_p} (x^3 - px^2) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{p}{3}x^3 \right]_0^{a_p} \\
 &= \frac{1}{4}a_p^4 - \frac{p}{3}a_p^3 \\
 &= \frac{1}{4}a_p^3 \left(a_p - \frac{4}{3}p \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$a_p \neq 0 \text{이므로 } a_p = \frac{4}{3}p$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{6a_p}{p+1} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{6 \times \frac{4}{3}p}{p+1} \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{8p}{p+1} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

답 8

20

원 O 의 중심을 O 라 하고 점 O 에서 두 선분 AB , PQ 에 내린 수선의 발을 각각 M , N 이라 하고 $\overline{ON} = x$ ($0 \leq x < 3$)이라 하자.

이때 0 이 아닌 x 의 값에 대하여 점 N 은 그림과 같이 점 O 의 위쪽 또는 아래쪽에 생기지만 삼각형 APQ 의 넓이의 최댓값을 구하므로 점 N 은 점 O 의 아래쪽에 놓인다.

$$\overline{PQ} = 2\overline{PN} = 2\sqrt{3^2 - x^2} = 2\sqrt{9 - x^2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{OM} = \sqrt{9 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

$$\overline{MN} = \overline{OM} + \overline{ON} = 2 + x \text{이므로}$$

삼각형 APQ 의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{9 - x^2} \times (2 + x) \\
 &= \sqrt{9 - x^2} \times (2 + x)
 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
 f(x) &= S^2 = (9 - x^2)(x^2 + 4x + 4) \\
 &= -x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 36x + 36
 \end{aligned}$$

으로 놓으면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -(4x^3 + 12x^2 - 10x - 36) \\
 &= -2(2x^3 + 6x^2 - 5x - 18) \\
 &= -2(x+2)(2x^2 + 2x - 9)
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 0 \leq x < 3 \text{이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2}$$

따라서 $x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2}$ 에서 $f(x)$ 는 극대이면서 최대이다.

$$S > 0 \text{이므로 } S^2 \text{이 } x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2} \text{에서 최대이면 } S \text{도 } x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2}$$

에서 최대이다.

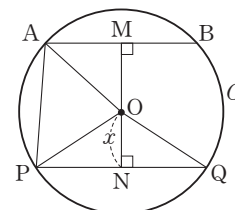
$$x^2 = \frac{10 - \sqrt{19}}{2} \text{이므로 } ㉠ \text{에서}$$

$$a^2 = 4(9 - x^2) = 4\left(9 - \frac{10 - \sqrt{19}}{2}\right) = 16 + 2\sqrt{19}$$

따라서 $m=16$, $n=19$ 이므로

$$m+n=16+19=35$$

답 35



21

$a_2=a$ 라 하면 조건 (가)에서 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 은 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_1+a_2=1+a$$

$$a_2+a_3=4+a \text{에서 } a_3=4$$

$$a_3+a_4=7+a \text{에서 } a_4=3+a$$

$$a_4+a_5=10+a \text{에서 } a_5=7$$

$$a_5+a_6=13+a \text{에서 } a_6=6+a$$

$$a_6+a_7=16+a \text{에서 } a_7=10$$

⋮

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_{2n-1}=3n-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 a 이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_{2n}=3n+a-3$$

조건 (나)에서 $a_{20}=32$ 이므로

$$a_{20}=30+a-3=27+a=32 \text{에서}$$

$$a=5 \text{이므로}$$

$$a_{2n}=3n+5-3=3n+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

따라서 ㉑, ㉒에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k-2) + \sum_{k=1}^{10} (3k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} 6k \\ &= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 330 \end{aligned}$$

답 330

다른 풀이

조건 (가)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}+a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+3$$

즉, $a_{n+2}=a_n+3$ 이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 a_2 이고 공차가 3인 등차수열이다.

조건 (나)에서 $a_{20}=a_2+9 \times 3=32$ 이므로 $a_2=5$ 이다.

이때 수열 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$ 은 첫째항이 6, 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (a_{2n-1}+a_{2n}) \\ &= \frac{10 \times (2 \times 6 + 9 \times 6)}{2} \\ &= 330 \end{aligned}$$

22

함수 $g_n(x)$ 는 $2k-1 \leq x < 2k$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)에서 함숫값이 $f(k)$ 인 상숫값을 가지므로 $f'(k)=0$ 이면 함수 $g_n(x)$ 는 $x=2k-1$, $x=2k$ 에서 미분가능하고 $f'(k) \neq 0$ 이면 함수 $g_n(x)$ 는 $x=2k-1$, $x=2k$ 에서 미분가능하지 않다.

만약 모든 자연수 k 에 대하여 $f'(k) \neq 0$ 이면

$$a_1=2, a_2=4, a_3=6, \dots, a_n=2n$$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 자연수 p 의 최솟값은 1이 되어 모순이다.

조건 (가)에서 $b_1=a_6=l$ (l 은 짝수인 자연수)라 하면

$$b_2=a_7=l+2, b_3=a_8=l+4, b_4=a_9=l+6, \dots \text{이므로}$$

$$f'(6)=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

이고, 7 이상인 자연수 k 에 대하여 $f'(k) \neq 0$ 이다.

$x < 11$ 일 때 $g_6(x)=g_5(x)$ 이고

$11 \leq x < 12$ 일 때 $g_6(x)=f(6)$, $g_5(x)=f(x-5)$ 이고

$x \geq 12$ 일 때 $g_6(x)=g_5(x-1)$ 이므로

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \int_0^{12} g_6(x) dx - \int_0^{11} g_5(x) dx &= \int_{11}^{12} g_6(x) dx \\ &= \int_{11}^{12} f(6) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f(6)=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

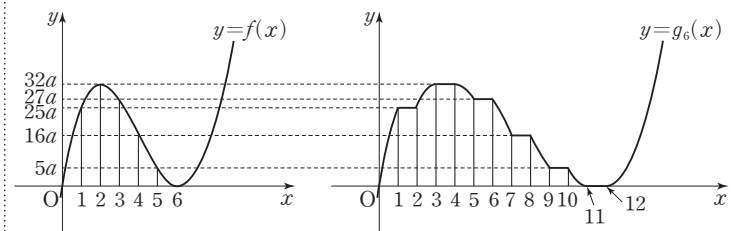
$f(0)=0$ 이고 ㉑, ㉒에 의하여

$$f(x)=ax(x-6)^2 \quad (a \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$f'(x)=a\{(x-6)^2+2x(x-6)\}=3a(x-2)(x-6)$$

따라서 $a > 0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 와 함수 $y=g_6(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$\int_6^{14} f(x) dx = \int_{12}^{20} g_6(x) dx \text{이므로}$$

조건 (다)에서

$$\begin{aligned} \int_0^{20} g_6(x) dx - \int_0^{14} f(x) dx &= \int_0^{12} g_6(x) dx + \int_{12}^{20} g_6(x) dx - \left(\int_0^6 f(x) dx + \int_6^{14} f(x) dx \right) \\ &= \int_0^{12} g_6(x) dx - \int_0^6 f(x) dx \\ &= \int_1^2 g_6(x) dx + \int_3^4 g_6(x) dx + \int_5^6 g_6(x) dx + \int_7^8 g_6(x) dx \\ &\quad + \int_9^{10} g_6(x) dx + \int_{11}^{12} g_6(x) dx \\ &= 25a + 32a + 27a + 16a + 5a + 0 \\ &= 105a = 21 \\ a &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{5}x(x-6)^2 \text{이므로}$$

$$f(10) = \frac{1}{5} \times 10 \times (10-6)^2 = 32$$

답 32

참고

$$a < 0 \text{일 때, } \int_6^{14} f(x) dx = \int_{12}^{20} g_6(x) dx \text{이고}$$

$$\int_0^{20} g_6(x) dx - \int_0^{14} f(x) dx < 0 \text{이므로}$$

조건을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

23

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1} + 4^{\frac{3}{2}n+1}}{2^{3n} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 8^n + 4 \times 8^n}{8^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4}{1+\frac{1}{8^n}} \\ &= \frac{2+4}{1+0} = 6\end{aligned}$$

③

24

$$\frac{3}{4} \times \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = \frac{(r^2)^{10} - 1}{r^2 - 1} = \frac{r^{20} - 1}{(r+1)(r-1)} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^{20} a_k$$

이고 $\sum_{k=1}^{20} a_k \neq 0$ 이므로

$$\frac{1}{r+1} = \frac{3}{4}, r+1 = \frac{4}{3}, r = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

③

25

$$f(x) = x \sin x + \cos x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x > 0 \text{ 이므로 } \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, \dots$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\pi + \frac{\pi}{2}$	...	$2\pi + \frac{\pi}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{2}$ 극대	↘	$-\pi - \frac{\pi}{2}$ 극소	↗	$2\pi + \frac{\pi}{2}$ 극대	↘

$$M_1 = \frac{\pi}{2}, M_2 = 2\pi + \frac{\pi}{2}, M_3 = 4\pi + \frac{\pi}{2}, \dots$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} M_k &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ 2(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{10} (k-1) + \frac{\pi}{2} \times 10 \\ &= 2\pi \times 45 + 5\pi = 95\pi\end{aligned}$$

④

26

$$x \geq 1 \text{ 일 때 } f'(x) = \frac{2}{x^2} - 3 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x^{-2} - 3) dx \\ &= -2x^{-1} - 3x + C_1 = -\frac{2}{x} - 3x + C_1 \text{ (단, } C_1 \text{ 은 적분상수)}\end{aligned}$$

$$f(2) = -1 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = -\frac{2}{2} - 3 \times 2 + C_1 = -7 + C_1 = -1, C_1 = 6$$

따라서 $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = -\frac{2}{x} - 3x + 6$$

$x < 1$ 일 때, $f'(x) = (2-3x)e^{x-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int (2-3x)e^{x-1} dx \\ &= (2-3x)e^{x-1} - \int (-3e^{x-1}) dx \\ &= (2-3x)e^{x-1} + 3e^{x-1} + C_2 \\ &= (5-3x)e^{x-1} + C_2 \text{ (단, } C_2 \text{ 는 적분상수)}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \{(5-3x)e^{x-1} + C_2\} = 2 + C_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left(-\frac{2}{x} - 3x + 6 \right) = 1$$

이므로 $2 + C_2 = 1$ 에서 $C_2 = -1$

따라서 $x < 1$ 일 때, $f(x) = (5-3x)e^{x-1} - 1$ 이므로

$$f(0) = \frac{5}{e} - 1$$

②

27

$$0 < g(a) < \frac{\pi}{2} \text{ 이고 } \sin \{g(a)\} = \frac{3}{5} \text{ 이므로}$$

$$\cos \{g(a)\} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

함수 $f(x) = \sin x + \tan x$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$f(g(x)) = x \quad (x > 0)$$

$$\sin \{g(x)\} + \tan \{g(x)\} = x \quad \dots\dots ①$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos \{g(x)\} g'(x) + \sec^2 \{g(x)\} g'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{\cos \{g(x)\} + \sec^2 \{g(x)\}}$$

$x = a$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}g'(a) &= \frac{1}{\cos \{g(a)\} + \sec^2 \{g(a)\}} \\ &= \frac{1}{\cos \{g(a)\} + \frac{1}{\cos^2 \{g(a)\}}} \\ &= \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{25}{16}} = \frac{80}{189}\end{aligned}$$

③

28

$$\frac{dx}{dt} = (1 - \ln t)^2 + 2t(1 - \ln t) \times \left(-\frac{1}{t}\right) + 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$= 1 - 2 \ln t + (\ln t)^2 - 2 + 2 \ln t + 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$= (\ln t)^2 - \frac{1}{t^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= 2 \ln t \times \frac{1}{t} = \frac{2 \ln t}{t} \\
\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left(\ln t - \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \ln t}{t}\right)^2} \\
&= \sqrt{(\ln t)^4 + \frac{1}{t^4} - \frac{2(\ln t)^2}{t^2} + \frac{4(\ln t)^2}{t^2}} \\
&= \sqrt{(\ln t)^4 + \frac{1}{t^4} + \frac{2(\ln t)^2}{t^2}} \\
&= \sqrt{\left[(\ln t)^2 + \frac{1}{t^2}\right]^2} \\
&= \left|(\ln t)^2 + \frac{1}{t^2}\right| \\
&= (\ln t)^2 + \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

시각 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_1^e \left\{ (\ln t)^2 + \frac{1}{t^2} \right\} dt$$

이때

$$\begin{aligned}
\int_1^e (\ln t)^2 dt &= \left[t(\ln t)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln t dt \\
&= e - \left[2t \ln t \right]_1^e + \int_1^e 2 dt \\
&= e - 2e + \left[2t \right]_1^e \\
&= -e + 2(e-1) \\
&= e-2
\end{aligned}$$

$$\int_1^e \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^e = -\frac{1}{e} + 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_1^e \left\{ (\ln t)^2 + \frac{1}{t^2} \right\} dt = e-2 - \frac{1}{e} + 1 = e - \frac{1}{e} - 1$$

29

$$\overline{PQ} = \tan \theta, \overline{OQ} = \frac{1}{\cos \theta}, \overline{AQ} = \overline{QR} = \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\begin{aligned}
\overline{PR} &= \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2} = \sqrt{\tan^2 \theta + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2}}{\cos \theta}
\end{aligned}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{PR} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2}}{\cos \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2}}{\cos \theta}}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \times \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \times \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\theta^2}} \right\}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2 (1 + \cos \theta)} \times \sqrt{\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 + \frac{\sin^4 \theta}{\theta^2 (1 + \cos \theta)^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2 + 0} = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } 60 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

30

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P_k(x_k, f(x_k))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$$

이므로 두 점 Q_k, R_k 의 좌표는 각각

$$Q_k\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, 0\right), R_k(0, f(x_k) - x_k f'(x_k))$$

이다. 삼각형 $R_k G_k Q_k$ 의 넓이에서 삼각형 $I_k H_k G_k$ 의 넓이를 뺀 값은

삼각형 $R_k H_k Q_k$ 의 넓이에서 삼각형 $I_k H_k Q_k$ 의 넓이를 뺀 것과 같다.

원점을 O라 하면

$$S_k - T_k$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{H_k Q_k} \times \overline{OR_k} - \frac{1}{2} \times \overline{H_k Q_k} \times \overline{OI_k}$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{H_k Q_k} \times (\overline{OR_k} - \overline{OI_k})$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{H_k Q_k} \times \overline{R_k I_k}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\left\{ x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right\} - x_k \right] \times [f(x_k) - x_k f'(x_k)]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right\} \times \{-x_k f'(x_k)\}$$

$$= \frac{1}{2} x_k f(x_k)$$

$$= \frac{1}{2} x_k \times \frac{e^{-\sqrt{x_k}}}{\sqrt{x_k}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x_k} e^{-\sqrt{x_k}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3k}{n}} e^{-\sqrt{1 + \frac{3k}{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (S_k - T_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3k}{n}} e^{-\sqrt{1 + \frac{3k}{n}}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{3k}{n}} e^{-\sqrt{1 + \frac{3k}{n}}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^4 \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$\sqrt{x} = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{dt}{dx}, \text{ 즉 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t} \text{이고}$$

$x=1$ 일 때 $t=1$, $x=4$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\frac{1}{6} \int_1^4 \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 t^2 e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{3} \left[-t^2 e^{-t} \right]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 (-2te^{-t}) dt$$

$$= \left(-\frac{4}{3e^2} + \frac{1}{3e} \right) - \frac{1}{3} \left[2te^{-t} \right]_1^2 + \frac{1}{3} \int_1^2 2e^{-t} dt$$

$$= \left(-\frac{4}{3e^2} + \frac{1}{3e} \right) - \left(\frac{4}{3e^2} - \frac{2}{3e} \right) + \frac{1}{3} \left[-2e^{-t} \right]_1^2$$

$$= -\frac{8}{3e^2} + \frac{1}{e} + \left(-\frac{2}{3e^2} + \frac{2}{3e} \right)$$

$$= \frac{5}{3e} - \frac{10}{3e^2}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{5}{3}, q = -\frac{10}{3} \text{ 이므로}$$

$$p - q = \frac{5}{3} - \left(-\frac{10}{3} \right) = 5$$

답 ⑤

답 15

답 5

실전 모의고사 3회

본문 146~153쪽

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ①	07 ②	08 ③	09 ③	10 ②
11 ②	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 11	17 7	18 9	19 12	20 68
21 11	22 550	23 ②	24 ③	25 ④
26 ②	27 ⑤	28 ④	29 181	30 35

01

$$\sqrt[5]{16} \times \sqrt[10]{8} = \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[10]{2^3} = 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{3}{10}} = 2^{\frac{8}{10} + \frac{3}{10}} = 2^{\frac{11}{10}}$$

답 ②

02

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3(a-x^2) dx &= \int_0^1 (ax^3 - x^5) dx \\ &= \left[\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3a-2}{12} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3a-2}{12} = \frac{5}{12} \text{에서}$$

$$3a-2=5, 3a=7$$

$$\text{따라서 } a = \frac{7}{3}$$

답 ⑤

03

함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y=4^{x+1}$$

이 그래프가 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a=4^2=16$$

답 ④

04

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 3 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 4 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 3 + 4 = 7$$

답 ⑤

05

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos \theta - \sin \theta \\ &= -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

답 ②

06

$F(x) = (x+1)f(x) - 4x^3 - 6x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+1)f'(x) - 12x^2 - 12x$$

$$(x+1)f'(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$$

$x \neq -1$ 일 때 $f'(x) = 12x$ 이고 $f(x)$ 가 다항함수이므로 $f'(x)$ 도 다항함수이다.

따라서 $f'(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = f'(-1) \text{이므로}$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 12x = -12$$

답 ①

07

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$ 이므로 $f'(1)=3$ 이고 곡선 $y=f(x)$ 는 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

$$\text{즉, } f(1)=2$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$ 이므로 $g'(1)=2$ 이고 곡선 $y=g(x)$ 는 점 $(1, 3)$ 을 지난다.

$$\text{즉, } g(1)=3$$

한편, 곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 중에서 x 좌표가 1인 점의 y 좌표는 $f(1)g(1)+1=2 \times 3 + 1 = 7$ 이고

$$h(x) = f(x)g(x) + 1 \text{이라 하면}$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 $(1, 7)$ 에서의 접선의 기울기는

$$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 2 = 13$$

구하는 접선의 방정식은 $y-7=13(x-1)$, 즉

$$y=13x-6$$

$$\text{따라서 } a-b=13-(-6)=19$$

답 ②

08

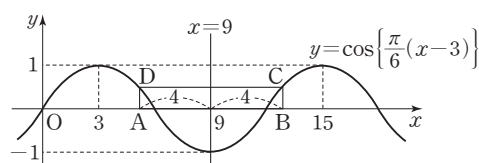
함수 $y=\cos\left\{\frac{\pi}{6}(x-3)\right\}$ 의 그래프는 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$ 이고

$y=\cos\frac{\pi}{6}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

$x=3$ 일 때 $y=1$ 이고 주기가 12이므로 $x=9$ 일 때 $y=-1$, $x=15$ 일 때 $y=1$ 이다. 따라서 두 점 A, B는 직선 $x=9$ 에 대하여 대칭이다.

$\overline{AB}=8$ 에서 점 A와 점 B의 좌표는 각각 A(5, 0), B(13, 0)이고

$x=5$ 일 때 $y=\cos\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 이므로 점 D의 좌표는 D(5, $\frac{1}{2}$)이다.



따라서 직사각형 ABCD의 넓이 S는

$$S = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

답 ③

09

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \{(x-2)^2 + a\} = \lim_{x \rightarrow b^+} 2x = f(b)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \{(x-2)^2 + a\} = (b-2)^2 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} 2x = 2b$$

$$f(b) = 2b$$

그러므로 $(b-2)^2 + a = 2b$, 즉 $b^2 - 6b + a + 4 = 0$ 에서

$$a = -b^2 + 6b - 4 = -(b-3)^2 + 5$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 5이다.

답 ③

10

함수 $y = a^{x+1} + b$ 의 그래프는 함수 $y = a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이고 감소하는 함수이므로

$$0 < a < 1$$

또 함수 $y = a^{x+1} + b$ 의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

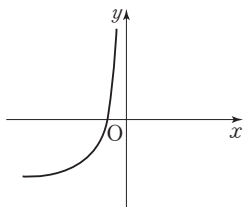
$$0 = a^0 + b = 1 + b \text{에서 } b = -1$$

이 값을 $y = \log_a(bx)$ 에 대입하면 $y = \log_a(-x)$ 이고

이 그래프는 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다. 이때 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프는 $0 < a < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값이 감소하는 그래프이다.

따라서 함수 $y = \log_a(bx)$ 의 그래프의 개

형은 오른쪽과 같다.



답 ②

11

$g(x) = f(x) + 2a$ 이므로 방정식 $g(x) = 0$ 의 근은 방정식

$f(x) = -2a$ 의 근과 같다.

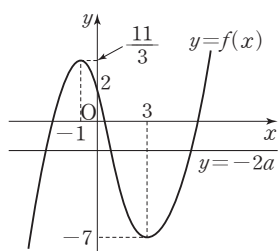
$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$$

에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	-7	↗

$f(0) = 2$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 방정식 $g(x) = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 $-7 < -2a < 2$ 이어야 한다. 즉,

$$-1 < a < \frac{7}{2}$$

따라서 만족시키는 정수 a 의 값은 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 4이다.

답 ②

12

$$\{f(x) - 2ax + a^2\}^2$$

$$= a^4 + 4a^2x^2 + \{f(x)\}^2 - 4a^3x - 4axf(x) + 2a^2f(x)$$

$$= a^4 - 4xa^3 + \{4x^2 + 2f(x)\}a^2 - 4xf(x)a + \{f(x)\}^2$$

이므로

$$\int_0^1 \{f(x) - 2ax + a^2\}^2 dx$$

$$= a^4 \int_0^1 1 dx - a^3 \int_0^1 4x dx + a^2 \int_0^1 \{4x^2 + 2f(x)\} dx$$

$$- 4a \int_0^1 xf(x) dx + \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

$$= a^4 - 2a^3 + \left\{ \frac{4}{3} + 2 \times \left(-\frac{5}{3} \right) \right\} a^2 - 4a \times 0 + \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

$$= a^4 - 2a^3 - 2a^2 + \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하고 } \textcircled{7} \text{을 } g(a) \text{로 놓으면}$$

$$g'(a) = 4a^3 - 6a^2 - 4a = 2a(2a+1)(a-2)$$

$$g'(a) = 0 \text{에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 2$$

$g(a)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$$a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 2 \text{ 중에서 최솟값을 가진다.}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + k = -\frac{3}{16} + k$$

$$g(2) = 16 - 16 - 8 + k = -8 + k$$

이므로 $g(a)$ 는 $a = 2$ 에서 최솟값을 가진다.

답 ④

13

2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\text{이므로 } S_n - S_{n-1} = \frac{3S_n^2}{3S_n + 1}, \text{ 즉}$$

$$(S_n - S_{n-1})(3S_n + 1) = 3S_n^2, \quad 3S_n^2 + S_n - 3S_n S_{n-1} - S_{n-1} = 3S_n^2$$

$$(1 - 3S_{n-1})S_n = S_{n-1}$$

$$S_n = \frac{S_{n-1}}{1 - 3S_{n-1}}, \quad \frac{1}{S_n} = \frac{1 - 3S_{n-1}}{S_{n-1}}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_{n-1}} + \boxed{-3}, \quad \frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1 \text{이다.}$$

이때 수열 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $\boxed{-3}$ 인 등차수열이다. 즉,

$$\frac{1}{S_n} = -3n + 4, \quad S_n = \frac{1}{4 - 3n}$$

이다. $\textcircled{7}$ 에서

$$a_n = S_n - S_{n-1} \text{ (} n \geq 2 \text{)}$$

$$= \frac{1}{4 - 3n} - \frac{1}{7 - 3n} = \frac{3}{(4 - 3n)(7 - 3n)}$$

$$\text{따라서 } a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ \frac{3}{(4-3n)(7-3n)} & (n \geq 2) \end{cases}$$

그러므로

$$k = -3, f(n) = \frac{1}{4-3n}, g(n) = \frac{3}{(4-3n)(7-3n)}$$

이다.

$$\text{따라서 } kf(3)g(3) = -3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

답 ③

14

ㄱ. t 초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t v_1(t) dt = \int_0^t (4t^2 - 6at - a^2) dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 - 3at^2 - a^2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^t v_2(t) dt = \int_0^t (t^2 + 6at - 10a^2) dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + 3at^2 - 10a^2t \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} f(t) &= |x_1(t) - x_2(t)| \\ &= \left| \frac{4}{3}t^3 - 3at^2 - a^2t - \frac{1}{3}t^3 - 3at^2 + 10a^2t \right| \\ &= |t^3 - 6at^2 + 9a^2t| = |t|(t-3a)^2 \\ &= t(t-3a)^2 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄴ. $a=2$ 일 때, $f(t) = t(t-6)^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-6)^2 + 2t(t-6) = (t-6)(t-6+2t) \\ &= 3(t-2)(t-6) \end{aligned}$$

따라서 $y=f(t)$ 는 $t=2$ 에서 극댓값을 가지고 $t=6$ 에서 극솟값을 가지므로 $0 \leq t \leq 3$ 에서 $y=f(t)$ 는 $t=2$ 에서 극대이면서 최댓값을 가진다.

따라서 최댓값은 $f(2) = 2 \times (-4)^2 = 32$ (참)

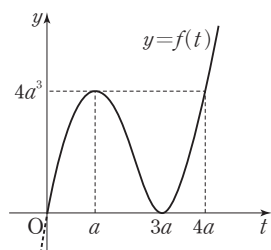
ㄷ. $0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 a 의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $a > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-3a)^2 + t \times 2(t-3a) = (t-3a)(t-3a+2t) \\ &= 3(t-3a)(t-a) \end{aligned}$$

이므로 $y=f(t)$ 는 $t=a$ 에서 극댓값을 가지고, $t=3a$ 에서 극솟값을 가진다.

$f(0) = f(3a) = 0$ 이고, $f(a) = f(4a) = 4a^3$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



㉠ $4a < 3$ 또는 $a > 3$, 즉 $0 < a < \frac{3}{4}$ 또는 $a > 3$ 인 경우

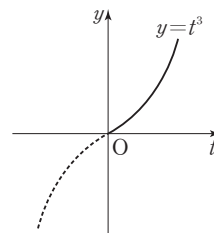
$0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값은 $f(3) = 27(a-1)^2$

㉡ $a \leq 3 \leq 4a$, 즉 $\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ 인 경우

$0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값은 $f(a) = 4a^3$

(ii) $a=0$ 일 때

$f(t) = t^3$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



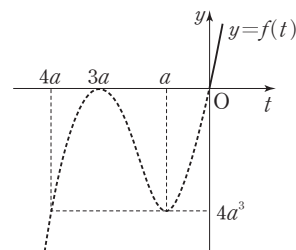
$0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값은 $f(3) = 3^3 = 27$

(iii) $a < 0$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-3a)^2 + t \times 2(t-3a) = (t-3a)(t-3a+2t) \\ &= 3(t-3a)(t-a) \end{aligned}$$

이므로 $y=f(t)$ 는 $t=a$ 에서 극솟값을 가지고, $t=3a$ 에서 극댓값을 가진다.

$f(0) = f(3a) = 0$ 이고, $f(a) = f(4a) = 4a^3$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.

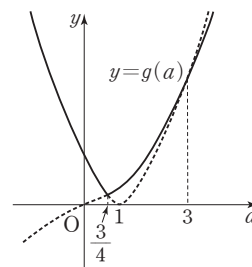


$0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값은 $f(3) = 27(a-1)^2$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(a) = \begin{cases} 27(a-1)^2 & (a < \frac{3}{4}, a > 3) \\ 4a^3 & (\frac{3}{4} \leq a \leq 3) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(a)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $g(a)$ 는 $a = \frac{3}{4}$ 일 때, 최솟값 $g(\frac{3}{4}) = \frac{27}{16}$ 을 가진다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

$$\sum_{k=1}^n a_k = S_n \text{ 이라 하면 } S_n = \begin{cases} n^2 - 2n + 2 & (n \leq 20) \\ 3n & (n \geq 21) \end{cases} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$n \leq 20$ 일 때 $S_n = n^2 - 2n + 2$ 이므로

$2 \leq n \leq 20$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - 2n + 2) - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 2\} = 2n - 3$$

$n = 1$ 일 때, ㉠에서 $a_1 = S_1 = 1$

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-3 & (2 \leq n \leq 20) \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$n = 21$ 일 때, ㉠에서 $S_{21} = 3 \times 21 = 63$ 이므로

$$a_{21} = S_{21} - S_{20} = 63 - (20^2 - 2 \times 20 + 2) = -299 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$n \geq 22$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-3 & (2 \leq n \leq 20) \\ -299 & (n=21) \\ 3 & (n \geq 22) \end{cases}$$

$\sum_{k=1}^6 a_{3k-2}$ 에서

(i) $k = 1$ 일 때

$$a_1 = 1$$

(ii) $2 \leq k \leq 6$ 일 때

$$a_k = 2k - 3 \text{에서}$$

$$\sum_{k=2}^6 a_{3k-2} = -1 + \sum_{k=2}^6 a_{3k-2} - (-1) = \sum_{k=1}^6 (6k-7) - (-1)$$

$$= 6 \sum_{k=1}^6 k - 7 \times 6 - (-1)$$

$$= 6 \times \left(\frac{6 \times 7}{2} \right) - 42 - (-1) = 85$$

$\sum_{k=7}^{15} ka_{3k}$ 에서

(iii) $k = 7$ 일 때

$$7a_{21} = 7 \times (-299) = -2093$$

(iv) $8 \leq k \leq 15$ 일 때

$$a_k = 3 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=8}^{15} ka_{3k} = \sum_{k=8}^{15} (k \times 3) = 3 \sum_{k=8}^{15} k$$

$$= 3 \left(\sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^7 k \right) = 3 \left(\frac{15 \times 16}{2} - \frac{7 \times 8}{2} \right) = 276$$

(i) ~ (iv)에서

$$\sum_{k=1}^6 a_{3k-2} + \sum_{k=7}^{15} ka_{3k} = 1 + 85 + (-2093) + 276 = -1731$$

답 ③

16

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 + a_8 = (a + 6d) + (a + 7d) = 2a + 13d = 37 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -1, d = 3$$

$$\text{따라서 } a_n = (-1) + (n-1) \times 3 = 3n - 4$$

$$a_n < 30 \text{에서 } 3n - 4 < 30, n < \frac{34}{3}$$

따라서 모든 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 11이고 그 개수는 11이다.

답 11

17

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2}$ 의 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$f(2) - 2 = 0, \text{ 즉 } f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-3}{2x-4}$ 의 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$g(2) - 3 = 0, \text{ 즉 } g(2) = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-3}{2x-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-3}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-3}{x-2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{1}{2} g'(2) \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } f'(2) = \frac{1}{2} g'(2), \text{ 즉 } g'(2) = 2f'(2)$$

함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 미분계수는

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{에서}$$

$$h'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$

$$= 3f'(2) + 2g'(2) = 3f'(2) + 4f'(2) = 7f'(2)$$

$$\text{이므로 } \frac{h'(2)}{f'(2)} = 7$$

따라서 $a = 7$

답 7

18

$$4^{2x} > \sqrt[n]{8} \times 4^x \text{에서}$$

$$2^{4x} > 8^{\frac{1}{n}} \times 2^{2x}, 2^{4x} > 2^{\frac{3}{n}} \times 2^{2x}, 2^{4x} > 2^{2x + \frac{3}{n}}$$

밑이 1보다 크므로

$$4x > 2x + \frac{3}{n}, 2x > \frac{3}{n}, x > \frac{3}{2n}$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{2n} = \frac{1}{6} \text{이므로 } n = 9$$

답 9

19

함수 $f(x) + ax$ 의 도함수 $f'(x) + a$ 에 대하여

$$f'(x) + a = (x+2)(x-5) + a = x^2 - 3x - 10 + a$$

$f(x) + ax$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위해서는

이차방정식 $f'(x) + a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2 - 3x - 10 + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4(-10 + a) = 49 - 4a > 0 \text{에서 } a < \frac{49}{4}$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 12이다.

답 12

20

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} b_n &= a_{2n-1} + a_{2n+1} = ar^{2n-1-1} + ar^{2n+1-1} = ar^{2n-2} + ar^{2n} \\ &= a(r^2)^{n-1} + a(r^2)^{n-1} \times r^2 = (a + ar^2)(r^2)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $a+ar^2$ 이고 공비가 r^2 인 등비수열이다.

수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21이므로

$$\frac{(a+ar^2)((r^2)^3-1)}{r^2-1}=21 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\begin{aligned} c_n &= a_{4n-3} + a_{4n-1} = ar^{4n-3-1} + ar^{4n-1-1} = ar^{4n-4} + ar^{4n-2} \\ &= a(r^4)^{n-1} + a(r^4)^{n-1} \times r^2 \\ &= (a+ar^2)(r^4)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 $a+ar^2$ 이고 공비가 r^4 인 등비수열이다.

수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제2항까지의 합이 17이므로

$$\frac{(a+ar^2)((r^4)^2-1)}{r^4-1}=17 \quad \cdots \textcircled{B}$$

①에서

$$\begin{aligned} \frac{(a+ar^2)((r^2)^3-1)}{r^2-1} &= \frac{(a+ar^2)(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{r^2-1} \\ &= (a+ar^2)(r^4+r^2+1)=21 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a+ar^2 = \frac{21}{r^4+r^2+1} \quad \cdots \textcircled{C}$$

②에서

$$\begin{aligned} \frac{(a+ar^2)((r^4)^2-1)}{r^4-1} &= \frac{(a+ar^2)(r^4-1)(r^4+1)}{r^4-1} \\ &= (a+ar^2)(r^4+1)=17 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a+ar^2 = \frac{17}{r^4+1} \quad \cdots \textcircled{D}$$

③, ④에서

$$\begin{aligned} \frac{21}{r^4+r^2+1} &= \frac{17}{r^4+1}, \quad 21(r^4+1)=17(r^4+r^2+1) \\ 4r^4-17r^2+4 &= 0, \quad (4r^2-1)(r^2-4)=0 \end{aligned}$$

$r > 1$ 이므로 $r^2=4$ 이고 $a=\frac{1}{5}$ 이다.

$$a_3+a_7=ar^2+ar^6=\frac{1}{5} \times 4 + \frac{1}{5} \times 4^3 = \frac{4}{5} + \frac{64}{5} = \frac{68}{5}$$

따라서 $k=\frac{68}{5}$ 이므로 $5k=68$

68

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n=ar^{n-1}$ 이므로

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$ 에서 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제3항까지의 합은

$$(a_1+a_3)+(a_3+a_5)+(a_5+a_7)=a_1+2a_3+2a_5+a_7$$

$$\text{따라서 } a_1+2a_3+2a_5+a_7=21 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$c_n=a_{4n-3}+a_{4n-1}$ 에서 수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제2항까지의 합은

$$(a_1+a_3)+(a_5+a_7)$$

$$\text{따라서 } a_1+a_3+a_5+a_7=17 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}-\textcircled{B} \text{을 하면 } a_3+a_5=4$$

$$\text{따라서 } a_1+a_7=13$$

$$ar^2+ar^4=4 \text{에서 } a=\frac{4}{r^2+r^4} \quad \cdots \textcircled{C}$$

$$a+ar^6=13 \text{에서 } a=\frac{13}{1+r^6} \quad \cdots \textcircled{D}$$

③, ④에서

$$\frac{4}{r^2+r^4}=\frac{13}{1+r^6}, \quad 4(r^2)^3-13(r^2)^2-13r^2+4=0$$

$$(r^2-4)\{4(r^2)^2+3r^2-1\}=0$$

$$(r^2-4)(4r^2-1)(r^2+1)=0$$

$$r^2+1>0 \text{이고 } r>1 \text{이므로 } r^2=4 \text{이고 } a=\frac{1}{5}$$

$$a_3+a_7=ar^2+ar^6=\frac{1}{5} \times 4 + \frac{1}{5} \times 4^3 = \frac{4}{5} + \frac{64}{5} = \frac{68}{5}$$

따라서 $k=\frac{68}{5}$ 이므로 $5k=68$

21

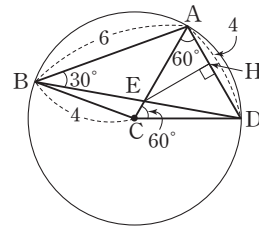
삼각형 ABD에서 $\angle ABE=30^\circ$ 이고 정삼각형 ACD에서

$\angle ACD=60^\circ$ 이므로 원주각과 중심각의 관계에 의하여 점 C는 삼각형 ABD의 외접원의 중심이다.

그러므로 $\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{AD}=4$ 이고 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)}, \quad \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\sin(\angle ADB)}$$

$$\sin(\angle ADB)=6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$\overline{AE}=k$ ($k>0$)이라 하고 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\text{직각삼각형 AEH에서 } \overline{AH}=k \cos 60^\circ = \frac{k}{2}$$

$$\overline{DH}=\overline{AD}-\overline{AH}=4-\frac{k}{2}$$

$$\sin(\angle ADE)=\frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\cos(\angle ADE)=\sqrt{1-\sin^2(\angle ADE)}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan(\angle ADE)=\frac{\sin(\angle ADE)}{\cos(\angle ADE)}=\frac{3}{\sqrt{7}} \quad \cdots \textcircled{A}$$

한편, 직각삼각형 EHA에서

$$\overline{EH}=\sin 60^\circ \times \overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$$

직각삼각형 EDH에서

$$\tan(\angle EDH)=\frac{\overline{EH}}{\overline{DH}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}} \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\angle ADE=\angle EDH$ 이므로 ①과 ②에서

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}}=\frac{3}{\sqrt{7}}, \quad \text{즉 } k=\frac{24}{\sqrt{21}+3}=2(\sqrt{21}-3)=\overline{AE}$$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)}=2R \text{에서 } \frac{2(\sqrt{21}-3)}{\frac{3}{4}}=2R$$

따라서 $2R = \frac{8(\sqrt{21}-3)}{3}$ 에서 $p=3, q=8$ 이므로

$$p+q=11$$

11

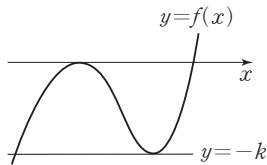
22

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축에 접하고,

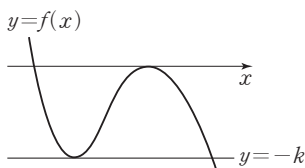
조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=-k$ 에 접한다.

따라서 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 2가지 경우이다.

① 최고차항의 계수가 양수인 경우



② 최고차항의 계수가 음수인 경우

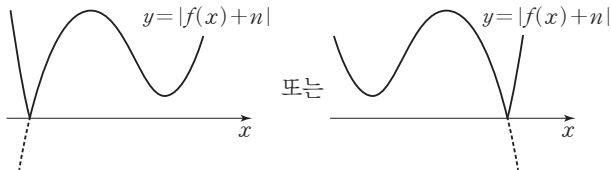


①, ②에서 삼차함수 $y=f(x)$ 의 극댓값은 0이고, 극솟값은 $-k$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)+n$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $y=f(x)+n$ 의 극댓값은 n , 극솟값은 $n-k$ 이다.

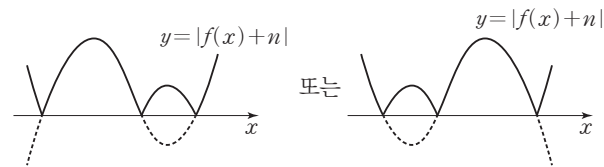
(i) $n-k \geq 0$ 일 때, 즉 $n \geq k$

함수 $|f(x)+n|$ 의 극댓값은 n 이다.



(ii) $n-k < 0$ 일 때, 즉 $n < k$

함수 $|f(x)+n|$ 의 극댓값은 n , $-n+k$ 이다.



(i), (ii)에서

$$n=1\text{일 때, } S_1 = \{1, -1+k\}$$

$$n=2\text{일 때, } S_2 = \{2, -2+k\}$$

$$n=6\text{일 때, 조건 (나)에 의하여 } S_6 = \{6\}$$

이므로

$$S_1 \cup S_2 \cup S_6 = \{1, -1+k, 2, -2+k, 6\}$$

이때 $S_1 \cup S_2 \cup S_6$ 의 모든 원소의 합이 $2k+6$ 이므로

$$2k+6=17, k=\frac{11}{2}$$

따라서 $100k=550$

550

23

부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sec^2 x dx \\ &= \left[x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \left[-\ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \left(-\ln \frac{1}{2} + \ln 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2 \end{aligned}$$

2

24

$f(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \times (2-\cos x) - \sin x \times \sin x}{(2-\cos x)^2} \\ &= \frac{2 \cos x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2-\cos x)^2} \\ &= \frac{2 \cos x - 1}{(2-\cos x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0\text{에서 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$0 < x < 2\pi\text{이므로 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3}$$

따라서 방정식 $f'(x)=0$ 의 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$$

3

25

$x=4\sqrt{2t}, y=t^2+\frac{1}{t}$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = 2t - \frac{1}{t^2}$$

이므로 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\right)^2 + \left(2t - \frac{1}{t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{8}{t} + 4t^2 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^4}} \\ &= \sqrt{4t^2 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^4}} \\ &= \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t^2}\right)^2} \\ &= \left| 2t + \frac{1}{t^2} \right| \\ &= 2t + \frac{1}{t^2} \quad (t > 0\text{이므로}) \end{aligned}$$

$$f(t) = 2t + \frac{1}{t^2}\text{이라 하면}$$

$$f'(t) = 2 - \frac{2}{t^3}$$

이므로 $f'(t)=0$ 에서 $t=1$

$t=1$ 의 좌우에서 $f'(t)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 극소이며 최소이다.

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}t^{-\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dt} = 2t - t^{-2} \text{에서}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sqrt{2}t^{-\frac{3}{2}}, \frac{d^2y}{dt^2} = 2 + 2t^{-3}$$

이므로 $t=1$ 일 때의 점 P의 가속도는 $(-\sqrt{2}, 4)$ 이다.

따라서 $a = -\sqrt{2}$, $b = 4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (-\sqrt{2})^2 + 4^2 \\ = 2 + 16 = 18$$

답 ④

26

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{f(x)} = a \quad (a \neq 0)$$

이고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln f(x)}{x-2}$ 의 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln f(x) = 0$$

$$f(2) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = 0$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 4 + 2a + b = 1$$

$$4 + 2a + 0 = 1 \text{에서 } a = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - \frac{3}{2}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x - \frac{3}{2}} \right)$$

$$= -\frac{2}{3} = a$$

$x-2=t$ 라 하면 $x=t+2$ 이므로

$$x^2 - \frac{3}{2}x = (t+2)^2 - \frac{3}{2}(t+2) = t^2 + \frac{5}{2}t + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln f(x)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + t^2 + \frac{5}{2}t \right)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(1 + t^2 + \frac{5}{2}t \right)}{t^2 + \frac{5}{2}t} \times \frac{t^2 + \frac{5}{2}t}{t} \right]$$

$$= \frac{5}{2} = \beta$$

따라서

$$a + \beta = -\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{11}{6}$$

답 ②

27

x 축 위의 점 $(t, 0)$ ($1 \leq t \leq 4$)를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $2 - \frac{1}{\sqrt{t}}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 = 4 - \frac{4}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_1^4 \left(4 - \frac{4}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} \right) dt \\ = \int_1^4 \left(4 - 4t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{t} \right) dt \\ = \left[4t - 8t^{\frac{1}{2}} + \ln |t| \right]_1^4 \\ = (16 - 16 + \ln 4) - (4 - 8 + 0) \\ = 2 \ln 2 + 4$$

답 ⑤

28

$$f'(x) = (2x+a)e^x + (x^2+ax+b)e^x = \{x^2 + (a+2)x + a+b\}e^x$$

$$g'(x) = (2x+a)e^{-x} + (x^2+ax+b) \times (-e^{-x}) \\ = \{-x^2 + (-a+2)x + a-b\}e^{-x}$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 1+a+2+a+b=0 \text{이므로 } 2a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g'(1)=0 \text{에서 } -1+(-a+2)+a-b=0 \text{이므로 } b=1$$

$$b=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a=-2$$

$$(i) f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)e^x = (x+1)(x-1)e^x$$

$f'(-1)=0$ 이고 $x=-1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=-1$ 에서 $f(x)$ 는 극댓값 $f(-1)=4e^{-1}$ 을 갖는다. 따라서 $M_1=4e^{-1}$

$$(ii) g(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

$$g'(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^{-x} \\ = -(x-1)(x-3)e^{-x}$$

$g'(3)=0$ 이고 $x=3$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=3$ 에서 $g(x)$ 는 극댓값 $g(3)=4e^{-3}$ 을 갖는다.

$$\text{따라서 } M_2=4e^{-3}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } M_1 \times M_2 = 4e^{-1} \times 4e^{-3} = 16e^{-4}$$

답 ④

29

점 A_1 을 원점, 직선 A_1B_1 을 x 축, 직선 A_1D_1 을 y 축으로 놓으면

$$B_1(1, 0), D_1(0, 1), P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right), Q_1\left(1, \frac{1}{2}\right), R_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

이다. 이때 직선 A_1Q_1 의 방정식은 $y = \frac{1}{2}x$ 이고, 직선 P_1R_1 의 방정식은 $y = -x + \frac{1}{2}$ 이다.

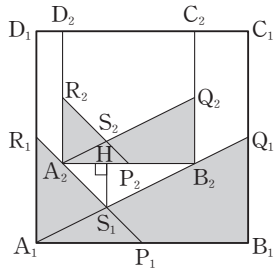
$$\frac{1}{2}x = -x + \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}$$

이므로 $S_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ 이다.

다각형 $A_1B_1Q_1S_1R_1$ 의 넓이는 삼각형 $A_1P_1R_1$ 의 넓이와 삼각형 $A_1B_1Q_1$ 의 넓이의 합에서 삼각형 $A_1P_1S_1$ 의 넓이를 뺀 것이므로

$$T_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이를 x 라 하자.

점 S_1 에서 선분 A_2B_2 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

점 $S_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ 에서 선분 C_1D_1 까지의 거리는 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ 이므로

선분 S_1H 의 길이는 $\frac{5}{6} - x$ 이다.

이때 선분 A_2H 의 길이는 $\frac{5}{6} - x$, 선분 B_2H 의 길이는 $2\left(\frac{5}{6} - x\right)$ 이다.

$$\overline{A_2H} + \overline{B_2H} = \overline{A_2B_2} \text{이므로}$$

$$\frac{5}{6} - x + 2\left(\frac{5}{6} - x\right) = x$$

$$\frac{5}{6} - x + \frac{5}{3} - 2x = x$$

$$4x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{8}$$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이의 비가

$1 : \frac{5}{8}$ 이므로 다각형 $A_nB_nQ_nS_nR_n$ 과 다각형 $A_{n+1}B_{n+1}Q_{n+1}S_{n+1}R_{n+1}$

의 넓이의 비는 $1 : \left(\frac{5}{8}\right)^2$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ 은 첫째항이 $\frac{1}{3}$ 이고 공비가 $\left(\frac{5}{8}\right)^2$ 인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{39}{64}} = \frac{64}{117}$$

따라서 $p=117$, $q=64$ 이므로

$$p+q=181$$

답 181

30

함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고 실수 전체의 집합에서 증가하므로 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y=\{f(x)\}^3$ 과 x 축 및 직선 $x=t$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^t \{f(x)\}^3 dx$$

이고 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y=\{g(x)\}^3$ 과 x 축 및 직선 $x=f(t)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{f(t)} \{g(x)\}^3 dx$$

이다. 임의의 양의 실수 t 에 대하여 두 값이 서로 같으므로

$$\int_0^t \{f(x)\}^3 dx = \int_0^{f(t)} \{g(x)\}^3 dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이다.

함수 $\{g(x)\}^3$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 하면

$$\int_0^{f(t)} \{g(x)\}^3 dx = G(f(t)) - G(0)$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\int_0^t \{f(x)\}^3 dx = G(f(t)) - G(0)$$

이고 위의 등식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\{f(t)\}^3 = f'(t) \{g(f(t))\}^3$$

$g(x)=f^{-1}(x)$ 이므로 $g(f(t))=t$ 이고 임의의 양의 실수 t 에 대하여

$$\{f(t)\}^3 = t^3 f'(t) \text{이다.}$$

$$f(a)=f'(a)=\frac{1}{8} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^3 = a^3 \times \frac{1}{8}, \quad a^3 = \frac{1}{64}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}, \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_a^0 x f''(x) dx &= - \int_0^{\frac{1}{4}} x f''(x) dx \\ &= - \left[x f'(x) \right]_0^{\frac{1}{4}} + \int_0^{\frac{1}{4}} f'(x) dx \\ &= - \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} + \left[f(x) \right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= - \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{32} \end{aligned}$$

따라서 $p=32$, $q=3$ 이므로

$$p+q=32+3=35$$

답 35

참고 1

$\textcircled{1}$ 에서 $\frac{d}{dt} \int_0^{f(t)} \{g(x)\}^3 dx$ 를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\int_0^{f(t)} \{g(x)\}^3 dx$ 에서 $x=f(s)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{ds}=f'(s)$ 이고 $f(s)$ 는 증가함수이므로 $f(0)=0$ 에서 $x=0$ 일 때 $s=0$, $x=f(t)$ 일 때 $s=t$ 이다.

한편, $g(x)=f^{-1}(x)$ 에서 $g(f(s))=s$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{f(t)} \{g(x)\}^3 dx &= \int_0^t \{g(f(s))\}^3 f'(s) ds \\ &= \int_0^t s^3 f'(s) ds \\ &= \int_0^t x^3 f'(x) dx \end{aligned}$$

따라서

$$\frac{d}{dt} \int_0^{f(t)} \{g(x)\}^3 dx = \frac{d}{dt} \int_0^t x^3 f'(x) dx = t^3 f'(t)$$

참고 2

함수 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+48x^2}}$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

실전 모의고사 4회

본문 154~161쪽

01 ④	02 ③	03 ②	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ②	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 10	17 7	18 33	19 7	20 612
21 25	22 120	23 ③	24 ①	25 ②
26 ④	27 ②	28 ②	29 36	30 10

01

$$\begin{aligned}
 \sqrt[8]{3^7} \times \sqrt{3^{\frac{9}{4}}} &= 3^{\frac{7}{8}} \times \left(3^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 3^{\frac{7}{8}} \times 3^{\frac{9}{8}} \\
 &= 3^{\frac{7}{8} + \frac{9}{8}} \\
 &= 3^2 = 9
 \end{aligned}$$

답 ④

02

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (4x^3 - 3ax^2 + 4) dx &= \left[x^4 - ax^3 + 4x \right]_0^1 \\
 &= 1 - a + 4 \\
 &= 5 - a = 2
 \end{aligned}$$

따라서 $a=3$

답 ③

03

$$\begin{aligned}
 y &= \log_2 \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \\
 &= \log_2 \left\{ \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{4} \right) \right\} \\
 &= \log_2 \left(x + \frac{1}{4} \right) + \log_2 \sqrt{2} \\
 &= \log_2 \left(x + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

함수 $y = \log_2 \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = -\frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{2}$ 이므로

$$m + n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

답 ②

04

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= -1 + 1 = 0
 \end{aligned}$$

답 ③

05

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3 - \tan \theta} &= 3 + 2\sqrt{2} \text{에서} \\
 3 - \tan \theta &= \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = 3 - 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $\tan \theta = 2\sqrt{2}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = 2\sqrt{2} \cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 ①을 대입하면

$$8\cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$9\cos^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \cos \theta < 0 \text{이므로 } \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sin \theta + \cos \theta &= \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3} \right) \\
 &= -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

답 ①

06

$$\frac{d}{dx} \int f'(x) dx = f'(x) \text{이고}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(2) - f(1) &= \int_1^2 f'(x) dx \\
 &= \int_1^2 (3x^2 + 2ax) dx \\
 &= \left[x^3 + ax^2 \right]_1^2 \\
 &= (8 + 4a) - (1 + a) \\
 &= 3a + 7 = 19
 \end{aligned}$$

따라서 $a=4$

답 ④

07

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} (2x + b) = \lim_{x \rightarrow a+} (2x^2 - 3b) = 2a + b$$

$$2a + b = 2a^2 - 3b, \quad 4b = 2a^2 - 2a$$

$$\text{따라서 } b = \frac{1}{2}a(a - 1)$$

이때 a, b 가 10 이하의 자연수이므로

$$a=2 \text{일 때, } b=1$$

$$a=3 \text{일 때, } b=3$$

$$a=4 \text{일 때, } b=6$$

$$a=5 \text{일 때, } b=10$$

따라서 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 3), (4, 6), (5, 10)$ 의 4개이다.

답 ③

08

$$8 \sin \left\{ \frac{\pi}{6}(x+7) \right\} = 4\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\sin \left\{ \frac{\pi}{6}(x+7) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}(x+7) \text{이라 하면}$$

$$0 \leq x \leq 12 \text{에서 } 7 \leq x+7 \leq 19$$

$$\frac{7}{6}\pi \leq \frac{\pi}{6}(x+7) \leq \frac{19}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{7}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{19}{6}\pi$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{7}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{8}{3}\pi$$

그러므로

$$\frac{\pi}{6}(x+7) = \frac{7}{3}\pi \text{에서 } x=7$$

$$\frac{\pi}{6}(x+7) = \frac{8}{3}\pi \text{에서 } x=9$$

따라서 $x=7$ 또는 $x=9$ 이므로 만나는 두 점의 x 좌표의 합은 $7+9=16$

답 ②

09

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면 a, b 는

방정식 $f(x) = -x+4$ 의 두 근이므로 0이 아닌 상수 m 에 대하여 $f(x) - (-x+4) = m(x-a)(x-b)$ ($m < 0$)으로 놓을 수 있다.

$$\text{따라서 } f(x) = m(x-a)(x-b) - x + 4$$

$$f'(x) = m(x-b) + m(x-a) - 1$$

점 A에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선의 기울기가 3이므로

$$f'(a) = m(a-b) - 1 = 3$$

$$m(a-b) = 4$$

따라서 점 B에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선의 기울기는

$$f'(b) = m(b-a) - 1 = -4 - 1 = -5$$

답 ③

10

$$(\log 5)^2 + (\log 2)^2 = (\log 5 + \log 2)^2 - 2 \log 5 \times \log 2 = 1 - 2a$$

$$(\log 5 - \log 2)^2 = (\log 5)^2 + (\log 2)^2 - 2 \log 5 \times \log 2$$

$$= 1 - 2a - 2a = 1 - 4a$$

$$\text{이므로 } \log 5 - \log 2 = \sqrt{1-4a}$$

$$(\log 25)^4 - (\log 4)^4$$

$$= (2 \log 5)^4 - (2 \log 2)^4$$

$$= 16\{(\log 5)^4 - (\log 2)^4\}$$

$$= 16\{(\log 5)^2 + (\log 2)^2\}\{(\log 5)^2 - (\log 2)^2\}$$

$$= 16\{(\log 5)^2 + (\log 2)^2\}(\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2)$$

$$= 16(1-2a)\sqrt{1-4a}$$

따라서 $p=16, q=4$ 이므로

$$p+q=16+4=20$$

답 ③

11

조건 (나)에서 $a_{n+3} - a_{n+1} = b_{n+3} - b_{n+1}$ 이므로

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_{n+3} - b_{n+3}$$

따라서

$$a_2 - b_2 = a_4 - b_4 = a_6 - b_6 = a_8 - b_8 = \dots = a_{2n} - b_{2n} = \alpha \text{라 하고}$$

$$a_3 - b_3 = a_5 - b_5 = a_7 - b_7 = a_9 - b_9 = \dots = a_{2n+1} - b_{2n+1} = \beta \text{라 하면}$$

$$\sum_{k=1}^8 (a_{k+1} - b_{k+1}) = (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_9 - b_9) = 48 \text{에서}$$

$$4(\alpha + \beta) = 48, \alpha + \beta = 12$$

조건 (나)에서 $a_{n+3} - a_{n+1} = b_{n+2} - b_n$ 이므로

$$a_{n+3} - b_{n+2} = a_{n+1} - b_n$$

그런데 조건 (가)에서 $a_3 - b_2 = 3 - 6 = -3$ 이므로

$$a_{2n+3} - b_{2n+2} = a_{2n+1} - b_{2n} = -3$$

따라서 $a_{2n+1} - b_{2n} = -3$ 이고 $\alpha + \beta = 12$ 이므로

$$a_{2n} - b_{2n} + a_{2n+1} - b_{2n+1} = 12 \text{에서}$$

$$a_{2n} - b_{2n+1} = 15$$

$$\sum_{k=1}^8 (a_{2k} - b_{2k+1}) = (a_2 - b_3) + (a_4 - b_5) + (a_6 - b_7) + \dots + (a_{16} - b_{17})$$

$$= 15 + 15 + \dots + 15$$

$$= 15 \times 8 = 120$$

답 ②

12

수직선 위의 좌표가 1인 점 A를 출발한 점 P의

1초 후의 위치는 $1 + 1 \times 2 = 3$

$$2\text{초 후의 위치는 } 3 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 4$$

$$4\text{초 후의 위치는 } 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 3$$

$$6\text{초 후의 위치는 } 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 2$$

$$7\text{초 후의 위치는 } 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{5}{2}$$

$$8\text{초 후의 위치는 } \frac{5}{2} + 1 \times 1 = \frac{7}{2}$$

$$\text{이므로 } \frac{15}{2}\text{초 후의 위치는 } \frac{5}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

$t = \frac{15}{2}$ 일 때 점 P는 수직선 위의 좌표가 3인 점 B를 세 번째 지난다.

그러므로 $t = \frac{15}{2}$ 일 때까지 점 P가 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{15}{2}} |v(t)| dt$$

$$= 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1$$

$$= 2 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 6$$

답 ③

13

$a_1=1$ 이고, $3S_n=(n+2)a_n$ 에서

$n=2$ 일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$ 이므로 $a_2=3$ 이다.

즉, $\begin{cases} p+q=1 \\ 4p+2q=3 \end{cases}$ 이므로 연립방정식을 풀면

$p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \frac{1}{2} \times n^2 + \frac{1}{2} \times n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \dots\dots (*)$$

이다.

(i) $n=1$ 일 때, $a_1=\frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 1=1$ 이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$a_m = \frac{1}{2} \times m^2 + \frac{1}{2} \times m = \frac{1}{2}m(m+1)$$

한편, $3S_n=(n+2)a_n$ 에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$ 이므로

$$3a_{m+1}=(m+3)a_{m+1}-(m+2)a_m, \quad ma_{m+1}=(m+2)a_m$$

$$a_{m+1} = \frac{m+2}{m} \times a_m = \frac{m+2}{m} \times \frac{1}{2}m(m+1)$$

$$= \frac{1}{2} \times (m+1)(m+2)$$

$$= \frac{1}{2}(m+1)^2 + \frac{1}{2}(m+1)$$

이다.

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$ 이 성립한다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}$ 이고

$$f(m)=\frac{m+2}{m}, g(m)=(m+1)(m+2)$$

이므로 $\alpha+\beta=1, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=4$ 에서

$$f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=f(1)+g(4)=3+30=33$$

답 ②

14

조건 (가)와 (나)에서 $0 < h < 5$ 인 임의의 h 에 대하여

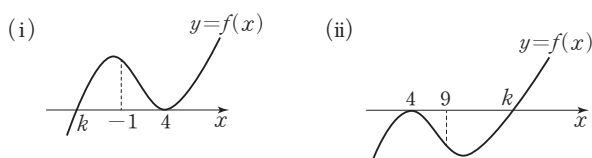
$$\int_{4-h}^4 f'(x) dx \times \int_4^{4+h} f'(x) dx < 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_{4-h}^4 f'(x) dx > 0 \text{ 이고 } \int_4^{4+h} f'(x) dx < 0 \text{ 또는}$$

$$\int_{4-h}^4 f'(x) dx < 0 \text{ 이고 } \int_4^{4+h} f'(x) dx > 0 \text{ 이어야 한다.}$$

그러므로 $f'(x)$ 의 부호가 $x=4$ 의 좌우에서 바뀌고 $f'(4)=0$ 이다.

즉, $f(4)=f'(4)=0$ 이므로 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$f(x)=(x-4)^2(x-k) \quad (k \neq 4) \text{ 라 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-4)(x-k) + (x-4)^2 \\ &= (x-4)\{2(x-k) + (x-4)\} \\ &= (x-4)\{3x - (2k+4)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } x=4 \text{ 또는 } x=\frac{2k+4}{3}$$

방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근의 차는 5 이상이므로

$$\left| 4 - \frac{2k+4}{3} \right| \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i)의 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } 4 - \frac{2k+4}{3} \geq 5, \quad k \leq -\frac{7}{2}$$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$ 의 두 근의 차를 d_1 이라 하면

$$d_1 \geq 4 - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{2}$$

(ii)의 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{2k+4}{3} - 4 \geq 5, \quad k \geq \frac{23}{2}$$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$ 의 두 근의 차를 d_2 라 하면

$$d_2 \geq \frac{23}{2} - 4 = \frac{15}{2}$$

(i), (ii)로부터 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 차의 최솟값은 $\frac{15}{2}$

답 ⑤

15

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수이고, $a \neq 0$)으로 놓으면

조건 (가)에서 $f(0)=1$ 이므로 $d=1$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \text{ 이므로}$$

조건 (나)에서

$$f'(0)=-3, \quad c=-3$$

$$f'(1)=-3, \quad 3a+2b+c=-3$$

$$c=-3 \text{ 이므로 } 3a+2b=0$$

$$\text{따라서 } b=-\frac{3}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (다)에서 $x=\alpha$ 에서 극댓값, $x=\beta$ 에서 극솟값을 가지므로 α, β 는 방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a} \text{ 이고, } \textcircled{1} \text{에서 } b=-\frac{3}{2}a \text{ 이므로 } \alpha+\beta=1$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{3a} \text{ 이고, } c=-3 \text{ 이므로 } \alpha\beta=-\frac{1}{a}$$

또

$$\begin{aligned} |f(\alpha)-f(\beta)| &= \left| a(\alpha^3-\beta^3) - \frac{3}{2}a(\alpha^2-\beta^2) - 3(\alpha-\beta) \right| \\ &= |\alpha-\beta| \left| a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - \frac{3}{2}a(\alpha+\beta) - 3 \right| \end{aligned}$$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$ 이므로

$$|\alpha-\beta| \left| a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - \frac{3}{2}a(\alpha+\beta) - 3 \right| = |\alpha-\beta|$$

$$\left| a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - \frac{3}{2}a(\alpha+\beta) - 3 \right| = 1$$

$$\left| a\{(a+\beta)^2 - a\beta\} - \frac{3}{2}a(a+\beta) - 3 \right| = 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -\frac{1}{a}$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하여 정리하면

$$\left| a\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \frac{3}{2}a - 3 \right| = 1, \quad \left| -\frac{1}{2}a - 2 \right| = 1$$

$$|a+4|=2$$

에서 $a = -2$ 또는 $a = -6$ $\textcircled{B}$

한편, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α, β 를 가지므로 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = b^2 - 3ac = \left(-\frac{3}{2}a\right)^2 + 9a$$

$$= \frac{9}{4}a(a+4) > 0$$

따라서 $a < -4$ 또는 $a > 0$ $\textcircled{C}$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서 $a = -6$ 이고, $\textcircled{A}$ 에서 $b = 9$

따라서 $f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 3x + 1$ 이므로

$$f(2) = -48 + 36 - 6 + 1 = -17$$

 $\textcircled{3}$

다른 풀이

조건 (나)에서 $f'(0) = f'(1) = -3$ 이므로

$f'(x) = kx(x-1) - 3 = kx^2 - kx - 3$ ($k \neq 0$)으로 놓을 수 있다.

이때 $f(x) = \frac{k}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 - 3x + C$ (단, C 는 적분상수)

조건 (가)에서 $f(0) = 1$ 이므로 $f(0) = C = 1$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{k}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 - 3x + 1$$

조건 (다)에서 삼차함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값, $x = \beta$ 에서 극솟값을 가지므로 α, β 는 방정식 $f'(x) = kx^2 - kx - 3 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -\frac{3}{k} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편,

$$\begin{aligned} |f(\alpha) - f(\beta)| &= \left| \frac{k}{3}(\alpha^3 - \beta^3) - \frac{k}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - 3(\alpha - \beta) \right| \\ &= |\alpha - \beta| \left| \frac{k}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \frac{k}{2}(\alpha + \beta) - 3 \right| \end{aligned}$$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha) - f(\beta)| = |\alpha - \beta|$ 이므로

$$|\alpha - \beta| \left| \frac{k}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \frac{k}{2}(\alpha + \beta) - 3 \right| = |\alpha - \beta|$$

$$\left| \frac{k}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \frac{k}{2}(\alpha + \beta) - 3 \right| = 1$$

$$\left| \frac{k}{3}\{(a+\beta)^2 - a\beta\} - \frac{k}{2}(a+\beta) - 3 \right| = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$\left| \frac{k}{3}\left(1 + \frac{3}{k}\right) - \frac{k}{2} - 3 \right| = 1, \quad \left| -\frac{k}{6} - 2 \right| = 1$$

$$|k+12|=6$$

이므로 $k = -6$ 또는 $k = -18$ $\textcircled{C}$

한편, 이차방정식 $f'(x) = kx^2 - kx - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α, β 를 가지므로 $D > 0$ 이어야 한다.

$$D = (-k)^2 + 12k = k^2 + 12k$$

$$= k(k+12) > 0$$

이므로 $k > 0$ 또는 $k < -12$ $\textcircled{D}$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서 $k = -18$ 이므로

$$f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 3x + 1$$

$$\text{따라서 } f(2) = -48 + 36 - 6 + 1 = -17$$

16

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{12} - a_6 = (a + 11d) - (a + 5d)$$

$$= 6d = 30$$

이므로 $d = 5$

$$\text{따라서 } a_{20} - a_{18} = 2d = 2 \times 5 = 10$$

 10

17

$g(x) = (-2x^3 + 1)f(x)$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$g(-1) = (2+1) \times f(-1) = 3f(-1)$$

$$g(-1) = 9 \text{이므로 } f(-1) = 3$$

$g(x) = (-2x^3 + 1)f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = -6x^2f(x) + (-2x^3 + 1)f'(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$g'(-1) = (-6) \times f(-1) + 3f'(-1)$$

$$3 = (-6) \times 3 + 3f'(-1), \quad 3f'(-1) = 21$$

$$\text{따라서 } f'(-1) = 7$$

 7

18

$(g \circ g)(a) = g(g(a)) = 4$ 에서

$g(a) = s$ 라 하면

$$g(s) = 4 \text{이므로 } f(4) = s$$

$$4 < 8 \text{이므로 } s = 4 \times 4 = 16$$

$$g(a) = 16 \text{에서 } f(16) = a$$

$$16 \geq 8 \text{이므로}$$

$$a = f(16) = \log_2 16 + 29 = 33$$

 33

19

사각형 OABC의 넓이는 삼각형 OAB와 삼각형 OBC의 넓이의 합이다.

삼각형 OAB에 대하여 사각형 OABC의 넓이가 최대가 될 때는 삼각형 OBC의 넓이가 최대가 될 때이며 [그림 1]과 같이 점 C에서의 접선의 기울기가 직선 OB의 기울기와 서로 같을 때이다.

점 B의 좌표를 $B(t, 3t - t^2)$ 으로 놓으면 직선 OB의 기울기는

$$\frac{3t - t^2}{t} = 3 - t \text{이고}$$

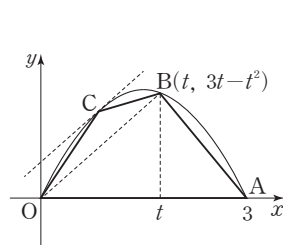
$$y = 3x - x^2 \text{에서 } y' = 3 - 2x \text{이므로}$$

구하는 점 C의 x좌표는

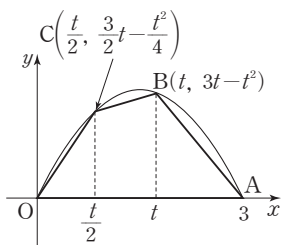
$$3 - 2x = 3 - t \text{에서}$$

$$x = \frac{t}{2}$$

따라서 점 C의 좌표는 $C\left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t - \frac{t^2}{4}\right)$ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 사각형 OABC의 넓이를 $S(t)$ ($0 < t < 3$)이라 하면

$S(t)$ 는 [그림 2]에서와 같이

(삼각형의 넓이) + (사다리꼴의 넓이) + (삼각형의 넓이)이므로

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times \frac{t}{2} \times \left(\frac{3}{2}t - \frac{t^2}{4}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{t}{2} \times \left(\frac{3}{2}t - \frac{t^2}{4} + 3t - t^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (3-t) \times (3t - t^2) \\ &= \frac{6t^2 - t^3}{16} + \frac{18t^2 - 5t^3}{16} + \frac{9t - 6t^2 + t^3}{2} \\ &= \frac{2t^3 - 24t^2 + 72t}{16} \\ &= \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t) \end{aligned}$$

$$S'(t) = \frac{1}{8}(3t^2 - 24t + 36) = \frac{3}{8}(t-2)(t-6)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } 0 < t < 3 \text{이므로 } t = 2$$

$0 < t < 3$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	2	...	(3)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=2$ 일 때, $S(t)$ 는 극대이면서 최대이다.

이때 두 점 B와 C의 좌표는 각각 $B(2, 2)$, $C(1, 2)$ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 + 2 + 1 + 2 = 7$$

답 7

20

함수 $y = \frac{n}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = k^2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{n}{x} = k^2x \text{에서 } x^2 = \frac{n}{k^2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{n}}{k} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{n}}{k}$$

또한 함수 $y = \frac{n}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{k^2}$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{n}{x} = \frac{x}{k^2} \text{에서 } x^2 = nk^2$$

$$x = -\sqrt{n}k \text{ 또는 } x = \sqrt{n}k$$

$$\text{한편, } \sqrt{n}k - \frac{\sqrt{n}}{k} = \frac{\sqrt{n}}{k} - \left(-\frac{\sqrt{n}}{k}\right) \text{에서}$$

$$\sqrt{n}k = \frac{3\sqrt{n}}{k}, \text{ 즉 } k^2 = 3, k = \sqrt{3}$$

그러므로 네 수 d, b, a, c 는 각각 $-\sqrt{3n}, -\sqrt{\frac{n}{3}}, \sqrt{\frac{n}{3}}, \sqrt{3n}$ 이다.

네 수 $-\sqrt{3n}, -\sqrt{\frac{n}{3}}, \sqrt{\frac{n}{3}}, \sqrt{3n}$ 의 공차는

$$\sqrt{3n} - \sqrt{\frac{n}{3}} = \frac{2\sqrt{3n}}{3} \text{이고 공차는 16 이하의 자연수이므로}$$

$$1 \leq \frac{2\sqrt{3n}}{3} \leq 16 \text{에서}$$

$$n = 3m^2 \ (m=1, 2, 3, \dots, 8)$$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$$\begin{aligned} 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2) &= 3 \sum_{k=1}^8 k^2 \\ &= 3 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \\ &= 612 \end{aligned}$$

답 612

21

밑면의 반지름의 길이가 30이고 높이가 $10\sqrt{7}$ 이므로

원뿔의 모선의 길이는

$$\sqrt{30^2 + (10\sqrt{7})^2} = \sqrt{900 + 700} = \sqrt{1600} = 40$$

그림과 같이 원뿔의 전개도를 그리고 부채꼴 OCD에서 호 CD의 중점을 E라 하면 점 B는 선분 OE 위에 있다.

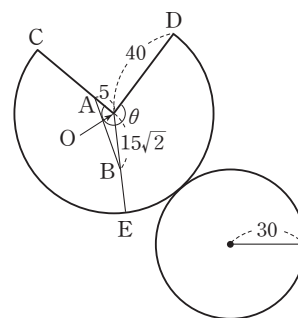
또 부채꼴 OCD에서 중심각의 크기를 θ , 호 CD의 길이를 l 이라 하면 $l = 40 \times \theta$ 이고,

l 은 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$40 \times \theta = 2 \times \pi \times 30$$

$$\theta = \frac{60}{40}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{따라서 } \angle AOB = \frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}\pi$$



그러므로 구하는 최단거리는 삼각형 OAB에서 선분 AB의 길이와 같으므로 코사인법칙으로부터

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 5^2 + (15\sqrt{2})^2 - 2 \times 5 \times 15\sqrt{2} \times \cos \frac{3}{4}\pi \\ &= 25 + 450 - 2 \times 5 \times 15\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 25 + 450 + 150 \\ &= 625 \end{aligned}$$

$$\overline{AB} > 0 \text{이므로 } \overline{AB} = \sqrt{625} = 25$$

답 25

22

$$y = x^3 - a^2x + a^3 \text{에서 } y' = 3x^2 - a^2$$

접점을 $(t, t^3 - a^2t + a^3)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - a^2t + a^3) = (3t^2 - a^2)(x - t), \text{ 즉}$$

$$y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 + a^3$$

이 접선이 점 $P(b, 0)$ 을 지나므로

$$(3t^2 - a^2)b - 2t^3 + a^3 = 0, \text{ 즉}$$

$$2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(i) 점 P에서 곡선 $y = x^3 - a^2x + a^3$ 에 그은 접선이 세 개일 때 ①은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t) = 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3 \text{이라 하면}$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6bt = 6t(t - b)$$

$b > 0$ 이므로 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$

함수 $y = f(t)$ 의 그래프가 t 축과 만나는 점의 개수가 3이어야 하므로 $f(0) > 0$ 이고 $f(b) < 0$ 이어야 한다.

$$f(0) = a^2b - a^3 = a^2(b - a) > 0 \text{에서}$$

$$0 < a < b \leq 15 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f(b) = -b^3 + a^2b - a^3 = -b(b^2 - a^2) - a^3 \text{이고 } \textcircled{2} \text{이 성립하면}$$

$$f(b) < 0 \text{이다.}$$

그러므로 ②을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), \cdots, (1, 13), (1, 14), (1, 15),$$

$$(2, 3), (2, 4), (2, 5), \cdots, (2, 14), (2, 15),$$

$$(3, 4), (3, 5), (3, 6), \cdots, (3, 15),$$

$\vdots$

$$(12, 13), (12, 14), (12, 15),$$

$$(13, 14), (13, 15),$$

$$(14, 15)$$

이므로 그 개수는

$$p = 1 + 2 + 3 + \cdots + 14 = \frac{14 \times (1 + 14)}{2} = 105$$

(ii) 점 P에서 곡선 $y = x^3 - a^2x + a^3$ 에 그은 접선이 두 개일 때

①은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f(0) = 0$ 또는 $f(b) = 0$ 이어야 한다.

① $f(0) = 0$ 인 경우

$$f(0) = a^2b - a^3 = a^2(b - a) = 0 \text{에서}$$

$$b = a \quad \cdots \textcircled{3}$$

③을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), \cdots, (14, 14), (15, 15)$$

이므로 그 개수는 15이다.

② $f(b) = 0$ 인 경우

$$f(b) = -b^3 + a^2b - a^3 \text{에서}$$

$$b > a > 0 \text{일 때, } -b^3 + a^2b - a^3 = -b(b^2 - a^2) - a^3 < 0$$

$$a \geq b > 0 \text{일 때, } -b^3 + a^2b - a^3 = -b^3 + a^2(b - a) < 0$$

이므로 $f(b) = 0$ 일 수 없다.

①, ②에서 $q = 15$

$$\text{따라서 } p + q = 105 + 15 = 120$$

답 120

23

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{\frac{2}{t}} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

$$\frac{t^2 - 1}{2t} = -\frac{3}{4} \text{에서 } 2t^2 + 3t - 2 = 0, (2t - 1)(t + 2) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = \frac{1}{2}$$

이때 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(2 \times 2)^2 + (1 - 4)^2} = 5$$

답 ③

24

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin \frac{x}{2} dx &= \left[-2x \cos \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-2 \cos \frac{x}{2}) dx \\ &= -2 \times \frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left[-4 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$

답 ①

25

$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos^3 x} = \frac{1 - \tan x}{\cos^2 x} = (1 - \tan x) \sec^2 x$$

$$\tan x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \sec^2 x$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (1 - \tan x) \sec^2 x dx$$

$$= \int (1 - t) dt = t - \frac{t^2}{2} + C$$

$$= \tan x - \frac{\tan^2 x}{2} + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$f(x) = \tan x - \frac{\tan^2 x}{2} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

답 ②

26

x 축 위의 점 $(t, 0)$ $\left(\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$ 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가

$$\cot t - (-\tan t) = \cot t + \tan t$$

인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = (\cot t + \tan t)^2 = \cot^2 t + \tan^2 t + 2 \cot t \tan t$$

$$= \cot^2 t + \tan^2 t + 2 = (1 + \cot^2 t) + (1 + \tan^2 t)$$

$$= \csc^2 t + \sec^2 t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(t) dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\csc^2 t + \sec^2 t) dt \\ &= \left[-\cot t + \tan t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right) - \left(-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

27

$g(x) = a \sin^2 x + b \cos x$ 의 그래프가 점 $P\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ 를 지나므로

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \sin^2 \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} = a$$

$$a = 2$$

$$f'(x) = -2e^{-2x+\pi} \text{에서 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

점 P에서의 접선은 서로 수직이므로 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$g(x) = 2 \sin^2 x + b \cos x$$

$$g'(x) = 4 \sin x \cos x - b \sin x$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - b \sin \frac{\pi}{2} = -b = \frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } ab = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

답 ②

28

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^3 + bx + c}{4 + x + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \times (x^2)^n + ax^3 + bx + c}{4 + x + (x^2)^n}$$

에서 다음과 같이 범위를 나누어 함수를 구한다.

(i) $x^2 < 1$, 즉 $-1 < x < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^2)^n = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \times (x^2)^n + ax^3 + bx + c}{4 + x + (x^2)^n} = \frac{ax^3 + bx + c}{4 + x}$$

(ii) $x = -1$ 일 때

$$f(-1) = \frac{-1 \times 1 - a - b + c}{4 - 1 + 1} = \frac{-1 - a - b + c}{4}$$

(iii) $x = 1$ 일 때

$$f(1) = \frac{1 + a + b + c}{4 + 1 + 1} = \frac{1 + a + b + c}{6}$$

(iv) $x^2 > 1$, 즉 $x < -1$ 또는 $x > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^2)^n} = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \times (x^2)^n + ax^3 + bx + c}{4 + x + (x^2)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{a}{x^{2n-3}} + \frac{b}{x^{2n-1}} + \frac{c}{x^{2n}}}{\frac{4}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n-1}} + 1} = x \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = -1$, $x = 1$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(1) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} x = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{ax^3 + bx + c}{4 + x} = \frac{-a - b + c}{3},$$

$$f(-1) = \frac{-1 - a - b + c}{4} \text{이므로}$$

$$a + b - c = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{ax^3 + bx + c}{4 + x} = \frac{a + b + c}{5},$$

$$f(1) = \frac{1 + a + b + c}{6} \text{이므로}$$

$$a + b + c = 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a + b = 4$, $c = 1$

또 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{ax^3 + (4-a)x + 1}{4 + x} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{ax^3 + (3-a)x - 3}{(x-1)(4+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(ax^2 + ax + 3)}{(x-1)(4+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{ax^2 + ax + 3}{4 + x} = \frac{2a + 3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \text{이므로}$$

$$\frac{2a + 3}{5} = 1, a = 1$$

$$a + b = 4 \text{에서 } b = 3$$

$$-1 < x < 1 \text{에서 } f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{4 + x} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x-1) - f(-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{(x-1)^3 + 3(x-1) + 1}{(x-1) + 4} + 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x}{x(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 - 3x + 7}{x + 3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

답 ②

29

$$xg(x) = \{f(x) - f'(x)\}e^{-x} + 2 \int_0^x g(t) dt + 6e^{-x} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = \{f(0) - f'(0)\}e^{-0} + 2 \int_0^0 g(t) dt + 6e^{-0}$$

$$= \{f(0) - f'(0)\}e^{-0} + 6e^{-0}$$

$$f(0)-f'(0)=-6$$

$$f(x)=x^3+ax \text{에서 } f'(x)=3x^2+a \text{이므로}$$

$$f(0)-f'(0)=-a$$

$$\text{즉, } -a=-6 \text{이므로 } a=6$$

$$\{f(x)-f'(x)\}e^{x-a}=(x^3-3x^2+6x-6)e^{x-6}$$

이므로

$$\frac{d}{dx}[\{f(x)-f'(x)\}e^{x-a}]$$

$$=\frac{d}{dx}\{(x^3-3x^2+6x-6)e^{x-6}\}$$

$$=(x^3-3x^2+6x-6)e^{x-6}+(3x^2-6x+6)e^{x-6}$$

$$=x^3e^{x-6}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xg'(x)+g(x)=x^3e^{x-6}+2g(x)$$

$$xg'(x)-g(x)=x^3e^{x-6}$$

$x \neq 0$ 일 때

$$\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=xe^{x-6}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{g(x)}{x}\right\}=xe^{x-6}$$

$$\frac{g(x)}{x}=\int xe^{x-6}dx=xe^{x-6}-\int e^{x-6}dx$$

$$=(x-1)e^{x-6}+C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$g(1)=1 \text{이므로 } C=1$$

즉, $x \neq 0$ 일 때

$$g(x)=x(x-1)e^{x-6}+x$$

한편, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x)=x(x-1)e^{x-6}+x$$

$$\text{따라서 } g(a)=g(6)=6 \times 5 \times e^{6-6}+6=36$$

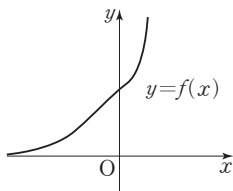
답 36

30

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개

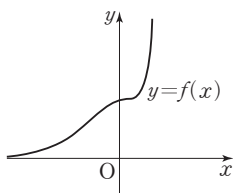
형은 다음과 같다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$ 이 허근을 갖는 경우



조건 (가)를 만족시키지 않는다.

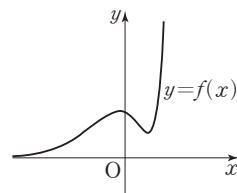
(ii) 방정식 $f'(x)=0$ 이 중근을 갖는 경우



조건 (나)를 만족시키지 않는다.

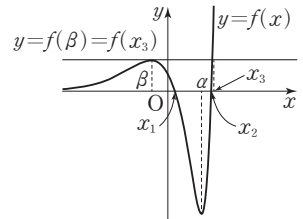
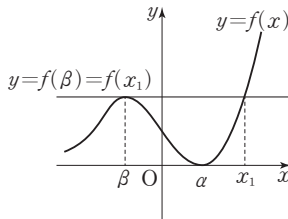
(iii) 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

① $f(x)$ 의 극솟값이 0보다 큰 경우



조건 (가)를 만족시키지 않는다.

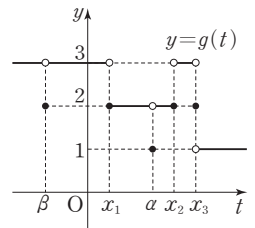
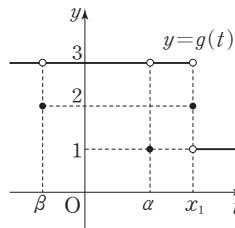
② ㉠ $f(x)$ 의 극솟값이 0인 경우 ㉡ $f(x)$ 의 극솟값이 0보다 작은 경우



위의 ㉠, ㉡의 경우 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

이때 $x=a$ 에서 극솟값, $x=\beta$ 에서 극댓값을 가지며, $f(a) \leq 0, f(\beta) > 0$ 이다.

함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(a)f(\beta)=-5e$ 이므로 ㉡의 경우이다.

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$$

$$=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$$

에서 $f'(a)=0, f'(\beta)=0$ 이므로 a, β 는 이차방정식

$x^2+(a+2)x+a+b=0$ 의 두 근이다. 근과 계수의 관계에서

$$a+\beta=-a-2, a\beta=a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a^2+aa+b=-2a-a, \beta^2+a\beta+b=-2\beta-a$$

$$f(a)=(a^2+aa+b)e^a, f(\beta)=(\beta^2+a\beta+b)e^\beta$$

$$f(a)f(\beta)=(a^2+aa+b)(\beta^2+a\beta+b)e^{a+\beta}$$

$$a+\beta=1 \text{이고 } f(a)f(\beta)=-5e \text{이므로}$$

$$(a^2+aa+b)(\beta^2+a\beta+b)=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$a+\beta=-a-2=1 \text{이므로 } a=-3$$

㉠, ㉡에서

$$(a^2+aa+b)(\beta^2+a\beta+b)=(-2a-a)(-2\beta-a)$$

$$=(2a-3)(2\beta-3)$$

$$=4a\beta-6(a+\beta)+9$$

$$=4(-3+b)-6 \times 1+9$$

$$=4b-9$$

$$4b-9=-5 \text{에서 } b=1$$

$$\text{따라서 } a^2+b^2=(-3)^2+1^2=10$$

답 10

실전 모의고사 5회

본문 162~168쪽

01 ②	02 ①	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 ③	15 ③
16 55	17 32	18 12	19 30	20 424
21 12	22 150	23 ②	24 ③	25 ⑤
26 ②	27 ④	28 ⑤	29 25	30 5

01

$$\begin{aligned}
 (2\sqrt{2})^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} &= (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{-3} \times (2^{-2})^{-2} \\
 &= 2^{-3} \times 2^{-\frac{3}{2}} \times 2^4 \\
 &= 2^{-3-\frac{3}{2}+4} \\
 &= 2^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

02

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (2x-x^2)' \times (x+2) + (2x-x^2) \times (x+2)' \\
 &= (2-2x)(x+2) + (2x-x^2) \\
 \text{이므로} \\
 f'(1) &= 0+1=1
 \end{aligned}$$

답 ①

03

$$\begin{aligned}
 \text{함수 } f(x) &= a^{1-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{x-1} \text{에서 } \frac{1}{a} > 1 \ (0 < a < 1) \text{이므로} \\
 x \text{의 값이 증가할 때 } f(x) \text{의 값도 증가한다.} \\
 2 \leq x \leq 4 \text{에서 함수 } f(x) \text{는 } x=2 \text{일 때 최솟값 4를 가지므로} \\
 f(2) &= \frac{1}{a} = 4 \\
 \text{즉, } a &= \frac{1}{4} \\
 \text{따라서 } f(x) &= 4^{x-1} \text{이므로} \\
 a \times f(3) &= \frac{1}{4} \times 4^2 = 4
 \end{aligned}$$

답 ②

04

$$\begin{aligned}
 \text{함수 } y=f(x) \text{의 그래프에서 } x=1 \text{에서의 우극한은 2이고} \\
 \text{함수 } y=f(-x) \text{의 그래프에서 } x=0 \text{에서의 우극한은} \\
 \text{함수 } y=f(x) \text{의 그래프에서 } x=0 \text{에서의 좌극한이므로 } -1 \text{이다.} \\
 \text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x) &= 2 \times (-1) = -2
 \end{aligned}$$

답 ①

05

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (3k+1)^2 - \sum_{k=1}^n (3k-2)^2 \\
 = \{4^2 + 7^2 + 10^2 + \dots + (3n+1)^2\} - \{1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2\} \\
 = (3n+1)^2 - 1 = 360 \\
 (3n+1)^2 &= 361 \\
 n \text{은 자연수이므로 } 3n+1 &= 19 \\
 \text{따라서 } n &= 6
 \end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (3k+1)^2 - \sum_{k=1}^n (3k-2)^2 &= \sum_{k=1}^n \{(3k+1)^2 - (3k-2)^2\} \\
 &= \sum_{k=1}^n (18k-3) \\
 &= 18 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n \\
 &= 9n^2 + 6n = 360
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3n^2 + 2n - 120 &= 0 \\
 (3n+20)(n-6) &= 0 \\
 n \text{은 자연수이므로 } n-6 &= 0 \\
 \text{따라서 } n &= 6
 \end{aligned}$$

06

$$\begin{aligned}
 2(\cos x - 1)^2 - 3 &= \sin x - 4 \cos x \\
 2 \cos^2 x - 4 \cos x + 2 - 3 &= \sin x - 4 \cos x \\
 2 \cos^2 x - \sin x - 1 &= 0 \\
 2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 &= 0 \\
 2 \sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\
 (2 \sin x - 1)(\sin x + 1) &= 0 \\
 \sin x &= \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = -1 \\
 \text{즉, } x &= \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \\
 \text{따라서 모든 해의 합은 } \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi &= \frac{5}{2}\pi
 \end{aligned}$$

답 ③

07

$$\begin{aligned}
 \text{함수 } f(x) \text{가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 } x=1 \text{에서 연속이다.} \\
 \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{이다.} \\
 \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x^2 - x + 2a) &= 3 - 1 + 2a = 2a + 2 \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x + 3a) &= 3a - 1 \\
 f(1) = 3a - 1 \text{이므로 } 2a + 2 &= 3a - 1 \text{에서} \\
 a &= 3 \\
 f(x) &= \begin{cases} 3x^2 - x + 6 & (x < 1) \\ -x + 9 & (x \geq 1) \end{cases} \\
 \text{이므로} \\
 f(1) &= -1 + 9 = 8 \\
 \text{따라서 } a + f(1) &= 3 + 8 = 11
 \end{aligned}$$

답 ①

08

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 10 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$$

$f'(-1) = 3$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A(-1, 12)에서의 접선 l_1 의 방정식은

$$y - 12 = 3(x + 1), \text{ 즉 } 3x - y + 15 = 0$$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(a) = f'(-1) = 3$ 에서 $3a^2 - 6a - 6 = 3$

$$3(a+1)(a-3) = 0$$

$$a \neq -1 \text{이므로 } a = 3 \text{이고 } f(a) = -8$$

점 A와 직선 l_2 사이의 거리는 점 B(3, -8)과 직선 l_1 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|3 \times 3 - (-8) + 15|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{32}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{10}}{5}$$

답 ④

09

두 점 A, B의 좌표가 각각 (1, 0), (0, 1)이므로 정사각형 OACB의 넓이는 1이다.

두 함수 $y = a^x$ 과 $y = \log_a x$ 는 서로 역함수 관계이므로 점 D의 좌표가 (1, a)이고 점 E의 좌표는 (a, 1)이다.

정사각형 CEFD에서 $\overline{CD} = \overline{CE} = a - 1$ 이므로 그 넓이는 $(a-1)^2$

두 정사각형 OACB와 CEFD의 넓이의 비가 1:4이므로

$$1 : (a-1)^2 = 1 : 4 \text{에서}$$

$$(a-1)^2 = 4, a-1 = \pm 2$$

$$a > 1 \text{이므로 } a = 3$$

즉, 점 E의 x좌표가 3이므로 점 G의 좌표는 (3, 3³)이고 점 H는 직선 $y = x$ 에 대하여 점 G와 대칭이므로 점 H의 좌표는 (3³, 3)이다.

따라서 두 점 G, H를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -(x-3) + 3^3$$

$$y = -x + 30 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

따라서 두 점 G, H를 지나는 직선 $\textcircled{7}$ 이 x축과 만나는 점 I의 좌표는 (30, 0)이므로 삼각형 AIH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (30-1) \times 3 = \frac{87}{2}$$

답 ⑤

10

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $F'(x) = f(x)$ 이고 조건 (가)에서 $F(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가지므로 $F'(0) = f(0) = 0$ 이다.

조건 (나)에서 $f(x) = 0$ 인 x 가 0 이외에 하나 존재하고 조건 (가)에서 $F(x)$ 는 $x=0$ 에서만 극값을 가지므로

$$f(x) = x(x-a)^2 \quad (a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} F(1) - F(-1) &= \int_0^1 f(t)dt - \int_0^{-1} f(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 t(t-a)^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^3 - 2at^2 + a^2t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (-2at^2) dt \\ &= 2 \times \int_0^1 (-2at^2) dt \\ &= 2 \times \left[-\frac{2}{3}at^3 \right]_0^1 \\ &= -\frac{4}{3}a = -4 \end{aligned}$$

에서 $a = 3$ 이므로

$$f(x) = x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$$

따라서

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (t^3 - 6t^2 + 9t)dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + \frac{9}{2}t^2 \right]_0^2 \\ &= 4 - 16 + 18 = 6 \end{aligned}$$

답 ③

11

주어진 그림의 각 단계에서

$$a_1 = 1 + 1$$

$$a_2 = (1+2) + 2 \times 2$$

$$a_3 = (1+2+3) + 3 \times 3$$

$$a_4 = (1+2+3+4) + 4 \times 4$$

⋮

이므로

$$a_n = \sum_{k=1}^n k + n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{3n^2 + n}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{3k^2 + k}{2} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= \frac{1155}{2} + \frac{55}{2} = 605 \end{aligned}$$

답 ⑤

12

함수 $g(x)$ 는 삼차함수이고 $g(-1) = g'(-1) = 0$ 이므로

$$g(x) = (x+1)^2(ax+b) \quad (a \neq 0, a, b \text{는 상수})$$

라 할 수 있다.

주어진 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $g(0) = -4$ 이므로

$$b = -4$$

$$g(x) = (x+1)^2(ax-4)$$

$$= ax^3 + 2(a-2)x^2 + (a-8)x - 4$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 4(a-2)x + a-8 \text{이므로 } g'(1) = -8 \text{에서}$$

$$3a + 4(a-2) + a - 8 = -8$$

$$8a - 16 = -8, a = 1$$

$$g'(x) = 3x^2 - 4x - 7$$

한편, 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = f(x) - 9 \text{이므로}$$

$$f(3) = g'(3) + 9 = 3 \times 3^2 - 4 \times 3 - 7 + 9 = 17$$

답 ④

13

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)=5, (우변)=5이므로 (*)이 성립한다.(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = \frac{(2m+1)!}{m!} - 1$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \\ &= \frac{(2m+1)!}{m!} - 1 + \frac{\{4(m+1)+1\} \times \{2(m+1)\}!}{2 \times (m+1)!} \\ &= \frac{2(m+1)(2m+1)!}{2 \times (m+1)!} + \frac{(4m+5)(2m+2)!}{2 \times (m+1)!} - 1 \\ &= \frac{\{(m+1) + (4m+5)(m+1)\}(2m+1)!}{(m+1)!} - 1 \\ &= \frac{(2m+3)(2m+2) \times (2m+1)!}{(m+1)!} - 1 \\ &= \frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!} - 1 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{(2n+1)!}{n!} - 1$$

이다.

$$f(m) = \{4(m+1)+1\} \times \{2(m+1)\}!, \quad g(m) = (2m+3)(2m+2)$$

이므로

$$\begin{aligned} f(1) + g(2) &= \{4 \times (1+1) + 1\} \times \{2 \times (1+1)\}! + (2 \times 2 + 3) \times (2 \times 2 + 2) \\ &= 9 \times 4! + 7 \times 6 \\ &= 216 + 42 = 258 \end{aligned}$$

답 ②

14

 $f(t) = 2t^3, g(t) = 3t^2 + 12t$ 라 하자.ㄱ. $t=2$ 일 때 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$$f(2) = 16 = 5 \times 3 + 1, \quad g(2) = 36 = 5 \times 7 + 1$$

이므로 두 점 P, Q는 모두 점 B에서 점 A 방향으로 움직인다.

따라서 두 점 P, Q의 운동 방향은 같다. (참)

ㄴ. 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우는 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 $10n$ (n 은 정수)인 경우이다.

$$h_1(t) = f(t) - g(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t \text{라 하면}$$

$$h_1'(t) = 6t^2 - 6t - 12 = 6(t+1)(t-2)$$

이므로 $0 < t < 2$ 에서 $h_1'(t) < 0$ 이고 $h_1(t)$ 는 감소한다. $h_1(0) = 0, h_1(2) = -20$ 이므로 $h_1(t)$ 의 값이 $-10, -20$ 일 때 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차는 각각 10, 20이다.

이때 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나고, 만나는 횟수는 2이다. (참)

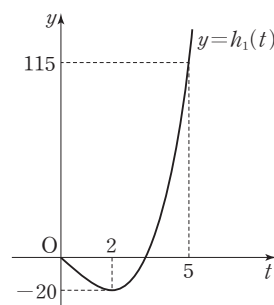
ㄷ. 두 점 P, Q가 만나는 경우는 두 점이 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우와 반대 방향으로 움직이면서 만나는 경우, 선분의 양 끝 점에서 만나는 경우가 있다.

(i) 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우

ㄴ과 마찬가지로 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 $10n$ (n 은 정수)인 경우이다.

$$h_1(t) = f(t) - g(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t \text{라 하면}$$

$$h_1'(t) = 6t^2 - 6t - 12 = 6(t+1)(t-2) \text{에서}$$

 $t=2$ 일 때 $h_1(t)$ 는 극소이다.

$$h_1(0) = 0, \quad h_1(2) = -20, \quad h_1(5) = 115$$

 $0 < t \leq 2$ 에서 $h_1(t) = 10n_1$ (n_1 은 정수)인 t 의 값은 2개이고 $2 < t \leq 5$ 에서 $h_1(t) = 10n_2$ (n_2 은 정수)인 t 의 값은 13개이므로 $0 < t \leq 5$ 일 때 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 15이다.

(ii) 두 점 P, Q가 반대 방향으로 움직이면서 만나는 경우

두 점 P, Q가 움직인 거리의 합이 $10n$ (n 은 정수)인 경우이다.

$$h_2(t) = f(t) + g(t) = 2t^3 + 3t^2 + 12t \text{라 하면}$$

$$h_2'(t) = 6t^2 + 6t + 12 = 6\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{21}{2}$$

에서 $t > 0$ 일 때 $h_2'(t) > 0$ 이므로 $h_2(t)$ 는 증가한다.

$$h_2(0) = 0, \quad h_2(5) = 385 \text{이므로 } 0 < t \leq 5 \text{일 때}$$

 $h_2(t) = 10n_3$ (n_3 은 정수)인 t 의 값은 38개이다.즉, $0 < t \leq 5$ 일 때 두 점 P, Q가 반대 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 38이다.

(iii) 두 점 P, Q가 양 끝 점에서 만나는 경우

두 점 P, Q가 선분의 양 끝 점에서 만나기 위해서는 $f(t), g(t)$ 가 모두 5의 배수이고, $f(t) - g(t)$ 와 $f(t) + g(t)$ 모두 $10n$ (n 은 정수)이어야 한다.

이 경우 (i)과 (ii)를 모두 만족시켜야 하므로 위의 경우에 중복으로 포함되어 있다.

(i), (ii), (iii)에서 $0 < t \leq 5$ 일 때 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 $15 + 38 = 53$ 이하이다. (거짓)

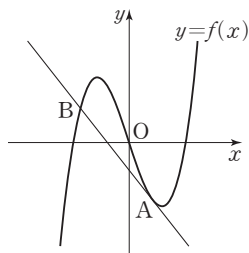
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15

 $a \neq 0$ 일 때 $A(a, f(a)), B(g(a), f(g(a)))$ 라 하면 두 점 A, B는함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이고, $\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$ 는 두 점 A,

B를 지나는 직선의 기울기이다.



$f'(x)=3x^2+k$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$$y=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka$$

이고, 두 점 A, B의 x 좌표는 방정식

$$x^3+kx=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

의 실근이다. $\textcircled{㉠}$ 을 정리하면

$$x^3-3a^2x+2a^3=0$$

$$(x+2a)(x-a)^2=0$$

$$x=-2a \text{ 또는 } x=a$$

$$\text{즉, } g(a)=-2a \text{ 또는 } g(a)=a$$

이때 0이 아닌 실수 a 에 대하여 $g(a) \neq a$ 이므로

$$g(a)=-2a, \text{ 즉 } g(x)=-2x \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f'(g(x))=f'(-2x)=12x^2+k$$

$$f'(x) \times f'(g(x))=k^2 \text{에서}$$

$$(3x^2+k) \times (12x^2+k)=k^2$$

$$36x^4+15kx^2=0, 3x^2(12x^2+5k)=0$$

이차방정식 $12x^2+5k=0$ 의 두 근의 곱이 $-\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{5k}{12}=-\frac{5}{4}, k=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서

$$g(-3)=-2 \times (-3)=6$$

답 ③

16

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{10}+a_{20}=50 \text{에서}$$

$$a+9d+a+19d=50$$

$$a+14d=25 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_{10}-a_{20}=30 \text{에서}$$

$$a+9d-(a+19d)=30$$

$$-10d=30 \text{에서 } d=-3$$

$$d=-3 \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } a=67$$

$$\text{따라서 } a_5=a+4d=67+4 \times (-3)=55$$

답 55

17

$$f(x)=(x+2)(x^2-2x+4) \text{라 하면}$$

$$x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0 \text{이므로}$$

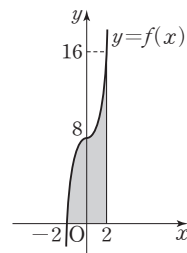
$$f(x)=0 \text{에서 } x=-2$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점 $(-2, 0)$ 에서 만난다.

$$\text{한편 } (x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8 \text{이므로}$$

$$f(x)=x^3+8 \text{에서 } f'(x)=3x^2 \geq 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.



따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x+2)(x^2-2x+4) dx &= \int_{-2}^2 (x^3+8) dx \\ &= \int_{-2}^2 8 dx = 8 \times 4 = 32 \end{aligned}$$

답 32

18

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$ 이므로

$$a \cos \frac{2}{3}\pi + b = 3$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2}a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

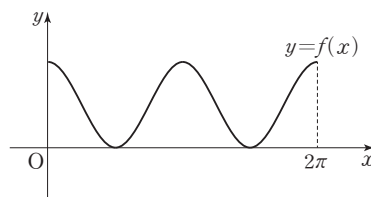
함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

$y=a \cos 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프이다. 즉, $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수가 2이려면 다음과 같이

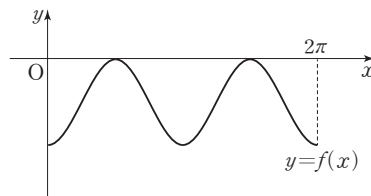
(i) $a > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이거나

(ii) $a < 0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0이어야 한다.

(i) $a > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0인 경우



(ii) $a < 0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0인 경우



조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3>0$ 이므로 $a>0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이므로 $-a+b=0$ 에서

$$a=b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a=b=6$$

$$\text{따라서 } a+b=6+6=12$$

답 12

19

$$f(x)=2x^3+ax^2-12x+b \text{에서}$$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$ 이고 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로
 $f'(1) = 6 + 2a - 12 = 0$
 에서 $a=3$
 $f(1) = 10$ 이므로
 $f(1) = 2 + 3 - 12 + b = 10$
 에서 $b=17$
 따라서 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 17$ 이므로
 $f(-1) = -2 + 3 + 12 + 17 = 30$

답 30

20

$S_{15} = S_{10}$ 에서
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{13} + a_{14} + a_{15} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$
 이므로
 $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 정수인 공차를 d 라 하면
 $(a_1 + 10d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 12d) + (a_1 + 13d) + (a_1 + 14d) = 0$
 에서 $a_1 + 12d = 0$
 $a_n + 25 > 0$ 을 만족시키는 n 의 최댓값이 19이므로
 $a_1 + 18d + 25 > 0 \geq a_1 + 19d + 25$
 $6d + 25 > 0 \geq 7d + 25$ 에서 $d = -4$
 $\textcircled{1}$ 에서
 $a_{13} = 0$ 이므로
 $a_1 + (13-1) \times (-4) = 0$ 에서 $a_1 = 48$
 따라서 $a_n = 48 + (n-1) \times (-4) = -4n + 52$ 이므로
 $\sum_{k=1}^{20} |a_k|$
 $= \sum_{k=1}^{12} (-4k + 52) + a_{13} + \sum_{k=14}^{20} (4k - 52)$
 $= (48 + 44 + 40 + \dots + 8 + 4) + 0 + (4 + 8 + 12 + \dots + 24 + 28)$
 $= \frac{12}{2} (48 + 4) + \frac{7}{2} (4 + 28)$
 $= 424$

답 424

21

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$ 이므로 삼각형 ADE의 넓이는 15이다.
 $(\text{삼각형 ADE의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \sin A = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또한 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \cos A \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 한편, 삼각형 ABC에서 $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$ 이다.
 $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \frac{5}{13} = 15$ 이므로
 $\overline{AD} \times \overline{AE} = 78 \quad \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}$ 에서
 $\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \frac{12}{13}$
 $= \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 144$

$$\begin{aligned}
 &= (\overline{AD} - \overline{AE})^2 + 2 \times \overline{AD} \times \overline{AE} - 144 \\
 &= (\overline{AD} - \overline{AE})^2 + 12 \quad (\textcircled{3} \text{에 의하여})
 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AD} = \overline{AE}$ 일 때, $\overline{DE}$ 는 최솟값 $2\sqrt{3}$ 을 갖는다.
 $m = 2\sqrt{3}$ 이므로 $m^2 = 12$

답 12

22

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값 a_n 은 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 두 함수값 $f(-1)$, $f(3)$ 중에서 가장 큰 값이다.

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = x(1-x^n)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x t(1-t^n) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{n+2}t^{n+2} \right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n+2}x^{n+2}
 \end{aligned}$$

(i) n 이 홀수일 때

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{이고,}$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \times (-1)^2 - \frac{1}{n+2} \times (-1)^{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$	$\searrow$	$f(3)$

따라서 n 이 홀수일 때 $f(-1) > f(1) > f(3)$ 이므로

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$$

(ii) n 이 짝수일 때

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{이고,}$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \times (-1)^2 - \frac{1}{n+2} \times (-1)^{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$	$\searrow$	$f(3)$

따라서 n 이 짝수일 때 $f(-1) = f(1) > f(3)$ 이므로

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

(i), (ii)에서 $a_n = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{n+2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{10} 4(n+2)a_n &= \sum_{n=1}^{10} \{2(n+2) - 4(-1)^n\} \\
 &= \sum_{n=1}^{10} 2n + \sum_{n=1}^{10} 4 - \sum_{n=1}^{10} 4(-1)^n \\
 &= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 - 4 \times 0 = 150
 \end{aligned}$$

답 150

23

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x^2+x-13}{x^2+x+12} \right)^n$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{2x^2+x-13}{x^2+x+12} < 1$$

이어야 한다. 이때

$$x^2+x+12 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} > 0$$

이다.

$$(i) \frac{2x^2+x-13}{x^2+x+12} > -1 \text{에서}$$

$$2x^2+x-13 > -x^2-x-12$$

$$3x^2+2x-1 > 0$$

$$(3x-1)(x+1) > 0$$

$$x < -1 \text{ 또는 } x > \frac{1}{3}$$

$$(ii) \frac{2x^2+x-13}{x^2+x+12} < 1 \text{에서}$$

$$2x^2+x-13 < x^2+x+12$$

$$x^2-25 < 0$$

$$(x+5)(x-5) < 0$$

$$-5 < x < 5$$

(i), (ii)에서

$$-5 < x < -1 \text{ 또는 } \frac{1}{3} < x < 5$$

이므로 조건을 만족시키는 정수 x 의 값은

$$-4, -3, -2, 1, 2, 3, 4$$

로 개수는 7이다.

답 ②

24

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \cos 2x)(\cos x + \cos 2x)}{x^2(\cos x + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2(\cos x + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x - (1 - \sin^2 2x)}{x^2(\cos x + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \sin^2 2x}{x^2(\cos x + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 \right\} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + \cos 2x}$$

$$= (-1^2 + 2^2) \times \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{3}{2}$$

답 ③

25

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-n)^2}{n(2k+n)(2k-3n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n^2} \times (2k-n)^2}{\frac{1}{n^2} \times (2k+n)(2k-3n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2}{\left(\frac{2k}{n} + 1\right)\left(\frac{2k}{n} - 3\right)}$$

$$= \int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-3)} dx$$

$$2x-1=t \text{로 놓으면 } 2 = \frac{dt}{dx} \text{이고}$$

$$x=0 \text{일 때 } t=-1, x=1 \text{일 때 } t=1 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-3)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t^2}{(t+2)(t-2)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(t^2-4)+4}{t^2-4} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt$$

$$f(t) = 1 + \frac{4}{t^2-4} \text{라 하면 } f(-t) = f(t) \text{이므로}$$

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-3)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left\{1 + \frac{4}{(t-2)(t+2)}\right\} dt$$

$$= \int_0^1 \left\{1 + \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\right\} dt$$

$$= \left[t + \ln |t-2| - \ln |t+2| \right]_0^1$$

$$= (1 + \ln 1 - \ln 3) - (0 + \ln 2 - \ln 2)$$

$$= 1 - \ln 3$$

답 ⑤

다른 풀이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-n)^2}{n(2k+n)(2k-3n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n^2} \times (2k-n)^2}{\frac{1}{n^2} \times (2k+n)(2k-3n)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2}{\left(\frac{2k}{n} + 1\right)\left(\frac{2k}{n} - 3\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(x^2-4)+4}{x^2-4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{4}{x^2-4}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left\{1 + \frac{4}{(x-2)(x+2)}\right\} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) \right\} dx \\
&= \left[x + \ln |x-2| - \ln |x+2| \right]_0^1 \\
&= (1 + \ln 1 - \ln 3) - (0 + \ln 2 - \ln 2) \\
&= 1 - \ln 3
\end{aligned}$$

26

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \\
g(t) &= f'(t) \text{이므로} \\
g(t) &= \frac{1 - \ln t}{t^2} \\
g'(t) &= \frac{\left(-\frac{1}{t}\right) \times t^2 - (1 - \ln t) \times 2t}{t^4} = \frac{2 \ln t - 3}{t^3} \\
g'(t) &= 0 \text{에서 } 2 \ln t = 3, \ln t = \frac{3}{2}, t = e^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$1 \leq t \leq e^3$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...	e^3
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	1	$\searrow$	극소(최소)	$\nearrow$	$-\frac{2}{e^6}$

$t = e^{\frac{3}{2}}$ 에서 $g(t)$ 는 극소이고 최솟값을 갖는다.

$$m = g(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{(e^{\frac{3}{2}})^2} = -\frac{1}{2e^3}$$

$$g(1) = 1, g(e^3) = -\frac{2}{e^6} \text{이므로 } M = 1$$

$$\text{따라서 } Mm = -\frac{1}{2e^3}$$

27

$$x = 8t, y = \frac{1}{2}t^2 - 16 \ln t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 8, \frac{dy}{dt} = t - \frac{16}{t}$$

이므로 점 P의 속력은

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{8^2 + \left(t - \frac{16}{t}\right)^2} \\
&= \sqrt{64 + t^2 - 32 + \frac{16^2}{t^2}} \\
&= \sqrt{t^2 + 32 + \frac{16^2}{t^2}} \\
&= \sqrt{\left(t + \frac{16}{t}\right)^2} \\
&= \left|t + \frac{16}{t}\right| \\
&= t + \frac{16}{t} \quad (t > 0 \text{이므로})
\end{aligned}$$

$$f(t) = t + \frac{16}{t} \text{이라 하면}$$

$$f'(t) = 1 - \frac{16}{t^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서}$$

$$1 - \frac{16}{t^2} = 0, t = 4 \quad (t > 0 \text{이므로})$$

$t = 4$ 의 좌우에서 $f'(t)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$ 는 $t = 4$ 에서 극소이자 최소이다.

따라서 $a = 4$ 이므로 $t = 1$ 에서 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_1^4 \left(t + \frac{16}{t}\right) dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 + 16 \ln |t|\right]_1^4 \\
&= (8 + 16 \ln 4) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) \\
&= 32 \ln 2 + \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

답 ④

28

$$\text{직선 PH의 방정식은 } y = -(x - t) + e^{2t} - 1$$

이므로 직선 OH의 방정식인 $y = x$ 와 연결하여 풀면

$$-(x - t) + e^{2t} - 1 = x \text{에서}$$

$$x = \frac{t + e^{2t} - 1}{2}$$

$$H\left(\frac{t + e^{2t} - 1}{2}, \frac{t + e^{2t} - 1}{2}\right) \text{이므로}$$

$$\overline{OH} = \frac{t + e^{2t} - 1}{2} \sqrt{2}$$

점 P의 x 좌표는 t 이고 직선 PH의 기울기는 -1 이므로

$$\overline{PH} = \left(\frac{t + e^{2t} - 1}{2} - t\right) \sqrt{2} = \frac{e^{2t} - 1 - t}{2} \sqrt{2}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{t + e^{2t} - 1}{2} \sqrt{2} \times \frac{e^{2t} - 1 - t}{2} \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4} \times \{(e^{2t} - 1)^2 - t^2\}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4} \times \{(e^{2t} - 1)^2 - t^2\}}{t^2} \\
&= \frac{1}{4} \times \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{e^{2t} - 1}{t}\right)^2 - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{4} (2^2 - 1) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

답 ⑤

29

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2} \text{라 하면}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

이므로 $h'(x)=0$ 에서

$$1-2\ln x=0, x=\sqrt{e}$$

$0 < x < \sqrt{e}$ 에서 $h'(x) > 0$, $x > \sqrt{e}$ 에서 $h'(x) < 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=\sqrt{e}$ 에서 극대이자 최대이다. 따라서 $0 < t < \sqrt{e}$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{e}$ 에서 최대이고, $t \geq \sqrt{e}$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=t$ 에서 최대이다.

$$h(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$

이므로

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2e} & (0 < t < \sqrt{e}) \\ \frac{\ln t}{t^2} & (t \geq \sqrt{e}) \end{cases}$$

따라서

$$\int_1^e g(t) dt = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} dt + \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln t}{t^2} dt$$

이때

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} dt = \left[\frac{1}{2e} t \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2e} (\sqrt{e} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2e}$$

이고

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln t}{t^2} dt &= \int_{\sqrt{e}}^e t^{-2} \ln t dt \\ &= \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_{\sqrt{e}}^e - \int_{\sqrt{e}}^e \left(-\frac{1}{t} \times \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \left(-\frac{1}{e} + \frac{1}{2\sqrt{e}} \right) - \left[\frac{1}{t} \right]_{\sqrt{e}}^e \\ &= \left(-\frac{1}{e} + \frac{1}{2\sqrt{e}} \right) - \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \\ &= -\frac{2}{e} + \frac{3}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_1^e g(t) dt &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} dt + \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2e} \right) + \left(-\frac{2}{e} + \frac{3}{2\sqrt{e}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{5}{2e} \end{aligned}$$

$$p=2, q=-\frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$(p \times q)^2 = \left[2 \times \left(-\frac{5}{2} \right) \right]^2 = 25$$

답 25

30

$$f'(x) = \frac{2(x+k)^2 - 2x \times 2(x+k)}{(x+k)^4} = \frac{-2(x-k)}{(x+k)^3}$$

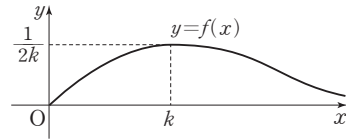
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=k$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	k	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	(0)	↗	$\frac{1}{2k}$	↘

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(k) = \frac{1}{2k}, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{이므로}$$

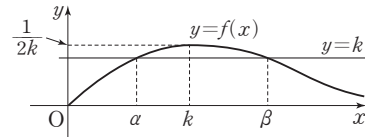
$0 < f(x) \leq \frac{1}{2k}$ 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$\{f(f(x))\}' = f'(f(x)) \times f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$f(x)=k \text{ 또는 } x=k$$

(i) $0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때



$\frac{1}{2k} > k$ 이므로 $f(x)=k$ 를 만족시키는 x 의 값은 2개이다.

$f(a)=f(\beta)=k$ ($a < \beta$)라 하자.

$x=a$ 의 좌우에서 $f'(f(x))$ 의 부호는 양에서 음으로 바뀌고

$f'(a)$ 의 부호는 항상 양이므로 $f(f(x))$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

$x=\beta$ 의 좌우에서 $f'(f(x))$ 의 부호는 음에서 양으로 바뀌고

$f'(\beta)$ 의 부호는 항상 음이므로 $f(f(x))$ 는 $x=\beta$ 에서 극솟값을 갖는다.

또한 $x=k$ 의 좌우에서 $f(x) > k$ 이므로 $f'(f(x)) < 0$ 이고, $f'(x)$ 의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 $f'(f(x))f'(x)$ 의 부호는 음에서 양으로 바뀐다. 따라서 $f(f(x))$ 는 $x=k$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$g(k) = 2 + 1 = 3$$

(ii) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때

$\frac{1}{2k} = k$ 이고 이때 $x=k$ 의 좌우에서 $f(x) < k$ 이므로 $f'(f(x))$ 의 부호는 항상 양이고 $f'(x)$ 의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로

$f(f(x))$ 는 $x=k$, 즉 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$g(k) = 1$$

(iii) $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때

$\frac{1}{2k} < k$ 이고 이때 $x=k$ 의 좌우에서 $f(x) < k$ 이므로 $f'(f(x))$ 의 부호는 항상 양이고 $f'(x)$ 의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로

$f(f(x))$ 는 $x=k$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$g(k) = 1$$

따라서 $g(k)$ 는 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 불연속이다.

$$\text{즉, } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow a-} g(k) = 3, g(a) = \lim_{k \rightarrow a+} g(k) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow a-} g(k) + g(a) + \lim_{k \rightarrow a+} g(k) = 3 + 1 + 1 = 5$$

답 5